



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL EM CIÊNCIA
E TECNOLOGIA

SIRLÊDA SOUZA SANTOS

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS REGULARIZADOS NUM CENÁRIO DE FUSÃO
DE DADOS VIA OPERADORES DE AGREGAÇÃO

ILHÉUS - BA
2021

SIRLÊDA SOUZA SANTOS

**MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS REGULARIZADOS NUM CENÁRIO DE FUSÃO
DE DADOS VIA OPERADORES DE AGREGAÇÃO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Estadual de Santa Cruz, para obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Silva Palmeira

Coorientador: Prof. Dr. Gildson Queiroz de Jesus

ILHÉUS - BA

2021

Santos, Sirlêda Souza

Método dos mínimos quadrados regularizados num cenário de fusão de dados via operadores de agregação. / Sirlêda Souza Santos - Ilhéus, BA: UESC, 2021.

83 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Silva Palmeira

Coorientador: Prof. Dr. Gildson Queiroz de Jesus

Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Santa Cruz. Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia.

Inclui referências e apêndice.

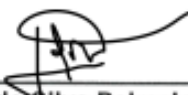
1. Integral de Choquet. 2. Média Ponderada. 3. Operador Mistura. I. Título.

SIRLÊDA SOUZA SANTOS

**MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS REGULARIZADOS NUM CENÁRIO
DE FUSÃO DE DADOS VIA OPERADORES DE AGREGAÇÃO**

Ilhéus, 31/03/ 2021

Comissão Examinadora



Prof. Dr. Eduardo Silva Palmeira
Universidade Estadual de Santa Cruz / UESC
(Orientador)



Prof.ª Dr.ª. Geizane Lima da Silva
Universidade Estadual de Santa Cruz / UESC



Prof. Dr. Fabíolo Moraes Amaral
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia / IFBA

Aos meus pais!

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, por me conceder essa etapa da vida, pela sua bondade e força.

Aos professores, Eduardo Silva Palmeira e Gildson Queiroz de Jesus, orientador e coorientador, pela paciência, dedicação, incentivo e contribuições para realização desse trabalho.

Aos meus pais, Antonio e Aurenita, pelo carinho e todo o apoio.

À minha irmã Elielma por me apoiar, incentivar, ouvir e aturar os momentos difíceis dos estudos.

Às minhas sobrinhas, Vitória e Luciana pela distração do cansaço físico e mental.

À meu namorado Rodrigo pelo apoio, pelas palavras de incentivo e por me ouvir sempre que precisei.

À minha amiga Ednólia por aturar todas as lamentações das horas difíceis e também as alegrias.

À todos os familiares, cunhado, tios, tias, primos e amigos que diretamente ou indiretamente torceram por mim.

Aos meus colegas do mestrado por todo carinho, em especial a Givaldo pela generosidade.

Aos professores do programa do mestrado PPGMC pelo aprendizado.

Ao programa PPGMC e à UESC pelas oportunidades de conhecimento concedidas.

"Se apenas houvesse uma única verdade, não poderiam pintar-se cem telas sobre o mesmo tema."

(Pablo Picasso)

Resumo

Nesta pesquisa é proposto o desenvolvimento de métodos dos mínimos quadrados num cenário de fusão de dados baseado em vários operadores de agregação. O objetivo da dissertação é utilizar operadores de agregação que não seja os clássicos, para assim desenvolver método dos mínimos quadrados regularizados num cenário de fusão de dados ponderada via operadores de agregação. A abordagem para o desenvolvimento dessas técnicas de mínimos quadrados foram baseadas em (SAYED et al., 2000), e assim três métodos foram criados, a saber, método dos mínimos quadrados regularizados via operador de agregação da média ponderadas ordenadas (Ordered Weighted Averaging - OWA), método dos mínimos quadrados regularizados via operador de agregação da integral de Choquet e o último é método dos mínimos quadrados regularizados via operador de agregação mistura adaptada. Uma aplicação foi apresentada como demonstração do potencial de aplicação das teorias propostas nessa dissertação e também para mostrar se os métodos apresentam boas estimativas comparadas ao clássico.

Palavras-chave: Integral de Choquet, Média Ponderada Ordenada, Operador Mistura.

Abstract

This research proposes the development of methods of least squares in a scenario of data fusion based on several aggregation operators. The objective of the dissertation is to use aggregation operators other than the classics, so that develop regularized least squares method in a weighted data fusion scenario via aggregation operators. The approach to the development of these least squares techniques was based on (SAYED et al., 2000), and thus three methods were created, namely, the method of least squares regularized via the ordered weighted average aggregation operator (Ordered Weighted Averaging - OWA), regularized least squares method via Choquet integral aggregation operator and the latter is regularized least squares method via mixed aggregation operator. An application was presented as a demonstration of the potential application of the theories proposed in this dissertation and also to show whether the methods presented good estimates compared to the classic one.

Keywords: Choquet Integral, Ordered Weighted Average, Mixing Operator.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Fusão de Dados. Fonte: Elaborada Pela Autora.	29
Figura 2 – Fusão Ponderada. Fonte: Sayed, 2000.	33
Figura 3 – Fusão Probabilística. Fonte: Sayed, 2000.	36
Figura 4 – Dados da localização e curva de regressão usando método dos mínimos quadrados sem fusão de dados.	67
Figura 5 – Dados da limpeza e curva de regressão do método dos mínimos quadrados sem fusão de dados.	68
Figura 6 – Dados do custo-benefício e curva de regressão do método dos mínimos quadrados sem fusão de dados.	68
Figura 7 – MMQR num cenário de fusão de dados clássico (perfil de mochileiro).	71
Figura 8 – MMQR num cenário de fusão de dados clássico (perfil de negócio).	72
Figura 9 – MMQR num cenário de fusão de dados via operador OWA (perfil de mochileiro).	73
Figura 10 – MMQR num cenário de fusão de dados via operador OWA (perfil de negócio).	73
Figura 11 – MMQR num cenário de fusão de dados via operador da integral de Choquet (perfil mochileiro).	74
Figura 12 – MMQR num cenário de fusão de dados via operador da integral de Choquet (perfil negócio).	75
Figura 13 – MMQR num cenário de fusão de dados via operador mistura adaptada (perfil de mochileiro).	76
Figura 14 – MMQR num cenário de fusão de dados via operador mistura adaptada (perfil de negócio).	77

Lista de tabelas

Tabela 1 – Resultado dos Exemplos	61
Tabela 2 – Resultado dos Exemplos	63
Tabela 3 – Resultado dos Exemplos	64
Tabela 4 – Dados Obtidos	66
Tabela 5 – Resultado da Aplicação	78

Lista de abreviaturas e siglas

OWA	<i>Média Ponderada Ordenada</i>
MMQR	<i>Método dos Mínimos Quadrados Regularizados</i>
MIX	<i>Mistura</i>

Sumário

1	INTRODUÇÃO	14
2	PRELIMINARES	17
2.1	Operadores de Agregação	17
2.1.1	Operador de Agregação do Tipo Média	18
2.1.2	Média Ponderada Ordenada (<i>OWA</i>)	20
2.1.3	Integral de Choquet	23
2.1.4	Operador Mistura	25
2.2	Fusão de Dados	28
2.3	Método dos Mínimos Quadrados Regularizados (MMQR)	28
2.3.1	Método dos Mínimos Quadrados Não Regularizados	29
2.3.2	Método dos Mínimos Quadrados Regularizados	31
2.4	MMQR num cenário de fusão de dados	32
2.4.1	MMQR num cenário de fusão de dados ponderados	32
2.4.2	MMQR num cenário de fusão de dados probabilística	35
3	MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS NUM CENÁRIO DE FUSÃO DE DADOS VIA OPERADOR OWA	37
4	MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS NUM CENÁRIO DE FUSÃO DE DADOS VIA INTEGRAL DE CHOQUET	46
5	MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS NUM CENÁRIO DE FUSÃO DE DADOS VIA OPERADOR MISTURA ADAPTADA	53
6	RESULTADOS	60
7	APLICAÇÃO	65
7.1	Metodologia da Solução	65
7.2	Análise e Discussão dos Resultados	76
8	CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS	79
	REFERÊNCIAS	80

APÊNDICE A – DEFINIÇÕES MATEMÁTICA	82
--	----

1 Introdução

Introduzido no início da década de 70, o conceito de fusão de dados foi designado a estudo não militares e militares, sendo este último usado para o reconhecimento automatizado de alvos, sendo eles, aéreos, terrestres e aquáticos. Assim, a fusão de dados combina dados imprecisos e precisos que se encontram com um grande número de improbabilidade (FILHO, 2007, apud ANTONY, 1995). Nos estudos referentes às aplicações não militares incluem o monitoramento de processos de fabricação, a manutenção baseada em condições de máquinas complexas, robóticas e encontramos também as pesquisas médicas (HALL et al., 2001). Um mecanismo de integração de dados compõe-se de um conjunto de métodos que, se destina a combinar tais dados para obter uma melhor significância das informações deles extraída, sendo esses dados provenientes de fontes de naturezas distintas (FILHO, 2007). Trabalho sobre fusão de dados é observado em (JÚNIOR, 2010), (ALEMÁN, 2015), (TORRES, 2007) entre outros.

Na literatura clássica o operador mais utilizado para agregar os dados em um modelo de fusão é a média ponderada, isto é, se A_1, \dots, A_n são as informações coletadas pelos sensores, a fusão é dada pela média ponderada determinada por $M_p = \sum_{i=1}^n \mu_i A_i$, onde os μ_i são ponderações escolhidas de maneira adequada e, às vezes, dinâmica. Contudo, existem outras maneiras de agregar informações através de outros operadores e mesmo já existindo métodos consolidados na teoria, é importante encontrar novos operadores que permitam uma maior robustez dos resultados.

Os operadores de agregação realizam o processo de combinar vários valores numéricos de entrada em um único valor de saída, e o operador que executa esse processo é chamada de função de agregação (GRABISCH et al., 2009). Existe uma ampla área de concentração de estudos desses operadores que vai desde a ciência da computação (por exemplo, pesquisa operacional, inteligência artificial) à matemática aplicada (por exemplo, teoria da decisão, probabilidade, estatística), bem como outros campos de aplicação (fusão de dados, economia e finanças, auxílio à decisão multicritério, raciocínio automatizado, reconhecimento de padrões e processamento de imagens, etc.). Mesmo tendo surgido há muito tempo, os operadores de agregação mantiveram sua existência secreta e sua utilização bastante intuitiva e dificilmente formalizada por um longo período.

Nessa dissertação é proposto a construção de métodos dos mínimos quadrados regularizados, num cenário de fusão de dados baseado nos operadores de agregação da média ponderada ordenada (ordered weighted averaging -OWA), da integral de Choquet e do operador mistura,

sendo que, este ocorre uma adaptação na mistura.

No processo de fusão de dados é comum à presença de erros, também chamado de resíduos, seja por problemas de modelagem ou por interferência ambiental, e o método dos mínimos quadrados é empregado como potencial ferramenta para minimização desses erros. Ele minimiza a influência dos erros presentes na medida, mais especificamente, ele minimiza o quadrado do vetor desses resíduos. Segundo (HELLENE, 2006) para o tratamento de dados sujeito a erros essa técnica é talvez das mais usadas e úteis.

Esse método surgiu em 1795 quando Karl Friedrich Gauss, formulou seu conceito básico e o usou nos estudos da Astronomia. Segundo (CRATO, 2000) muitos astrônomos como Eratóstenes (180 - 125 a. C.), primeiro a medir o raio da Terra, e Aristarco (310 - 230 a.C.), que mediu as distâncias relativas do Sol e da Lua, sabiam que suas medidas apresentavam erros. As variações ocorriam a depender do momento que eram realizadas e de observador para observador. Com isso, vários estudos foram feitos na tentativa de encontrar um modelo ideal para a combinação das medidas, dentre os estudiosos estiveram Marquis de Laplace (1749 – 1827), Adrien-Marie L egendre (1752 - 1833) e Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855).

Na tentativa de calcular os parâmetros das órbitas dos cometas a partir de medidas pontuais, tiradas em diferentes momentos, a soluço mais eficaz foi considerada a do método dos mínimos quadrados, publicado em 1805 por Legendre na sua obra: “Nouvelles Méthodes pour La Détermination des Orbites d s Cometes” e por Carl Friedrich Gauss em 1809 na *Theoria Motus Corporum Coelestium* (CRATO, 2000). Mesmo que Legendre divulgou primeiro os seus resultados, sabe-se que Gauss os tinha obtido muito antes (PLACKETT, 1972).

Os métodos dos mínimos quadrados regularizados num cenário de fusão de dados desenvolvidos nessa pesquisa são baseados no método dos mínimos quadrados proposto por (SAYED et al., 2000), no qual ele traz a formula o desse método num cenário de fusão de dados para o caso ponderado e probabilístico. Primeiro considerado robusto, ou seja, com incerteza em todos os parâmetros, e desenvolveu também para o caso onde incertezas são desconsideradas (caso nominal). Trabalhos utilizando esse método dos mínimos quadrados regularizados de (SAYED et al., 2000), pode ser encontrado em (MOURA, 2019) e em (Silva, 2018), onde utilizaram para desenvolvimento de filtros ótimos.

Os métodos aqui propostos são semelhantes aos de (SAYED et al., 2000), para o caso dos mínimos quadrados regularizados num cenário de fusão de dados sem incertezas paramétricas, utilizando os operadores de agrega o OWA, integral de Choquet e mistura adaptada.

Para a soluço dos métodos dos mínimos quadrados desenvolvidos são propostos os seguintes problemas de otimiza o baseados nos operadores de agrega o.

- Via operador OWA

$$\hat{x} = \underset{x}{\operatorname{argmin}} \left[\|x\|_Q^2 + \sum_{k=1}^L \|A_{(k)}x - b_{(k)}\|_{W_k}^2 \right].$$

- Via operador da integral de Choquet

$$\hat{x} = \underset{x}{\operatorname{argmin}} \left[\|x\|_Q^2 + \sum_{k=1}^n \|(A_{(k)}x - b_{(k)}) - (A_{(k-1)}x - b_{(k-1)})\|^2 I\mu(G_k) \right].$$

- Via operador mistura adaptada

$$\hat{x} = \underset{x}{\operatorname{argmin}} \left[\|x\|_Q^2 + \frac{\sum_{k=1}^n \|(A_k x - b_k)\|_{W_k}^2}{\sum_{k=1}^n \|W_k\|^2} \right].$$

Estes problemas de otimização serão resolvidos pelos métodos dos mínimos quadrados regularizados, no qual uma solução ótima será obtida.

Este texto de dissertação está composto de sete capítulos, sendo o primeiro a parte introdutória. Quanto aos demais, segue uma descrição abaixo. Por fim consta um apêndice com algumas definições matemáticas que servirão para melhor compreensão do texto.

Capítulo 2: Neste capítulo serão abordados tópicos necessários para o desenvolvimento e entendimento do trabalho. Inicialmente constarão estudos sobre operadores de agregação, com ênfase na OWA, na integral de Choquet e na mistura. Logo em seguida, constam estudos sobre fusão de dados, mostrando o método dos mínimos quadrados não regularizados e regularizados, assim como o método mínimos quadrados regularizados com fusão de dados ponderada e probabilística, ambas, para os casos nominais.

Capítulo 3: Este capítulo traz o desenvolvimento do método dos mínimos quadrados num cenário de fusão de dados baseado no operador de agregação OWA.

Capítulo 4: Neste capítulo é desenvolvido o método dos mínimos quadrados num cenário de fusão de dados baseado no operador de agregação da integral de Choquet.

Capítulo 5: Neste capítulo tem-se o desenvolvimento do método dos mínimos quadrados num cenário de fusão de dados baseados no operador de agregação mistura com uma adaptação.

Capítulo 6 Neste capítulo são apresentados os resultados e discussões dos exemplos numéricos aplicados em cada método.

Capítulo 7 Neste capítulo será apresentada uma aplicação onde são introduzidos a todos os métodos desenvolvidos e ao clássico.

Capítulo 8 Por último, neste capítulo, serão apresentadas as devidas conclusões e as propostas futuras de continuação da pesquisa.

2 Preliminares

Neste capítulo serão abordados tópicos essenciais para o desenvolvimento e entendimento dos métodos presentes nos capítulos 3, 4 e 5. A primeira abordagem é sobre operadores de agregação, a segunda sobre o método dos mínimos quadrados regularizados, iniciando pela maneira não regularizada e regularizada, e seguindo para o cenário de fusão de dados ponderados e probabilística.

2.1 Operadores de Agregação

Nessa seção, será apresentado o conceito de operador de agregação, e também os três tipos de operadores, a saber, o operador OWA, a integral de Choquet e a mistura.

No processo de fusão de dados operadores são utilizados para agregar os dados a fim de obter uma informação única das análises feita, sendo uma contagem, uma obtenção de um valor máximo ou mínimo da média, entre outros. Dessa forma, entender sobre os operadores de agregação e o proceder de cada tipo dele usado nessa pesquisa, servirá como base para o entendimento do comportamento de cada método desenvolvido, nos capítulos 3, 4 e 5.

Os operadores de agregação realizam o processo de combinar vários valores de entrada em um único valor de saída, e o operador numérico que executa este processo é chamada de função de agregação. Qualquer função que computa um vetor de valores de entrada em um único valor de saída é chamada de função de agregação (GRABISCH et al., 2009).

Da mesma forma é encontrado em (BELIAKOV et al., 2007) que o objetivo dos operadores de agregação é combinar várias entrada em uma única, e estas entradas podem ser interpretadas como graus de pertinência de um conjunto fuzzy, assim como também podem ser usadas em problemas de tomada de decisão, conectivos da lógica fuzzy, sistemas baseados em base de regras, entre outros.

Os operadores ou funções de agregação são divididos em quatro classes, sendo elas, a do tipo média, a do tipo conjuntiva, a do tipo disjuntiva e a do tipo mista. Segundo (GRABISCH et al., 2009) o operador de agregação mais antigo usado durante todas as ciências experimentais é o da média aritmética.

Serão apresentadas funções de agregação que tem como entrada valores no intervalo $[0, 1]$ e produzem saída também em $[0, 1]$, como podemos perceber na definição de função de agregação apresentada a seguir.

Definição 2.1. Uma função de agregação é uma função de n argumentos ($n > 1$) que aplica no intervalo $I = [0, 1]$, isto é, $f : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$, com as seguintes propriedades:

$$(f1) \ f(0, 0, \dots, 0) = 0 \text{ e } f(1, 1, \dots, 1) = 1; \quad e$$

$$(f2) \ x_i \leq y_i \Rightarrow f(x_1, \dots, x_n) \leq f(y_1, y_2, \dots, y_n), \text{ para todo } x_i, y_i \in [0, 1]^n.$$

A propriedade (f1) é denominada condições de fronteira, enquanto que a propriedade (f2) é chamada de monotonicidade ou isotonicidade.

Alguns exemplos de funções de agregação serão apresentados a seguir.

1. A função mínimo:

$$\min(x_1, \dots, x_n) = y, \text{ onde } y \text{ é o menor valor de } x_1, \dots, x_n.$$

2. A função máximo:

$$\max(x_1, \dots, x_n) = y, \text{ onde } y \text{ é o maior valor de } x_1, \dots, x_n.$$

3. A função média aritmética:

$$\text{arit}(x_1, \dots, x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Das quatro classes de operadores citados anteriormente, aqui só será estudada a do tipo média sendo esta apresentada na subseção a seguir. Assim não constará discussão nessa pesquisa sobre as outras três classes, mas as mesmas podem ser encontradas em (BELIAKOV et al., 2007).

2.1.1 Operador de Agregação do Tipo Média

As médias são as formas mais comuns de combinar entradas. São geralmente usadas na votação multicritério e em tomada de decisão, construindo várias pontuações de desempenho, análises estatísticas, etc.

Definição 2.2. Uma função de agregação $f : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ é do tipo média, se para quaisquer $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$ tem-se

$$\min(x_1, \dots, x_n) \leq f(x_1, \dots, x_n) \leq \max(x_1, \dots, x_n).$$

São exemplos de funções do tipo média:

- A função do mínimos
- A função do máximo
- A função da média aritmética
- A função da média geométricas
- A função da média harmônica

A definição desses exemplos do tipo média será apresentada a seguir, elas são consideradas médias clássicas. As funções mínimas e máximas foram apresentadas nos itens 1 e 2 da seção 2.1.

Definição 2.3. (Média Aritmética). A média aritmética, é uma função $M : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$, com entradas $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$, tal que

$$M(x) = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Definição 2.4. (Vetor de ponderação). Um vetor $w = (w_1, \dots, w_n)$ é chamado um vetor de ponderação se $w_i \in [0, 1]$ e

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1.$$

Definição 2.5. (Média aritmética ponderada). Dado um vetor de ponderação w , a média aritmética ponderada é uma função $M_w : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$, com entradas $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$, tal que

$$M_w(x) = w_1x_1 + \dots + w_nx_n = \sum_{i=1}^n w_i x_i$$

Definição 2.6. (Média geométrica). A média geométrica é uma função $G(x) : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$, com entradas $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$, tal que

$$G(x) = \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}$$

Definição 2.7. (Média geométrica ponderada). Dado um vetor de ponderação w , a média geométrica ponderada é uma função $G_w(x) : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$, com entradas $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$, tal que

$$G_w(x) = \left(\prod_{i=1}^n x_i^{w_i} \right)^{1/\sum_{i=1}^n w_i}$$

Definição 2.8. (Média harmônica). A média harmônica é uma função $H(x) : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$, com entradas $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$, tal que

$$H(x) = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$$

Definição 2.9. (Média harmônica ponderada). Dado um vetor de ponderação w , a média harmônica ponderada é uma função $H_w(x) : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$, com entradas $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$, tal que

$$H_w(x) = \frac{\sum_{i=1}^n w_i}{\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{x_i}}.$$

Além dessas funções clássicas, existem importantes funções de agregação do tipo média, que são as funções de média ponderada ordenada (ordered weighted averaging - OWA), as integrais de Choquet e as funções mistura no decorrer do texto essas funções também serão chamadas de operadores de agregação. Nas subseções a seguir serão apresentados esses três operadores.

2.1.2 Média Ponderada Ordenada (OWA)

As funções de agregação são compostas por um importante operador do tipo média, a saber, a média ponderada ordenada, introduzida por Yager em (YAGER, 1988). Essas funções associam pesos não a uma entrada específica, mas ao valor da entrada. Por exemplo, quando um robô navega por obstáculos usando vários sensores, a maior entrada (o obstáculo mais próximo) é o mais importante. Os pesos na OWA são alocados de acordo com o valor de entrada, assim, elas ressaltam entradas de maior, menor ou médio alcance (BELIAKOV et al., 2007), e isso é o que diferencia essa média da média aritmética ponderada. Sua definição é apresentada a seguir.

Definição 2.10. (YAGER, 1988) Dado um vetor de ponderação w e $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$, a função OWA é dada por

$$OWA_w(x) = \sum_{i=1}^n w_i x_{(i)},$$

onde $(x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)})$ é uma permutação decrescente do vetor de entradas $x = (x_1, \dots, x_n)$.

A proposição abaixo garante que a OWA é um operador do tipo média.

Proposição 2.1. Seja $w = (w_1, \dots, w_n) \in [0, 1]$ com $\sum_{i=1}^n w_i = 1$. Então, o operador OWA_w é uma função de agregação do tipo média.

Demonstração. Basta notar que, por definição,

$$x_{(n)} \leq x_{(n-1)} \leq \dots \leq x_{(i)} \leq \dots \leq x_{(2)} \leq x_{(1)}.$$

Assim,

$$\min(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq OWA_w(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \max(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

pois

$$x_{(n)} = \sum_{i=1}^n w_i x_{(n)} \leq \sum_{i=1}^n w_i x_{(i)} \leq \sum_{i=1}^n w_i x_{(1)} = x_{(1)},$$

$$x_{(n)} = \min(x_1, \dots, x_n) \text{ e } x_{(1)} = \max(x_1, \dots, x_n).$$

Além disso, as OWA satisfazem (f_1) e (f_2) . ■

Dois exemplos serão citados para mostrar o funcionamento do operador OWA, usando sua definição.

Exemplo 2.1. Assumindo $n = 4$, $w = (0.1, 0.2, 0.3, 0.4)$, com as entradas $(0, 0.1, 2, 0.5)$ tem-se:

Permutando em ordem decrescente obtem, $(x_{(1)}, x_{(2)}, x_{(3)}, x_{(4)}) = (2, 0.5, 0.1, 0)$ e assim,

$$OWA_w(0, 0.1, 2, 0.5) = 0.1 \cdot 2 + 0.2 \cdot 0.5 + 0.3 \cdot 0.1 + 0.4 \cdot 0 = 0.33.$$

Exemplo 2.2. Seja $n = 3$, $w = (0.2, 0.3, 0.5)$ e as entradas $(0.2, 2, 1)$ tem-se:

Permutando em ordem decrescente obtem, $(x_{(1)}, x_{(2)}, x_{(3)}) = (2, 1, 0.2)$ e portanto

$$OWA_w = 0.2 \cdot 2 + 0.3 \cdot 1 + 0.5 \cdot 0.2 = 0.8.$$

De acordo com o vetor de pesos a função OWA pode simular outras funções de agregação, como pode ser visto a seguir:

1. Se todos os pesos forem iguais a $\frac{1}{n}$, isto é, $w = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$, então OWA_w é a média aritmética;
2. Se $w = (0, \dots, 0, 1)$, então $OWA_w = \min$;
3. Se $w = (1, \dots, 0, 0)$, então $OWA_w = \max$;
5. Se $w_i = 0$, para todo $i \neq k$ e $w_k = 1$, então $OWA_w(x_1, \dots, x_n) = x_{(k)}$, ou seja, é a k -ésima maior entrada, é chamada de OWA estatística;

Exemplo 2.3. Uma função média aritmética ponderada, quando difere de aritmética, ou seja, nos casos em que $w_i \leq w_j$ para algum $i, j \in 1, 2, \dots, n$, não é uma função OWA, pois:

$$OWA_{w_1, \dots, w_n}(x) = w_1 = OWA_{w_1, \dots, w_n}(y).$$

Outra maneira de se obter o operador OWA é apresentada na definição a seguir, onde os seus pesos pode ser organizados de forma decrescente.

Definição 2.11. Dada uma função OWA_w , com $w = (w_1, \dots, w_n)$, pode-se inverter a ordem do vetor w para $w^R = (w_n, w_{n-1}, \dots, w_1)$. A função OWA obtida a partir desse novo vetor w^R , ou seja, OWA_{w^R} , é chamada de OWA reversa e é denotada por OWA_w^R .

Exemplo 2.4.¹ Para $n = 3$, $w = (0.1, 0.4, 0.5)$ e $x = (0.6, 1, 0.1)$ tem-se pela primeira definição

$$OWA_w(x_{(1)}, x_{(2)}, x_{(3)}) = 0.1x_{(1)} + 0.4x_{(2)} + 0.5x_{(3)}.$$

Enquanto que

$$OWA_w^R(x_{(1)}, x_{(2)}, x_{(3)}) = 0.5x_{(1)} + 0.4x_{(2)} + 0.1x_{(3)}.$$

Organizando as entradas $(x_{(1)}, x_{(2)}, x_{(3)}) = (1, 0.6, 0.1)$, obtém-se

$$OWA_w(1, 0.6, 0.1) = 0.1 \cdot 1 + 0.4 \cdot 0.6 + 0.5 \cdot 0.1 = 0.39$$

e

$$OWA_w^R(1, 0.6, 0.1) = 0.5 \cdot 1 + 0.4 \cdot 0.6 + 0.1 \cdot 0.1 = 0.75.$$

Propriedades 2.1. Segue algumas propriedades da OWA.

1. Tal como acontece com todas as funções de agregação de média, o OWA não é decrescente (aumentando estritamente se todos os pesos forem positivos) e idempotente²;

2. As funções do OWA são contínuas³, simétricas⁴, homogêneas⁵ e etc.

3. As funções da OWA não possuem elementos neutros⁶ ou absorventes, exceto para os casos especiais mínimos e máximos.

4. O dual⁷ de uma função OWA é o OWA_w^R reverso, com o vetor de pesos $w_i = (w_n, w_{n-1}, \dots, w_1)$.

5. As funções do OWA são casos especiais da integral Choquet no que diz respeito a medidas fuzzy.

¹ Observe que quando se usou os pesos crescentes em entradas decrescentes obteve menor valor de saída e quando utilizou pesos decrescentes em entradas decrescentes obteve maior saída.

² Definição de idempotência consta no Apêndice A.

³ Definição de continuidade consta no Apêndice A.

⁴ Definição de simetria consta no Apêndice A.

⁵ Definição de homogeneidade consta no Apêndice A.

⁶ Definição de elemento neutro consta no Apêndice A.

⁷ Definição de dual consta no Apêndice A.

2.1.3 Integral de Choquet

As integrais de Choquet são importante família de funções de agregação, introduzidas pelo matemático francês Gustave Choquet em 1954, ela generaliza a integral de Lebesgue. Essa integral é definida com relação a medidas monótonas não necessariamente aditivas, chamadas medidas difusas (BELIAKOV et al., 2016). As medidas representam o grau de relação entre os elementos a serem agregados (BUENO, 2018).

Ainda segundo (BELIAKOV et al., 2016), o principal objetivo da agregação baseada em integral de Choquet é combinar as entradas de maneira que não apenas a importância de entradas individuais como nas médias ponderadas, ou de sua magnitude como na OWA sejam levadas em consideração, mas também de seus grupos. Por exemplo, uma entrada específica pode não ser importante por si só, mas se torna muito importante na presença de outras entradas.

As médias aritméticas ponderadas e funções OWA são casos especiais da integral de Choquet.

Definição 2.12. (BELIAKOV et al., 2016) Sejam $N = \{1, 2, \dots, n\}$ e 2^N o conjunto das partes de N . Uma **medida discreta fuzzy**, é uma função $\mu : 2^N \rightarrow [0, 1]$, tal que:

1. $\mu(A) \leq \mu(B)$ sempre que $A \subseteq B$. (Condição de monotonicidade).
2. $\mu(\emptyset) = 0$ e $\mu(N) = 1$. (Condição de contorno).

Exemplo 2.5. *As funções abaixo são exemplos de medidas discreta fuzzy.*

Medida fuzzy mais fraca:

$$\mu_1(A) = \begin{cases} 1, & \text{se } A = N \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Medida fuzzy mais forte:

$$\mu_2(A) = \begin{cases} 0, & \text{se } A = N \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Medida Uniforme:

$$\mu_U(A) = \frac{|A|}{n},$$

onde $|A|$ é a cardinalidade do conjunto A .

Medida de Dirac:

$$\mu_D(A) : \begin{cases} 1, & \text{se } x_0 \in A \\ 0, & \text{se } x_0 \notin A, \end{cases}$$

para qualquer $A \subset N$ e com x_0 um elemento fixo em N .

Estando definido o conceito de medida fuzzy, apresenta-se agora o conceito da integral de Choquet.

Definição 2.13. (CHOQUET, 1954) Seja $\mu : 2^N \rightarrow [0, 1]$ uma medida discreta fuzzy. A **integral discreta de Choquet** relacionada à medida μ é a função $C_\mu : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ definida por:

$$C_\mu(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n [x_{(i)} - x_{(i-1)}] \mu(A_i),$$

onde $(x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$ é uma ordenação crescente do vetor (x_1, \dots, x_n) , $x_{(0)} = 0$ e $A_i = \{(i), (i+1), \dots, (n)\}$ é o subconjunto de índices dos maiores componentes de x .

Além disso, a integral de Choquet também pode ser escrita pela seguinte expressão expandida:

$$C_\mu(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_{(i)} [\mu(\{j | x_j \geq x_{(i)}\}) - \mu(\{j | x_j \geq x_{(i+1)}\})],$$

e por convenção $x_{(n+1)} = \infty$

Exemplo 2.6. Considerando a medida fraca do Exemplo 2.5 que é dado por:

$$\mu_1(A) = \begin{cases} 1, & \text{se } A = N \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

usando a integral de Choquet temos:

$$C_{\mu_1}(x_1, \dots, x_n) = [x_{(1)} - x_{(0)}] \mu_1(A_1) + [x_{(2)} - x_{(1)}] \mu_1(A_2) + \dots + [x_{(n)} - x_{(n-1)}] \mu_1(A_n).$$

Observe que:

(i) $\mu_1(A_1) = 1$, pois $\mu_1(A_1) = \{(1), (1+1), (1+2), \dots, (n)\} = \{1, 2, 3, \dots, n\} = N$.

(ii) $\mu_1(A_j) = 0$ e

(iii) Para qualquer $j > 1$ tem-se:

$$C_{\mu_1}(x_1, \dots, x_n) = x_{(1)} = \max(x_1, \dots, x_n).$$

Exemplo 2.7. Seja $x = (0.7, 0.2, 0.6)$. Qual a integral de Choquet com relação a medida fuzzy uniforme $\mu_U = \frac{|A|}{n}$?

Para responder a essa pergunta, primeiramente devemos ordenar de maneira crescente as entradas $x_{(i)} = (0.2, 0.6, 0.7)$.

Em seguida, usando a definição da integral de Choquet tem-se:

$$\begin{aligned}
 C_\mu(x) &= \sum_{i=1}^3 [x_{(i)} - x_{(i-1)}] \mu_U(A_i) \\
 &= [x_{(1)} - x_{(0)}] \mu_U(A_1) + [x_{(2)} - x_{(1)}] \mu_U(A_2) + [x_{(3)} - x_{(2)}] \mu_U(A_3) \\
 &= (0.2 - 0) \frac{3}{3} + (0.6 - 0.2) \frac{2}{3} + (0.7 - 0.6) \frac{1}{3} \\
 &= (0.2) \frac{3}{3} + (0.4) \frac{2}{3} + (0.1) \frac{1}{3} \\
 &= \frac{1.8}{3} + \frac{0.8}{3} + \frac{0.1}{3} \\
 &= \frac{2.7}{3} \\
 &= 0.9.
 \end{aligned}$$

Assim, a integral de Choquet em relação a medida uniforme é $C_\mu(x) = 0.9$.

2.1.4 Operador Mistura

O operador mistura também faz parte da classe tipo média, ele faz uso de funções de ponderação, como pode ser vista na definição apresentada a seguir, porém esses pesos são dinâmicos, o que diferencia das funções OWA. Segundo (FARIAS, 2018), essa dinamicidade possibilita um melhor ajuste dos pesos, uma vez que para cada entrada pode-se realizar uma escolha mais adequada para pesos que serão associados a elas, possibilitando que esses pesos sejam atribuídos às entradas durante a execução dos algoritmos, o que não ocorre no caso das OWAs.

As funções mistura é uma generalização do operador OWA, mas ela pode não ser um operador de agregação, pois a condição de monotonicidade pode não ser satisfeita e assim algumas proposições que garantam essa condição serão apresentadas, já que nosso objetivo é que ela seja um operador de agregação. Em seguida tem-se a definição desse operador.

Definição 2.14. Sejam $w_1, \dots, w_n : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ funções denominadas funções de peso. A função $MIX_{w_1, \dots, w_n} : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ definida por:

$$MIX_{w_1, \dots, w_n}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\sum_{i=1}^n w_i(x_i)x_i}{\sum_{i=1}^n w_i(x_i)}$$

é denominada função mistura associada às funções de peso w_1, \dots, w_n .

Um contraexemplo de função mistura que não satisfaz a propriedade da monotonicidade é apresentado no exemplo abaixo:

Contra-Exemplo 2.1. Defina $w_i(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{se } x_i = 0 \\ x_i, & \text{caso contrário} \end{cases}$

No caso em que $n = 3$ tem-se:

$$MIX_{w_1, w_2, w_3}(x, y, z) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y = z \\ \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x + y + z}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Sendo as entradas $(x_1, x_2, x_3) = (0.5, 0.2, 0.1)$ e $(x_1, x_2, x_3) = (0.5, 0.2, 0.2)$.

$$MIX_{w_1, w_2, w_3}(0.5, 0.2, 0.1) = \frac{0.5^2 + 0.2^2 + 0.1^2}{0.5 + 0.2 + 0.1} = 0.375$$

$$MIX_{w_1, w_2, w_3}(0.5, 0.2, 0.2) = \frac{0.5^2 + 0.2^2 + 0.2^2}{0.5 + 0.2 + 0.2} = 0.367$$

Como $MIX_{w_1, w_2, w_3}(0.5, 0.2, 0.1) \geq MIX_{w_1, w_2, w_3}(0.5, 0.2, 0.2)$, então esta função não satisfaz a propriedade da monotonicidade, e portanto não é uma função de agregação.

Mediante a isso, existem proposições que garantem a condição de monotonicidade para esse operador, algumas delas estão apresentadas a seguir.

Proposição 2.2. (PEREIRA et al., 2003) Se para todo $i \in 1, \dots, n$ tem-se que w_i é diferenciável, monotônica e $w'_i(t) \leq w_i(t)$, para todo $t \in [0, 1]$, então MIX_{w_1, \dots, w_n} satisfaz a propriedade da monotonicidade, ou seja, MIX_{w_1, \dots, w_n} é um operador de agregação.

Proposição 2.3. (MESIAR et al., 2006) Se uma função $w(x)$ satisfaz $w(x) \geq w'(x)(1 - x)$ para todo $x \in [0, 1]$, então MIX_{w_1, \dots, w_n} satisfaz a condição de monotonicidade sendo assim é um operador de agregação.

Proposição 2.4. (MESIAR et al., 2006) Seja $w(x)$ uma função de ponderação de modo que para um $n \in N$ fixo, $n > 1$, satisfaz a condição $\frac{w^2(x)}{(n-1)w(1)} + w(x) \geq w'(x)(1 - x)$, $x \in [0, 1]$, então a MIX_{w_1, \dots, w_n} satisfaz a propriedade de monotonicidade, ou seja, é um operador de agregação.

Assim, segue um exemplo de função mistura, onde se provou que ela é um operador de agregação, utilizando uma das proposições acima.

Exemplo 2.8. *Seja a função peso definida por $w_i(x_i) = x_i + 1$.*

Usando a definição da função mistura, será obtido a MIX associada à função peso, como pode ser observado abaixo.

$$\begin{aligned} MIX_{w_1, \dots, w_n}(x_1, \dots, x_n) &= \frac{\sum_{i=1}^n w_i(x_i)x_i}{\sum_{i=1}^n w_i(x_i)} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i + 1)x_i}{\sum_{i=1}^n x_i + 1} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 + x_i}{\sum_{i=1}^n x_i + 1}. \end{aligned}$$

Considerando as condições necessárias que garantem que uma função é de agregação, podemos afirmar que essa MIX é uma função de agregação, isso é comprovado abaixo:

- Condições de fronteira

$$MIX_{w_1, \dots, w_n}(0, \dots, 0) = \frac{\sum_{i=1}^n (0^2 + 0) + \dots + (0^2 + 0)}{\sum_{i=1}^n (0 + 1) + \dots + (0 + 1)} = 0.$$

$$MIX_{w_1, \dots, w_n}(1, \dots, 1) = \frac{\sum_{i=1}^n (1^2 + 1) + \dots + (1^2 + 1)}{\sum_{i=1}^n (1 + 1) + \dots + (1 + 1)} = \frac{\sum_{i=1}^n (2) + \dots + (2)}{\sum_{i=1}^n (2) + \dots + (2)} = 1.$$

- Monotonicidade

Como w_i é uma função polinomial, então ela é diferenciável e monotônica. Além disso, podemos perceber que $w'_i(X) = 1 \leq w_i(X)$ para todo $X \in [0, 1]$. Assim pela Proposição 2.2 w_i satisfaz a condição de monotonicidade.

Prosseguindo no mesmo exemplo, serão considerados agora $n = 3$ e as entradas $(x_1, x_2, x_3) = (0.5, 0.2, 0.1)$, $(x_1, x_2, x_3) = (0.5, 0.2, 0.2)$ e $(x_1, x_2, x_3) = (0.5, 0.22, 0.2)$.

Substituindo os valores das entradas na MIX, obtemos os seguintes valores de saída.

$$MIX_{w_1, w_2, w_3}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\sum_{i=1}^3 x_i^2 + x_i}{\sum_{i=1}^3 x_i + 1}$$

$$MIX_{w_1, w_2, w_3}(0.5, 0.2, 0.1) = \frac{(0.5^2 + 0.5) + (0.2^2 + 0.2) + (0.1^2 + 0.2)}{(0.5 + 1) + (0.2 + 1) + (0.1 + 1)} = 0.289$$

$$MIX_{w_1, w_2, w_3}(0.5, 0.2, 0.2) = \frac{(0.5^2 + 0.5) + (0.2^2 + 0.2) + (0.2^2 + 0.2)}{(0.5 + 1) + (0.2 + 1) + (0.2 + 1)} = 0.315$$

$$MIX_{w_1, w_2, w_3}(0.5, 0.22, 0.2) = \frac{(0.5^2 + 0.5) + (0.22^2 + 0.22) + (0.2^2 + 0.2)}{(0.5 + 1) + (0.22 + 1) + (0.2 + 1)} = 0.320$$

Assim, nesses exemplos podemos perceber que a condição de monotonicidade foi satisfeita para a função MIX e as entradas utilizadas.

2.2 Fusão de Dados

Fusão de dados é o processo que combina múltiplas fontes de dados para conseguir inferências mais específicas, quando comparado a uma fonte fornecida por qualquer fonte de dado individual. Essas fontes podem produzir dados de diferentes precisões, frequências, resoluções, extensões, formas, além disso, podem ser das mais variadas áreas de aplicações (HALL et al., 2001). No processo de fusão as informações podem ser captadas de um determinado ambiente, como podemos observar na Figura 1, mas elas podem estar contaminadas por ruídos e isso pode afetar adversamente o desempenho do estimador, como isso métodos são utilizados para minimizar tais erros de medições, a seguir será apresentado o método muito eficaz na minimização de erros que é o método dos mínimos quadrados.

Ainda sobre fusão de dados, um belo exemplo de realização de fusão pode ser observada nos seres humanos, quando se há combinação dos sentidos da visão, paladar, olfato e tato, o que resulta em uma base eficiente para realizações de atividades diárias. O fato de saborear, cheirar e tocar em determinado alimento para saber se é comestível ou até mesmo se está estragado realiza-se uma fusão pelos os três sentidos, tato, paladar e olfato, essa combinação resultará em uma maior eficácia sobre o estado do alimento. Igualmente acontece quando contamos com a capacidade da visão e da audição, para realização das atividades diárias, evitando os perigos que podem acontecer durante a realização de tarefas. Em todos estes casos, o cérebro realiza o processamento de fusão e controla o que precisamos fazer em seguida.

2.3 Método dos Mínimos Quadrados Regularizados (MMQR)

Nesta seção serão apresentados os métodos dos mínimos quadrados não regularizados e regularizados, no qual será criado um lastro de compreensão para a introdução dos métodos num cenário de fusão de dados.

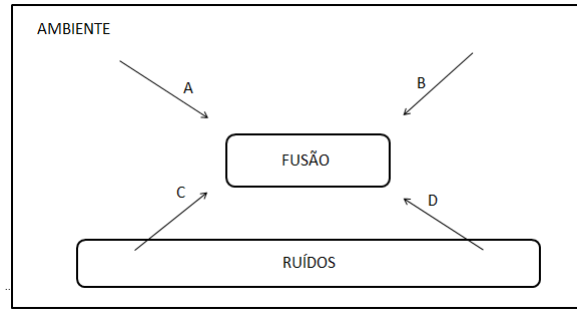


Figura 1 – Fusão de Dados. Fonte: Elaborada Pela Autora.

2.3.1 Método dos Mínimos Quadrados Não Regularizados

O método dos mínimos quadrados é um método de otimização amplamente conhecido e utilizado para a solução de diversos problemas (estimação de parâmetros de estados, problemas de controle, entre outros), sendo uma boa ferramenta para estimação por ser baseado na derivação do erro quadrático. Ele minimiza o quadrado do vetor do resíduo, e assim procura encontrar uma solução ótima para o problema (KAILATH, et al., 2000), uma explicação mais detalhada será apresentada a seguir.

Considerando um sistema linear da forma

$$b \cong Ax,$$

com $b \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ conhecido e $x \in \mathbb{R}^m$. Esse sistema é inconsistente, isto é, não tem solução. Para que ele tenha solução, basta acrescentar um resíduo v , ou seja,

$$b = Ax + v.$$

O método dos mínimos quadrados será utilizado como uma potencial ferramenta que irá minimizar a influência desse resíduo, mas especificamente, ele minimiza o quadrado do vetor de resíduo v , assim,

$$\min_x \|v\|^2.$$

Isto é,

$$\min_x \|Ax - b\|^2.$$

Com isso o funcional custo proposto é

$$J(x) = \|Ax - b\|^2.$$

Para obter um valor ótimo de x que minimize o resíduo é preciso solucionar o seguinte problema,

$$\hat{x} = \min_x \|Ax - b\|^2. \quad (2.1)$$

Uma solução ótima desse problema satisfaz a desigualdade presente na definição a seguir, isto é, considerando situações reais o ótimo obtido será considerado uma solução mínima quadrática.

Definição 2.15. Uma solução mínima quadrática \hat{x} , é uma solução com a seguinte propriedade

$$\|A\hat{x} - b\|^2 \leq \|Ax - b\|^2$$

No lema a seguir é apresentada a solução ótima do problema 2.1.

Lema 2.1. Um vetor \hat{x} é um minimizador de $\|Ax - b\|^2$ se, e somente se, ela satisfaz a chamada equação normal

$$A^T A \hat{x} = A^T b.$$

Demonstração. O custo $J(x)$ é dado por

$$\begin{aligned} J(x) &= \|Ax - b\|^2 \\ &= (Ax - b)^T (Ax - b) \\ &= ((Ax)^T - b^T)(Ax - b) \\ &= (x^T A^T - b^T)(Ax - b) \\ &= x^T A^T Ax - x^T A^T b - b^T Ax + b^T b \end{aligned}$$

Derivando em relação a x e igualando a zero tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial x}(x) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}(x^T A^T Ax - x^T A^T b - b^T Ax + b^T b) &= 0 \\ x^T A^T A - b^T A &= 0 \\ x^T A^T A &= b^T A \end{aligned}$$

Elevando ambos os membros ao transposto

$$\begin{aligned} (x^T A^T A)^T &= (b^T A)^T \\ x A^T A &= b A^T. \end{aligned}$$

Obs: Se a matriz A tiver posto coluna completo, então $A^T A$ é invertível, logo

$$\hat{x} = [A^T A]^{-1} A^T b.$$

Sendo assim é encontrado a solução ótima do problema 2.1. ■

2.3.2 Método dos Mínimos Quadrados Regularizados

Os mínimos quadrados regularizados funcionam de maneira equivalente ao método não regularizado da subseção anterior, porém aqui constam os termos de regularização e ponderação. Neste caso o funcional custo é dado por

$$J(x) = \|x\|_Q^2 + \|Ax - b\|_W^2,$$

com $Q = Q^T > 0$ (definido positivo) e $W = W^T \geq 0$ (semi-definido), (KAILATH, et al., 2000).

Para obter um valor ótimo de x que minimize o resíduo é preciso solucionar o problema de otimização,

$$\hat{x} = \underset{x}{\min} \left[\|x\|_Q^2 + \|Ax - b\|_W^2 \right]. \quad (2.2)$$

E uma solução para esse problema precisa satisfazer a definição a seguir.

Definição 2.16. Uma solução mínima quadrática \hat{x} , é uma solução com a seguinte propriedade

$$\|A\hat{x} - b\|_W^2 \leq \|Ax - b\|_W^2.$$

No lema que segue é apresentada essa solução.

Lema 2.2. A solução ótima do problema 2.2 é dado por

$$\hat{x} = [Q + A^T W A]^{-1} [A^T W b],$$

onde $\{Q, W\}$ são as matrizes de ponderação do termo de regularização $\|x\|_Q^2$ e do resíduo v , respectivamente, com $Q = Q^T > 0$ e $W = W^T \geq 0$.

Demonstração. O custo $J(x)$ é dado por

$$\begin{aligned} J(x) &= \|x\|_Q^2 + \|Ax - b\|_W^2 \\ &= x^T Q x + [(Ax - b)^T W (Ax - b)] \\ &= x^T Q x + [((Ax)^T - b^T)(W Ax - W b)] \\ &= x^T Q x + [(x^T A^T - b^T)(W Ax - W b)] \\ &= x^T Q x + (x^T A^T W Ax - x^T A^T W b - b^T W Ax + b^T W b) \end{aligned}$$

Derivando em relação a x e igualando a zero tem-se:

$$\frac{\partial J}{\partial x}(x) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (x^T Q x + (x^T A^T W Ax - x^T A^T W b - b^T W Ax + b^T W b)) = 0$$

$$\begin{aligned}
x^T Q + x^T A^T W A - b^T W A &= 0 \\
x^T Q + x^T A^T W A &= b^T W A \\
x^T (Q + A^T W A) &= b^T W A
\end{aligned}$$

Elevando ambos os membros ao transposto

$$\begin{aligned}
[x^T (Q + (A^T W) A)]^T &= [(b^T W) A]^T \\
[(Q + (A^T W) A)]^T [x^T]^T &= A^T [b^T W]^T \\
[Q + (A)^T (A^T W)^T] x &= A^T [W (b^T)^T] \\
[Q + (A)^T (W (A^T)^T)] x &= [A^T W b] \\
[Q + A^T W A] x &= [A^T W b]
\end{aligned}$$

O \hat{x} -ótimo do problema 2.2 é:

$$\hat{x} = [Q + A^T W A]^{-1} [A^T W b].$$

■

2.4 MMQR num cenário de fusão de dados

Nesta seção serão apresentadas as formulações dos métodos dos mínimos quadrados regularizados num cenário de fusão de dados ponderada e probabilística, ambas para o caso nominal, proposta por (SAYED et al., 2000), sendo o caso ponderado o ponto de partida para a criação dos novos métodos dos mínimos quadrados apresentados nos capítulos subsequentes.

2.4.1 MMQR num cenário de fusão de dados ponderados

Na fusão de dados ponderada os mínimos quadrados trabalham de forma semelhante ao caso do sistema linear mostrado anteriormente, porém nesta fusão usam-se modelos de medidas. O método dos mínimos quadrados regularizados com fusão de dados ponderada desenvolvida por (SAYED et al., 2000) faz uso do operador média aritmética ponderada. Além disso, essa fusão de dados utiliza a variância dos ruídos dos modelos de medida como ponderação das várias medidas envolvidas no problema de estimação. Considere o seguinte modelo de medida:

$$b_k = A_k x + v_k, \quad k = 1, \dots, L, \quad (2.3)$$

sendo, $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ um vetor desconhecido, $A_k \in \mathbb{R}^{N \times n}$ é um parâmetro conhecido, $b_k \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ são vetores de medida e $v_k \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ são os ruídos de medida. Essa descrição corresponde a uma situação em que várias medições, (b_1, b_2, \dots, b_L) , de um mesmo vetor x surgem de fontes diferentes, como mostra a Figura 2.

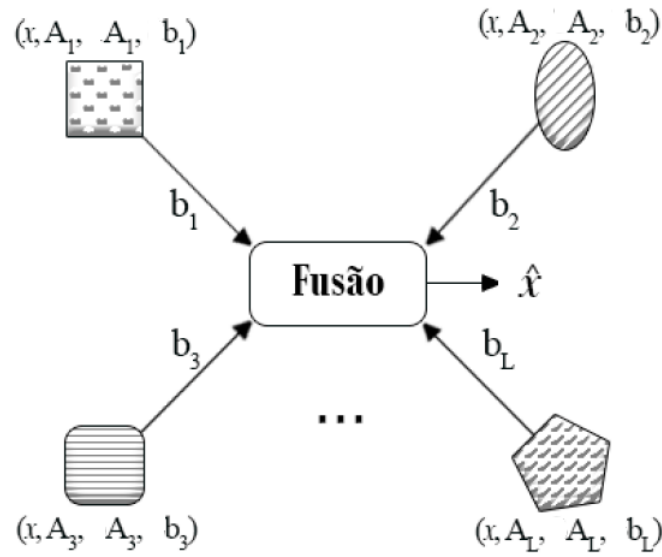


Figura 2 – Fusão Ponderada. Fonte: Sayed, 2000.

Assim, o método do mínimo quadrado regularizado irá minimizar o quadrado do vetor de resíduo, onde o funcional do custo quadrático $J(x)$, é definido como:

$$J(x) = \left[\|x\|_Q^2 + \sum_{k=1}^L \|A_k x - b_k\|_{W_k}^2 \right],$$

com $Q = Q^T > 0$ (definido positivo) e $W_k = W_k^T \geq 0$ (semi-definido).

Para obter o valor ótimo de x que minimiza o funcional $J(x)$, é preciso solucionar o seguinte problema de otimização,

$$\hat{x} = \underset{x}{\operatorname{argmin}} \left[\|x\|_Q^2 + \sum_{k=1}^L \|A_k x - b_k\|_{W_k}^2 \right]. \quad (2.4)$$

Com isso, uma solução que minimize esse funcional faz uso da seguinte definição.

Definição 2.17. Uma solução mínima quadrática regularizada, \hat{x} , é uma solução que satisfaça a seguinte propriedade

$$\|\hat{x}\|_Q^2 + \sum_{k=1}^L \|A_k \hat{x} - b_k\|_{W_k}^2 \leq \|x\|_Q^2 + \sum_{k=1}^L \|A_k x - b_k\|_{W_k}^2.$$

A solução do problema 2.4 é apresentada no lema a seguir e sua demonstração é semelhante a do Lema 2.2.

Lema 2.3. (SAYED et al., 2000) A solução ótima do problema 2.4 é dado por:

$$\hat{x} = \left[Q + \sum_{k=1}^L A_k^T W_k A_k \right]^{-1} \left[\sum_{k=1}^L A_k^T W_k b_k \right],$$

onde $\{Q, W_k\}$ são matrizes de ponderação do termo de regularização $\|x\|_Q^2$ e do ruído v_k , respectivamente, com $Q = Q^T > 0$ e $W_k = W_k^T \geq 0$.

Demonstração. O custo $J(x)$ é dado por

$$\begin{aligned} J(x) &= \|x\|_Q^2 + \sum_{k=1}^L \|A_k x - b_k\|_{W_k}^2 \\ &= x^T Q x + \sum_{k=1}^L \left[(A_k x - b_k)^T W_k (A_k x - b_k) \right] \\ &= x^T Q x + \sum_{k=1}^L \left[((A_k x)^T - b_k^T) (W_k A_k x - W_k b_k) \right] \\ &= x^T Q x + \sum_{k=1}^L \left[(x^T A_k^T - b_k^T) (W_k A_k x - W_k b_k) \right] \\ &= x^T Q x + \sum_{k=1}^L \left[x^T A_k^T W_k A_k x - x^T A_k^T W_k b_k - b_k^T W_k A_k x + b_k^T W_k b_k \right] \end{aligned}$$

Derivando em relação a x e igualando a zero tem-se:

$$\frac{\partial J}{\partial x}(x) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(x^T Q x + \sum_{k=1}^L [x^T A_k^T W_k A_k x - x^T A_k^T W_k b_k - b_k^T W_k A_k x + b_k^T W_k b_k] \right) = 0$$

$$x^T Q + \sum_{k=1}^L [x^T A_k^T W_k A_k - b_k^T W_k A_k] = 0$$

$$x^T Q + \sum_{k=1}^L x^T A_k^T W_k A_k - \sum_{k=1}^L b_k^T W_k A_k = 0$$

$$x^T Q + x^T \sum_{k=1}^L A_k^T W_k A_k = \sum_{k=1}^L b_k^T W_k A_k$$

$$x^T \left(Q + \sum_{k=1}^L A_k^T W_k A_k \right) = \sum_{k=1}^L b_k^T W_k A_k$$

Elevando ao transposto ambos os lados da igualdade tem-se,

$$\begin{aligned} \left[x^T \left(Q + \sum_{k=1}^L (A_k^T W_k) A_k \right) \right]^T &= \left[\sum_{k=1}^L (b_k^T W_k) A_k \right]^T \\ \left[Q + \sum_{k=1}^L (A_k^T W_k) A_k \right]^T [x^T]^T &= \left[\sum_{k=1}^L A_k^T (b_k^T W_k)^T \right] \\ \left[Q + \sum_{k=1}^L A_k^T (A_k^T W_k)^T \right] x &= \left[\sum_{k=1}^L A_k^T (W_k (b_k^T)^T) \right] \\ \left[Q + \sum_{k=1}^L A_k^T (W_k (A_k^T)^T) \right] x &= \left[\sum_{k=1}^L A_k^T W_k b_k \right] \\ \left[Q + \sum_{k=1}^L A_k^T W_k A_k \right] x &= \left[\sum_{k=1}^L A_k^T W_k b_k \right] \end{aligned}$$

Portanto, o valor ótimo é:

$$\hat{x} = \left[Q + \sum_{k=1}^L A_k^T W_k A_k \right]^{-1} \left[\sum_{k=1}^L A_k^T W_k b_k \right].$$

■

2.4.2 MMQR num cenário de fusão de dados probabilística

Será apresentada nessa subseção a técnica MMQR com fusão de dados probabilística presente em (SAYED et al., 2000), que consiste na utilização de um único modelo de medida, esta por sua vez é escolhida dentre as outras. Essa seleção se dá pela cadeia de Markov, com distribuição de probabilidade π_k . Isso é favorável em casos em que é necessário escolher quais dos modelos de medidas disponíveis devem possuir maior intervenção sobre as outras, dando uma probabilidade para cada um destes serem utilizados. Para desenvolver a ideia da fusão de dados probabilística, considere o modelo a seguir:

$$b = A_{\Theta_i} x + v, \quad \Theta_i = k, \quad k = 1, \dots, L, \quad i = 1, \dots, N,$$

sendo $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ um vetor desconhecido, $A_{\Theta_i} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é um parâmetro conhecido do problema, escolhido dentre as matrizes $A_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$, por uma cadeia de Markov $\Theta_i = k$ variante no tempo $i = 1, \dots, N$ e com distribuição de probabilidade π_k , onde $k = 1, \dots, L$, $b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ é o vetor de medida formado pelos diversos modelos de medida e $v \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ é o resíduo da medida. O processo da fusão probabilística é ilustrado na Figura 3.

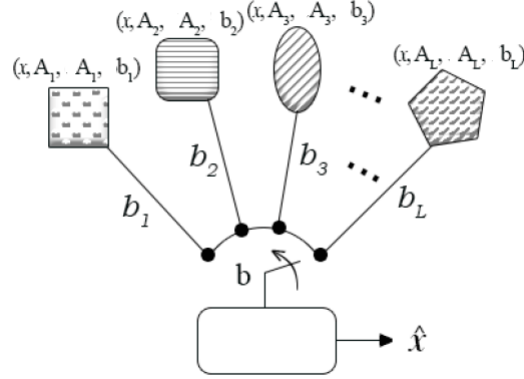


Figura 3 – Fusão Probabilística. Fonte: Sayed, 2000.

Assim, o funcional do custo quadrático $J(x)$, é definido como:

$$J(x) = \left[\|x\|_Q^2 + \sum_{k=1}^L \|A_k x - b\|_{I_{\pi_k}}^2 \right],$$

com $Q = Q^T > 0$ (definido positivo) e $I_{\pi_k} = I_{\pi_k}^T \geq 0$ (semi-definido).

Conforme (SAYED et al., 2000) o problema de otimização dos mínimos quadrados regularizados num cenário de fusão de dados probabilística nominal, é dado por

$$\hat{x} = \underset{x}{\operatorname{argmin}} \left[\|x\|_Q^2 + \sum_{k=1}^L \|A_k x - b\|_{I_{\pi_k}}^2 \right]. \quad (2.5)$$

A solução do problema 2.5 é apresentado no lema a seguir.

Lema 2.4. (SAYED et al., 2000) A solução ótima do problema 2.5 é dado por:

$$\hat{x} = \left[Q + \sum_{k=1}^L A_k I_{\pi_k} A_k \right]^{-1} \left[\sum_{k=1}^L A_k^T I_{\pi_k} b \right].$$

onde $\{Q, I_{\pi_k}\}$ são matrizes de ponderação do termo de regularização $\|x\|_Q^2$ e do resíduo v , respectivamente, com $Q = Q^T > 0$ e $I_{\pi_k} = I_{\pi_k}^T \geq 0$, sendo esta ultima uma matriz identidade cuja dimensão é a distribuição de probabilidade π_k .

3 Método dos Mínimos Quadrados num Cenário de Fusão de Dados via Operador OWA

Neste capítulo será desenvolvido o método dos mínimos quadrados regularizados num cenário de fusão de dados baseado no operador de agregação OWA. Aqui constará uma nova proposta do método dos mínimos quadrados baseado no método apresentado por (SAYED et al., 2000), sendo este visto no capítulo 2.

O método clássico dos mínimos quadrados regularizados com fusão de dados ponderada desenvolvida por (SAYED et al., 2000) usa a média aritmética ponderada na fusão, já o novo método aqui desenvolvido utiliza o operador de agregação OWA no processo da fusão de dados. Esse operador permite que, no método, algumas de suas matrizes sejam ordenadas de forma decrescente, isso acontece em razão da própria definição da OWA, onde suas entradas usam ordenação decrescente e, além disso, os pesos podem ser crescentes ou decrescentes quanto à ordem.

Vale ressaltar novamente a definição da OWA onde segue que

$$OWA_w(x) = \sum_{k=1}^L w_k x_{(k)},$$

com $x_{(k)}$ vetores de entradas ordenados em ordem decrescentes e $\sum_{k=1}^L w_k = 1$ os pesos.

Considere o modelo de medida abaixo,

$$b_{(k)} = A_{(k)}x + v_{(k)}, \quad k = 1, \dots, L, \quad (3.1)$$

sendo, $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ um vetor desconhecido, $A_{(k)} \in \mathbb{R}^{N \times n}$ é um parâmetro conhecido, $b_{(k)} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ são vetores de medida e $v_{(k)} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ são os resíduos de medida.

Assim, o problema dos mínimos quadrados regularizados num cenário de fusão de dados ponderado via operador OWA é definido da seguinte maneira:

$$J(x) = \left[\|x\|_Q^2 + \sum_{k=1}^L \|v_{(k)}\|_{W_k}^2 \right]$$

onde $J(x)$ é o funcional custo de 3.1, com $Q = Q^T > 0$ (definido positivo) e $W_k = W_k^T \geq 0$ (semi-definido).

Com isso, o valor ótimo de x que minimiza o funcional é obtido por meio da solução do seguinte problema de otimização:

$$\hat{x} = \underset{x}{\operatorname{argmin}} \left[\|x\|_Q^2 + \sum_{k=1}^L \|A_{(k)}x - b_{(k)}\|_{W_k}^2 \right]. \quad (3.2)$$

Antes de apresentar a solução do problema 3.2 é válido destacar a diferença entre o método desenvolvido por (SAYED et al., 2000) para o novo usando a OWA. Para esse método $A_{(k)}$ e $b_{(k)}$ são matrizes de ordenação decrescente e W_k matrizes com $\sum_{k=1}^L W_k = 1$. Além disso, essa última matriz de ponderação também pode ser ter ordenação crescente ou decrescente. Já no método clássico as matrizes A_k e b_k são fixas e a W_k é semi-definida, isto é, maior ou igual à zero.

A solução do problema de otimização que será apresentada tem que satisfazer a definição a seguir, mais especificamente, o \hat{x} —ótimo encontrado satisfará a condição de desigualdade. Isso para situações envolvendo casos reais, onde a parte real é o segundo membro da desigualdade, e se assim for satisfeita, a solução é tida como mínima quadrática.

Definição 3.1. Uma solução mínima quadrática ponderada, \hat{x} , é uma solução com a seguinte propriedade:

$$\|\hat{x}\|_Q^2 + \sum_{k=1}^L \|A_{(k)}\hat{x} - b_{(k)}\|_{W_k}^2 \leq \|x\|_Q^2 + \sum_{k=1}^L \|A_k x - b_k\|_{W_k}^2.$$

Portanto, a solução ótima de 3.2 é dada pelo lema a seguir e sua demonstração é semelhante ao Lema 2.3.

Lema 3.1. A solução ótima do problema de otimização 3.2 é dado por:

$$\hat{x} = \left[Q + \sum_{k=1}^L A_{(k)}^T W_k A_{(k)} \right]^{-1} \left[\sum_{k=1}^L A_{(k)}^T W_k b_{(k)} \right]$$

onde $\{Q, W_k\}$ são as matrizes de ponderação do termo de regularização $\|\hat{x}\|_Q^2$ e do resíduo $v_{(k)}$, com $Q = Q^T > 0$ e $W_k = W_k^T \geq 0$.

Demonstração. Para o funcional custo $J(x)$ proposto tem-se:

$$\begin{aligned} J(x) &= \left[\|x\|_Q^2 + \sum_{k=1}^L \|v_k\|_{W_k}^2 \right] \\ &= \left[\|x\|_Q^2 + \sum_{k=1}^L \|A_{(k)}x - b_{(k)}\|_{W_k}^2 \right] \\ &= x^T Q x + \sum_{k=1}^L (A_{(k)}x - b_{(k)})^T W_k (A_{(k)}x - b_{(k)}) \end{aligned}$$

$$= x^T Q x + \sum_{k=1}^L [x^T A_{(k)}^T W_k A_{(k)} x - x^T A_{(k)}^T W_k b_{(k)} - b_{(k)}^T W_k A_{(k)} x + b_{(k)}^T W_k b_{(k)}]$$

Derivando em relação a x e igualando a zero tem-se:

$$\frac{\partial J}{\partial x}(x) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (x^T Q x + \sum_{k=1}^L [x^T A_{(k)}^T W_k A_{(k)} x - x^T A_{(k)}^T W_k b_{(k)} - b_{(k)}^T W_k A_{(k)} x + b_{(k)}^T W_k b_{(k)}]) = 0$$

$$x^T Q + \sum_{k=1}^L [x^T A_{(k)}^T W_k A_{(k)} - b_{(k)}^T W_k A_{(k)}] = 0$$

$$x^T Q + x^T \sum_{k=1}^L A_{(k)}^T W_k A_{(k)} - \sum_{k=1}^L b_{(k)}^T W_k A_{(k)} = 0$$

$$x^T Q + x^T \sum_{k=1}^L A_{(k)}^T W_k A_{(k)} = \sum_{k=1}^L b_{(k)}^T W_k A_{(k)}$$

$$x^T (Q + \sum_{k=1}^L A_{(k)}^T W_k A_{(k)}) = \sum_{k=1}^L b_{(k)}^T W_k A_{(k)}$$

Fazendo a elevação de ambos os membros ao transposto obtém-se:

$$\left[x^T (Q + \sum_{k=1}^L A_{(k)}^T W_k A_{(k)}) \right]^T = \left[\sum_{k=1}^L b_{(k)}^T W_k A_{(k)} \right]^T$$

$$\left[Q + \sum_{k=1}^L A_{(k)}^T W_k A_{(k)} \right] x = \left[\sum_{k=1}^L A_{(k)}^T W_k b_{(k)} \right].$$

Portanto, o valor \hat{x} -ótimo obtido que minimiza o problema de otimização é:

$$\hat{x} = \left[Q + \sum_{k=1}^L A_{(k)}^T W_k A_{(k)} \right]^{-1} \left[\sum_{k=1}^L A_{(k)}^T W_k b_{(k)} \right]$$

■

Como as matrizes nesse método precisam ser ordenadas, a proposição a seguir irá mostrar como será feita a comparação desses parâmetros, identificando quais deles são maiores ou menores.

Proposição 3.1. Dado um espaço das matrizes $n \times m$ com entradas reais $M_{n \times m}(\mathbb{R})$, afirmamos que a relação

$$A \leq B \text{ se, e somente se, } a_{ij} \leq b_{ij} \forall i \forall j$$

determina uma relação de ordem sobre $M_{n \times m}(\mathbb{R})$.

Com efeito:

Demonstração.

- Reflexividade;

$\forall i \forall j a_{ij} \leq b_{ij}$ e portanto $A \leq A$.

- Antissimetria;

Suponhamos que $A \leq B$ e $B \leq A$. Então $\forall i \forall j$ temos que $a_{ij} \leq b_{ij}$ e $b_{ij} \leq a_{ij}$. Portanto, $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i, j e daí, $A = B$.

- Transitividade;

Agora suponhamos que $A \leq B$ e $B \leq C$. Assim, $\forall i \forall j$ temos que $a_{ij} \leq b_{ij}$ e $b_{ij} \leq c_{ij}$ e consequentemente $a_{ij} \leq c_{ij}$. Logo, $A \leq C$.

■

Além disso, nota-se também que a soma de todas as matrizes de ponderação é igual a um, isto é, $\sum_{k=1}^L \|W_k\| = 1$. Com isso, primeiro precisa-se saber o valor de cada matriz para assim efetuar a soma. A definição a seguir permitirá obter esse valor individual de cada uma.

Definição 3.2. Seja $A = [a_{ij}]_{r \times s}$ uma matriz $r \times s$. A norma 1 da matriz A , denotado por $\|A\|_1$, é o número não negativo

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq s} \sum_{i=1}^r |a_{ij}|.$$

A seguir, constam alguns exemplos onde serão aplicadas matrizes ao valor ótimo do MMQR via OWA, no qual haverá uma exploração desse método, já que o mesmo garante o ordenamento de seus parâmetros. Por fim, serão aplicados também exemplos ao método clássico de (SAYED et al., 2000).

Em todos os exemplos as somas das W_k é igual a um, e nos dois primeiros as matrizes A_1 e A_2 são de (SAYED et al., 2000), porém com um pequeno ajuste no sinal de dois elementos das mesmas, para satisfazer o ordenamento.

Exemplo 3.1. Considerando as matrizes dada abaixo, com $k = 2$ e W_k em ordem crescente, o valor ótimo obtido será:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} -0.32 & -0.76 \\ 0.08 & 0.024 \end{bmatrix}; b_1 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.4 \end{bmatrix}; b_2 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \end{bmatrix};$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}; W_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix} \text{ e } W_2 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Primeiramente será feito o ordenamento dos parâmetros A_1 , A_2 , b_1 e b_2 de forma decrescente, usando a proposição 3.1 segue que

- $A_{(2)} \leq A_{(1)}$, pois $(-0.32) \leq 0.1$; $(-0.76) \leq 0.5$; $0.08 \leq 0.2$ e $0.024 \leq 0.1$. Logo, a ordem decrescente é $\{A_{(1)}, A_{(2)}\}$.
- $b_{(2)} \leq b_{(1)}$, pois $0.1 \leq 0.2$ e $0.3 \leq 0.4$. Logo, a ordem decrescente é $\{b_{(1)}, b_{(2)}\}$.
- Como estamos considerando W_k em ordem crescente então $W_1 \leq W_2$, pois $0.2 \leq 0.6$; $0 \leq 0$ e $0.4 \leq 0.5$. Logo, a ordem crescente é $\{W_1, W_2\}$.

Agora, usando definição 3.2 será mostrado que a soma das W_k é igual a um.

- $\|W_1\| = \max\{|0.2| + |0|, |0| + |0.4|\} = \max\{0.2, 0.4\} = 0.4$.
- $\|W_2\| = \max\{|0.6| + |0|, |0| + |0.5|\} = \max\{0.6, 0.5\} = 0.6$.

Assim, $\|W_1\| + \|W_2\| = 0.4 + 0.6 = 1.0$.

Para obter o valor ótimo, todas as matrizes serão aplicadas na solução ótima do MMQR via operador OWA, obedecendo às condições de ordenação, como segue abaixo,

$$\hat{x} = \left[Q + \sum_{k=1}^L A_{(k)}^T W_k A_{(k)} \right]^{-1} \left[\sum_{k=1}^L A_{(k)}^T W_k b_{(k)} \right],$$

$$\hat{x} = \left[Q + A_{(1)}^T W_1 A_{(1)} + A_{(2)}^T W_2 A_{(2)} \right]^{-1} \left[A_{(1)}^T W_1 b_{(1)} + A_{(2)}^T W_2 b_{(2)} \right]$$

Assim, a solução ótima é:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} -0.1338644 \\ 0.135404 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 3.2. Considerando as mesmas matrizes do Exemplo 3.1, porém W_k com ordenamento decrescente, o valor ótimo será:

Do Exemplo 3.1 tem-se o ordenamento das matrizes A_k e b_k que são:

- $\{A_{(1)}, A_{(2)}\}$.

- $\{b_{(1)}, b_{(2)}\}$.

As matrizes de ponderação W_k nesse caso tem ordem $\{W_2, W_1\}$, pois já sabemos do Exemplo 3.1 quem é a maior e a menor.

Assim, realizando as aplicações no \hat{x} -ótimo abaixo seguindo a ordenação necessária,

$$\hat{x} = [Q + A_{(1)}^T W_2 A_{(1)} + A_{(2)}^T W_1 A_{(2)}]^{-1} [A_{(1)}^T W_2 b_{(1)} + A_{(2)}^T W_1 b_{(2)}],$$

a solução ótima é:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} -0.1055128 \\ 0.2518222 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 3.3. Considere agora $k = 3$, W_k em ordem crescente e as seguintes matrizes.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} -0.32 & -0.76 \\ 0.08 & 0.024 \end{bmatrix}; A_3 = \begin{bmatrix} -0.41 & -0.80 \\ 0.06 & 0.013 \end{bmatrix};$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}; W_2 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}; W_3 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.4 \end{bmatrix}; b_2 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \end{bmatrix}; b_3 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.6 \end{bmatrix} \text{ e } Q = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

Novamente as matrizes A_k e b_k precisam ser permutadas em ordem decrescente, com W_k crescente, usando a proposição 3.1 obtem-se,

- $\{A_{(1)}, A_{(2)}, A_{(3)}\}$, pois $A_{(3)} \leq A_{(2)} \leq A_{(1)}$;
- $\{b_{(3)}, b_{(1)}, b_{(2)}\}$, pois $b_{(2)} \leq b_{(1)} \leq b_{(3)}$
- $\{W_1, W_2, W_3\}$, pois $W_1 \leq W_2 \leq W_3$;

Fazendo as aplicações das matrizes respeitando o ordenamento no \hat{x} -ótimo abaixo,

$$\hat{x} = [Q + A_{(1)}^T W_1 A_{(1)} + A_{(2)}^T W_2 A_{(2)} + A_{(3)}^T W_3 A_{(3)}]^{-1} [A_{(1)}^T W_1 b_{(3)} + A_{(2)}^T W_2 b_{(1)} + A_{(3)}^T W_3 b_{(2)}],$$

a solução ótima é:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} -0.1590967 \\ 0.1133368 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 3.4. Considerando as mesmas matrizes do Exemplo 3.3 e com W_k decrescentes, o valor ótimo será:

Já foi visto no Exemplo 3.3 a ordenação das matrizes A_k e b_k que são:

- $\{A_{(1)}, A_{(2)}, A_{(3)}\}$
- $\{b_{(3)}, b_{(1)}, b_{(2)}\}$.

As matrizes de ponderação W_k nesse caso tem ordem $\{W_3, W_2, W_1\}$, pois já sabemos do Exemplo 3.3 quem é a maior e a menor matriz.

Assim, fazendo as aplicações das matrizes no \hat{x} ótimo abaixo,

$$\hat{x} = [Q + A_{(1)}^T W_3 A_{(1)} + A_{(2)}^T W_2 A_{(2)} + A_{(3)}^T W_1 A_{(3)}]^{-1} [A_{(1)}^T W_3 b_{(3)} + A_{(2)}^T W_2 b_{(1)} + A_{(3)}^T W_1 b_{(2)}],$$

a solução ótima é:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} -0.1905801 \\ 0.441727 \end{bmatrix}.$$

Agora serão aplicados o método clássico de (SAYED et al., 2000), nos dois últimos exemplos que segue, sendo eles os mesmos usado anteriormente no método da OWA. Neles as matrizes A_k , b_k e W_k são usadas de forma sequencial, isto é, não precisa de ordenação, como pode ser observado abaixo:

Exemplo 3.5. Considerando as matrizes do Exemplo 3.1, o valor ótimo obtido será:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} -0.32 & -0.76 \\ 0.08 & 0.024 \end{bmatrix}; b_1 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.4 \end{bmatrix}; b_2 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \end{bmatrix};$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}; W_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix} \text{ e } W_2 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Para obter o valor ótimo todas as matrizes serão aplicadas na solução ótima do MMQR via operador clássico de (SAYED et al., 2000).

$$\hat{x} = [Q + A_1^T W_1 A_1 + A_2^T W_2 A_2]^{-1} [A_1^T W_1 b_1 + A_2^T W_2 b_2]$$

Assim, a solução ótima é:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} -0.1338644 \\ 0.135404 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 3.6. Considerando as matrizes do Exemplo 3.3, o valor ótimo será.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} -0.32 & -0.76 \\ 0.08 & 0.024 \end{bmatrix}; A_3 = \begin{bmatrix} -0.41 & -0.80 \\ 0.06 & 0.013 \end{bmatrix};$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}; W_2 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}; W_3 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.4 \end{bmatrix}; b_2 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \end{bmatrix}; b_3 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.6 \end{bmatrix} \text{ e } Q = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

Assim como no Exemplo 3.5 as matrizes se comportam na forma sequencial e daí segue que,

$$\hat{x} = \left[Q + A_1^T W_1 A_1 + A_2^T W_2 A_2 + A_3^T W_3 A_3 \right]^{-1} * \left[A_1^T W_1 b_1 + A_2^T W_2 b_2 + A_3^T W_3 b_3 \right].$$

Assim, o \hat{x} -ótimo do método clássico é:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} -0.2492461 \\ 0.0230349 \end{bmatrix}.$$

Nota-se que o método clássico do Exemplo 3.5 recaiu no método da OWA do Exemplo 3.1, isso é devido à forma de ordenação de W_k , A_k e b_k dado na OWA, os parâmetros A_k e b_k são crescentes e no Exemplo 3.1 os pesos são ordenados também de maneira crescente e é essa ordem usada pelo método clássico. Sendo assim, tem-se que o \hat{x} -ótimo da OWA e do método clássico são iguais nesses exemplos.

Para finalizar dois algoritmos será apresentado, um para método dos mínimos quadrados via operador OWA e outro para o método clássico de (SAYED et al., 2000):

- Algoritmo do MMQR via operados OWA

$$\text{Passo 1: Entrar com os parâmetros } \begin{cases} A_1, \dots, A_n \\ b_1, \dots, b_n \\ W_1, \dots, W_n \\ Q \end{cases}$$

$$\text{Passo 2: Permutar as matrizes } A_k \text{ e } b_k \text{ em ordenação decrescente } \begin{cases} A_{(1)}, \dots, A_{(n)} \\ b_{(1)}, \dots, b_{(n)} \end{cases}$$

Passo 3: Calcular o \hat{x}

$$\hat{x} = \left[Q + \sum_{k=1}^L A_{(k)}^T W_k A_{(k)} \right]^{-1} \left[\sum_{k=1}^L A_{(k)}^T W_k b_{(k)} \right].$$

- Algoritmo *MMQR* clássico.

Passo 1: Entrar com os parâmetros

$$\begin{cases} A_1, \dots, A_n \\ b_1, \dots, b_n \\ W_1, \dots, W_n \\ Q \end{cases}$$

Passo 2: Calcular o \hat{x}

$$\hat{x} = \left[Q + \sum_{k=1}^L A_k^T W_k A_k \right]^{-1} \left[\sum_{k=1}^L A_k^T W_k b_k \right].$$

4 Método dos Mínimos Quadrados num Cenário de Fusão de Dados via Integral de Choquet

Neste capítulo será desenvolvido o método dos mínimos quadrados regularizados num cenário de fusão de dados baseado no operador de agregação da integral de Choquet. Assim como no capítulo 2 sobre a OWA, o desenvolvimento desse novo método se baseará também no método clássico de (SAYED, et al., 2000). Esse novo método, aqui desenvolvido, permite que suas matrizes sejam permutadas de forma crescente, e, além disso, ocorre subtração entre elas, sendo uma matriz permutada crescente pela matriz anterior.

Os métodos anteriores, o clássico e o da OWA, utilizam matrizes de ponderação na realização da fusão, o que não acontece nesse de Choquet, para este caso uma medida fuzzy é empregada ao invés de matrizes de ponderação, essas medidas podem ser observadas no capítulo 2. É importante também destacar outra diferença entre esses métodos, a qual se refere às permutações das matrizes, em Choquet utilizam permutações crescentes, enquanto na OWA decrescente.

Considere o modelo de medida abaixo

$$b_{(k)} = A_{(k)}x + v_{(k)} \quad (4.1)$$

sendo, $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ um vetor desconhecido, $A_{(k)} \in \mathbb{R}^{N \times n}$ é um parâmetro conhecido, $b_{(k)} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ são vetores de medida e $v_{(k)} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ são os resíduos de medida.

Assim, o problema dos mínimos quadrados regularizados num cenário de fusão de dados ponderado via operador da integral de Choquet é dado da seguinte forma:

$$J(x) = \left[\|x\|_Q^2 + \sum_{k=1}^n \|v_{(k)} - v_{(k-1)}\|^2 I\mu(G_k) \right],$$

sendo $J(x)$ o funcional custo quadrático da medida 4.1, com $\mu(G_k)$ a medida difusa, $Q = Q^T > 0$ (definido positivo), $I\mu(G_k) = (I\mu(G_k))^T \geq 0$ (semi-definido) e I matriz identidade, cuja a mesma é usada para transformar a medida difusa em uma matriz.

Para obter o valor ótimo de x que minimize o funcional $J(x)$, é preciso solucionar o seguinte problema de otimização, isto é,

$$\hat{x} = \underset{x}{\operatorname{argmin}} \left[\|x\|_Q^2 + \sum_{k=1}^n \|(A_{(k)}x - b_{(k)}) - (A_{(k-1)}x - b_{(k-1)})\|^2 I\mu(G_k) \right]. \quad (4.2)$$

Para isso, a solução é dada como mínima quadrática se satisfazer a definição a seguir.

Definição 4.1. Uma solução mínima quadrática ponderada, \hat{x} , é uma solução com a seguinte propriedade

$$\begin{aligned} \|\hat{x}\|_Q^2 + \sum_{k=1}^n \|(A_{(k)}\hat{x} - b_{(k)}) - (A_{(k-1)}\hat{x} - b_{(k-1)})\|^2 I\mu(G_k) &\leq \\ \|x\|_Q^2 + \sum_{k=1}^n \|(A_{(k)}x - b_{(k)}) - (A_{(k-1)}x - b_{(k-1)})\|^2 I\mu(G_k). & \end{aligned}$$

Portanto, a solução ótima do problema 4.2 é dada pelo lema a seguir e sua demonstração é semelhante ao Lema 2.3.

Lema 4.1. A solução ótima do problema de otimização é dado por:

$$\begin{aligned} \hat{x} = & \left[Q + \sum_{k=1}^n (A_{(k)} - A_{(k-1)})^T I\mu(G_k) (A_{(k)} - A_{(k-1)}) \right]^{-1} * \\ & \left[\sum_{k=1}^n (A_{(k)} - A_{(k-1)})^T I\mu(G_k) (b_{(k)} - b_{(k-1)}) \right] \end{aligned}$$

onde Q é a matriz de ponderação do termo de regularização $\|x\|_Q^2$, com $Q = Q^T > 0$, $I\mu(G_k) = (I\mu(G_k))^T \geq 0$ e $G_k = [k, k+1, \dots, n]$.

Demonstração. O funcional custo é dado por:

$$\begin{aligned} J(x) &= \|x\|_Q^2 + \sum_{k=1}^n \|v_{(k)} - v_{(k-1)}\|^2 I\mu(G_k) \\ &= x^T Q x + \sum_{k=1}^n \left[(v_{(k)} - v_{(k-1)})^T I\mu(G_k) (v_{(k)} - v_{(k-1)}) \right] \\ &= x^T Q x + \sum_{k=1}^n \left[\left[(A_{(k)}x - b_{(k)}) - (A_{(k-1)}x - b_{(k-1)}) \right]^T I\mu(G_k) \right. \\ &\quad \left. \left[(A_{(k)}x - b_{(k)}) - (A_{(k-1)}x - b_{(k-1)}) \right] \right] \\ &= x^T Q x + \sum_{k=1}^n \left[\left[(A_{(k)} - A_{(k-1)})x - (b_{(k)} - b_{(k-1)}) \right]^T I\mu(G_k) \right. \\ &\quad \left. \left[(A_{(k)} - A_{(k-1)})x - (b_{(k)} - b_{(k-1)}) \right] \right] \\ &= x^T Q x + \sum_{k=1}^n \left[\left[x^T (A_{(k)} - A_{(k-1)})^T - (b_{(k)} - b_{(k-1)})^T \right] I\mu(G_k) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[(A_{(k)} - A_{(k-1)})x - (b_{(k)} - b_{(k-1)}) \right] \\
 &= x^T Q x + \sum_{k=1}^n \left[\left[x^T (A_{(k)} - A_{(k-1)})^T - (b_{(k)} - b_{(k-1)})^T \right] \right. \\
 & \quad \left. \left[I\mu(G_k)(A_{(k)} - A_{(k-1)})x - I\mu(G_k)(b_{(k)} - b_{(k-1)}) \right] \right] \\
 &= x^T Q x + \sum_{k=1}^n \left[x^T (A_{(k)} - A_{(k-1)})^T I\mu(G_k)(A_{(k)} - A_{(k-1)})x - \right. \\
 & \quad x^T (A_{(k)} - A_{(k-1)})^T I\mu(G_k)(b_{(k)} - b_{(k-1)}) - (b_{(k)} - b_{(k-1)})^T I\mu(G_k)(A_{(k)} - \\
 & \quad \left. A_{(k-1)})x + (b_{(k)} - b_{(k-1)})^T I\mu(G_k)(b_{(k)} - b_{(k-1)}) \right]
 \end{aligned}$$

Derivando em relação a x e igualando a zero obtém-se:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial J}{\partial x}(x) = 0 \\
 & \frac{\partial}{\partial x} \left(x^T Q x + \sum_{k=1}^n \left[x^T (A_{(k)} - A_{(k-1)})^T I\mu(G_k)(A_{(k)} - A_{(k-1)})x - x^T (A_{(k)} - A_{(k-1)})^T \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. I\mu(G_k)(b_{(k)} - b_{(k-1)}) - (b_{(k)} - b_{(k-1)})^T I\mu(G_k)(A_{(k)} - A_{(k-1)})x + (b_{(k)} - b_{(k-1)})^T I\mu(G_k)(b_{(k)} - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. b_{(k-1)}) \right] \right) = 0
 \end{aligned}$$

$$x^T Q + \sum_{k=1}^n \left[x^T (A_{(k)} - A_{(k-1)})^T I\mu(G_k)(A_{(k)} - A_{(k-1)}) - \right.$$

$$\left. (b_{(k)} - b_{(k-1)})^T I\mu(G_k)(A_{(k)} - A_{(k-1)}) \right] = 0$$

$$x^T Q + x^T \sum_{k=1}^n (A_{(k)} - A_{(k-1)})^T I\mu(G_k)(A_{(k)} - A_{(k-1)}) =$$

$$\sum_{k=1}^n (b_{(k)} - b_{(k-1)})^T I\mu(G_k)(A_{(k)} - A_{(k-1)})$$

$$x^T \left[Q + \sum_{k=1}^n (A_{(k)} - A_{(k-1)})^T I\mu(G_k)(A_{(k)} - A_{(k-1)}) \right] =$$

$$\sum_{k=1}^n (b_{(k)} - b_{(k-1)})^T I\mu(G_k)(A_{(k)} - A_{(k-1)})$$

Elevando ao transposto temos

$$\begin{aligned} & \left[x^T \left[Q + \sum_{k=1}^n (A_{(k)} - A_{(k-1)})^T I \mu(G_k) (A_{(k)} - A_{(k-1)}) \right] \right]^T = \\ & \left[\sum_{k=1}^n (b_{(k)} - b_{(k-1)})^T I \mu(G_k) (A_{(k)} - A_{(k-1)}) \right]^T \\ & \left[Q + \sum_{k=1}^n (A_{(k)} - A_{(k-1)})^T I \mu(G_k) (A_{(k)} - A_{(k-1)}) \right] x = \\ & \left[\sum_{k=1}^n (A_{(k)} - A_{(k-1)})^T I \mu(G_k) (b_{(k)} - b_{(k-1)}) \right] \end{aligned}$$

Assim, o \hat{x} -ótimo é:

$$\hat{x} = \left[Q + \sum_{k=1}^n (A_{(k)} - A_{(k-1)})^T I \mu(G_k) (A_{(k)} - A_{(k-1)}) \right]^{-1} * \left[\sum_{k=1}^n (A_{(k)} - A_{(k-1)})^T I \mu(G_k) (b_{(k)} - b_{(k-1)}) \right]$$

■

A seguir, dois exemplos serão apresentados, onde matrizes serão aplicadas ao valor ótimo do MMQR num cenário de fusão de dados via operador da integral de Choquet.

Para esses exemplos é utilizada a medida fuzzy uniforme conforme vista no Exemplo 2.5 e algumas matrizes vista no Capítulo 3.

Exemplo 4.1. Considere as matrizes abaixo, onde $k = 2$ e a medida fuzzy uniforme $\mu(G_k) = \frac{|G|}{n}$.

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; A_1 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} -0.32 & -0.76 \\ 0.08 & 0.024 \end{bmatrix}; b_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.4 \end{bmatrix}; b_2 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \end{bmatrix}; Q = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} \quad e \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

Primeiro será feito o cálculo da medida uniforme, como pode ser visto abaixo:

- $\mu(G_1) = \frac{|2|}{2} = 1.$
- $\mu(G_2) = \frac{|1|}{2} = 0.5.$

Sendo obtidas as medidas uniformes, agora precisa-se ordenar as matrizes A_k e b_k de forma crescente, usando a proposição 3.1 segue que:

- $A_{(0)} \leq A_{(2)} \leq A_{(1)}$, pois $0 \leq (-0.32) \leq 0.1; 0 \leq (-0.76) \leq 0.5; 0 \leq 0.08 \leq 0.2$ e $0 \leq 0.024 \leq 0.1.$

A ordem crescente das A_k é: $\{A_{(0)}, A_{(2)}, A_{(1)}\}.$

- $b_{(0)} \leq b_{(2)} \leq b_{(1)}$, pois $0 \leq 0.1 \leq 0.2$ e $0 \leq 0.3 \leq 0.4.$

A ordem crescente das b_k é: $\{b_{(0)}, b_{(2)}, b_{(1)}\}.$

Para obter o valor ótimo, todas as matrizes juntamente com a medida fuzzy uniforme, serão aplicadas na solução ótima do MMQR via operador da integral de Choquet, obedecendo às condições de ordenação, como segue abaixo,

$$\hat{x} = \left[Q + \sum_{k=1}^n (A_{(k)} - A_{(k-1)})^T I\mu(G_k)(A_{(k)} - A_{(k-1)}) \right]^{-1} * \left[\sum_{k=1}^n (A_{(k)} - A_{(k-1)})^T I\mu(G_k)(b_{(k)} - b_{(k-1)}) \right]$$

$$\hat{x} = \left[Q + (A_{(2)} - A_{(0)})^T I\mu(G_1)(A_{(2)} - A_{(0)}) + (A_{(1)} - A_{(2)})^T I\mu(G_2)(A_{(1)} - A_{(2)}) \right]^{-1} * \left[(A_{(2)} - A_{(0)})^T I\mu(G_1)(b_{(2)} - b_{(0)}) + (A_{(1)} - A_{(2)})^T I\mu(G_2)(b_{(1)} - b_{(2)}) \right],$$

Assim, a solução ótima é:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} -0.1303731 \\ 0.122372 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 4.2. Considere as matrizes abaixo, onde $k = 3$ e a mesma medida fuzzy uniforme $\mu(G_k) = \frac{|G|}{n}$ do Exemplo 4.1, o valor ótimo será:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; A_1 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} -0.32 & -0.76 \\ 0.08 & 0.024 \end{bmatrix};$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -0.41 & -0.80 \\ 0.06 & 0.013 \end{bmatrix}; b_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; b_1 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.4 \end{bmatrix}; b_2 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \end{bmatrix};$$

$$b_3 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.6 \end{bmatrix}; Q = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} \text{ e } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

Primeiro será feito o cálculo da medida uniforme, como pode ser visto abaixo:

- $\mu(G_1) = \frac{|3|}{3} = 1.$
- $\mu(G_2) = \frac{|2|}{3} = 0.66$
- $\mu(G_3) = \frac{|1|}{3} = 0.33$

Sendo obtida as medidas uniforme, agora precisa-se ordenar as matrizes A_k e b_k de forma crescente, usando a proposição 3.1 segue que

- $A_{(0)} \leq A_{(3)} \leq A_{(2)} \leq A_{(1)}$, pois $0 \leq (-0.41) \leq (-0.32) \leq 0.1; 0 \leq (-0.80) \leq (-0.76) \leq 0.5; 0 \leq 0.06 \leq 0.08 \leq 0.2$ e $0 \leq 0.013 \leq 0.024 \leq 0.1.$

A ordem crescente das A_k é: $\{A_{(0)}, A_{(3)}, A_{(2)}, A_{(1)}\}.$

- $b_{(0)} \leq b_{(2)} \leq b_{(1)} \leq b_{(3)}$, pois $0 \leq 0.1 \leq 0.2 \leq 0.5$ e $0 \leq 0.3 \leq 0.4 \leq 0.6 .$

A ordem crescente das b_k é: $\{b_{(0)}, b_{(2)}, b_{(1)}, b_{(3)}\}.$

Para obter o valor ótimo todas as matrizes, juntamente com a medida fuzzy uniforme, serão aplicadas na solução ótima do método dos mínimos quadrados via operador da integral de Choquet, obedecendo às condições de ordenação, como segue abaixo,

$$\hat{x} = \left[Q + (A_{(3)} - A_{(0)})^T I \mu(G_1) (A_{(3)} - A_{(0)}) + (A_{(2)} - A_{(3)})^T I \mu(G_2) (A_{(2)} - A_{(3)}) + \right. \\ \left. (A_{(1)} - A_{(2)})^T I \mu(G_3) (A_{(1)} - A_{(2)})^{-1} \left[(A_{(3)} - A_{(0)})^T I \mu(G_1) (b_{(2)} - b_{(0)}) + \right. \right. \\ \left. \left. (A_{(2)} - A_{(3)})^T I \mu(G_2) (b_{(1)} - b_{(2)}) + A_{(1)} - A_{(2)} \right]^T I \mu(G_3) (b_{(3)} - b_{(1)}) \right],$$

Assim, a solução ótima é:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} -0.1228279 \\ 0.1454066 \end{bmatrix}.$$

Por fim, será apresentado um algoritmo do método em questão.

- Algoritmo do MMQR via operador de Choquet

$$\text{Passo 1: Entrar com os parâmetros } \begin{cases} A_1, \dots, A_n \\ b_1, \dots, b_n \\ W_1, \dots, W_n \\ Q \end{cases}$$

$$\text{Passo 2: Permutar as matrizes } A_k \text{ e } b_k \text{ em ordenação crescente } \begin{cases} A_{(1)}, \dots, A_{(n)} \\ b_{(1)}, \dots, b_{(n)} \end{cases}$$

Passo 3: Calcular as medidas fuzzy $\mu(G_k)$ sendo $G_k = \{k, k+1, \dots, n\}$.

Passo 4: Calcular o \hat{x} -ótimo.

$$\hat{x} = \left[Q + \sum_{k=1}^n (A_{(k)} - A_{(k-1)})^T I \mu(G_k) (A_{(k)} - A_{(k-1)}) \right]^{-1} * \left[\sum_{k=1}^n (A_{(k)} - A_{(k-1)})^T I \mu(G_k) (b_{(k)} - b_{(k-1)}) \right].$$

5 Método dos Mínimos Quadrados num Cenário de Fusão de Dados via Operador Mistura Adaptada

Neste capítulo será desenvolvido o método dos mínimos quadrados regularizados num cenário de fusão de dados ponderados, baseado no operador de agregação mistura. Para o método em questão, também foi tomado como base para a sua construção, o método clássico de (SAYED, et al., 2000).

Para o desenvolvimento desse método primeiro foi necessário uma mudança no comportamento dos pesos do operador mistura. Foi visto no capítulo 2, através da definição, que esses pesos são funções que dependem das entradas, e esse requisito impossibilitou encontrar uma solução ótima para o problema de otimização via operador mistura, pois ao desenvolver a demonstração do Lema 5.1 a dependência de x permanecia em W_k após o uso da derivada parcial.

Como forma de solucionar esse problema uma nova maneira de calcular o operador *MIX* é considerado. As funções pesos antes tida como dinâmicas, após serem calculadas passam a serem funções fixas (estáticas). Assim, primeiro será calculado os pesos fixando-os para em seguida realizar a agregação, isto é, realizar os cálculos finais entre pesos já fixados e as entradas, e daí obterá o valor da *MIX* adaptada.

Para validar esse novo padrão de comportamento do operador mistura discursado acima, um algoritmo é exibido abaixo.

Para calcular a função mistura adaptada foi proposto o seguinte algoritmo:

Passo 1: Calcular as funções peso $W_i(x_i)$, fixando-as em seguida, com $i = 1, \dots, n$.

$$W_1(x_1) := W_1$$

$$W_2(x_2) := W_2$$

$$\vdots$$

$$W_n(x_n) := W_n$$

Passo 2: Multiplicar cada W_i fixado pelo x_i correspondente e realizar os cálculos

necessário onde obterá o MIX .

$$MIX_{W_1, \dots, W_n}(x_1, \dots, x_n) = \frac{W_1 x_1 + W_2 x_2 + \dots + W_n x_n}{W_1 + W_2 + \dots + W_n} = \frac{\sum_{i=1}^n W_i x_i}{\sum_{i=1}^n W_i}.$$

Para facilitar o entendimento do processo descrito no algoritmo apresenta-se o Exemplo 5.1.

Exemplo 5.1. Considerando o exemplo já visto no capítulo 2, onde $W_i(x_i) = x_i + 1$ e as entradas $(x_1, x_2, x_3) = (0.5, 0.2, 0.1)$, a MIX será:

Seguindo os passos apresentados na proposição tem-se:

Passo 1

$$W_1(x_1) = 0.5 + 1 = 1.5$$

$$W_2(x_2) = 0.2 + 1 = 1.2$$

$$W_3(x_3) = 0.1 + 1 = 1.1$$

Passo 2

$$\begin{aligned} MIX_{W_1, W_2, W_3}(0.5, 0.2, 0.1) &= \frac{1.5 * 0.5 + 1.2 * 0.2 + 1.1 * 0.1}{1.5 + 1.2 + 1.1} \\ &= \frac{0.75 + 0.24 + 0.11}{1.5 + 1.2 + 1.1} \\ &= \frac{1.1}{3.8} \\ &= 0.289. \end{aligned}$$

Agora que a nova maneira de calcular o operador mistura foi exibida, pode-se apresentar o método dos mínimos quadrados regularizado num cenário de fusão de dados via operador de agregação mistura adaptada, usando a formulação dos pesos fixados, conforme pode ser visto a seguir:

Considere o modelo de medidas abaixo

$$b_k = A_k x + v_k, \quad k = 1, \dots, L. \quad (5.1)$$

sendo, $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ um vetor desconhecido, $A_{(k)} \in \mathbb{R}^{N \times n}$ é um parâmetro conhecido, $b_{(k)}, \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ são vetores de medida e $v_{(k)}, \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ são os ruídos de medida.

O problema dos mínimos quadrados regularizados num cenário de fusão de dados ponderado via operador mistura adaptada, pode ser definido da seguinte maneira:

$$J(x) = \|x\|_Q^2 + \frac{\sum_{k=1}^n \|v_k\|_{W_k}^2}{\sum_{k=1}^n \|W_k\|^2},$$

onde $J(x)$ é o custo da medida 5.1, com $Q = Q^T > 0$ (definido positivo) e $W_k = W_k^T \geq 0$ (semi-definido).

Assim, para obter o valor ótimo que minimiza o funcional $J(x)$, é preciso solucionar o seguinte problema de otimização, isto é,

$$\hat{x} = \underset{x}{\operatorname{argmin}} \left[\|x\|_Q^2 + \frac{\sum_{k=1}^n \|(A_k x - b_k)\|_{W_k}^2}{\sum_{k=1}^n \|W_k\|^2} \right]. \quad (5.2)$$

Uma solução que minimize o problema de otimização faz uso da seguinte definição.

Definição 5.1. Uma solução mínima quadrática ponderada, \hat{x} , é uma solução com a seguinte propriedade

$$\|\hat{x}\|_Q^2 + \frac{\sum_{k=1}^n \|(A_k \hat{x} - b_k)\|_{W_k}^2}{\sum_{k=1}^n \|W_k\|^2} \leq \|x\|_Q^2 + \frac{\sum_{k=1}^n \|(A_k x - b_k)\|_{W_k}^2}{\sum_{k=1}^n \|W_k\|^2}.$$

Portanto, a solução ótima do problema 5.2 é dada pelo lema a seguir e sua demonstração é semelhante ao Lema 2.3.

Lema 5.1. A solução ótima do problema de otimização é dado por:

$$\hat{x} = \left[Q + \frac{\sum_{k=1}^n (A_k^T W_k A_k)}{\sum_{k=1}^n \|W_k\|^2} \right]^{-1} \left[\frac{\sum_{k=1}^n (A_k^T W_k b_k)}{\sum_{k=1}^n \|W_k\|^2} \right]$$

onde Q é a matriz de ponderação do termo de regularização $\|x\|_Q^2$ e W_k ponderações do resíduo v_k , com $Q = Q^T > 0$ e $W_k = W_k^T \geq 0$.

Demonstração. O funcional custo é dado por:

$$\begin{aligned} J(x) &= \|x\|_Q^2 + \frac{\sum_{k=1}^n \|v_k\|_{W_k}^2}{\sum_{k=1}^n \|W_k\|^2} \\ &= \|x\|_Q^2 + \frac{\sum_{k=1}^n \|(A_k x - b_k)\|_{W_k}^2}{\sum_{k=1}^n \|W_k\|^2} \\ &= x^T Q x + \frac{\sum_{k=1}^n (A_k x - b_k)^T W_k (A_k x - b_k)}{\sum_{k=1}^n \|W_k\|^2} \\ &= x^T Q x + \frac{\sum_{k=1}^n (x^T A_k^T - b_k^T) (W_k A_k x - W_k b_k)}{\sum_{k=1}^n \|W_k\|^2} \\ &= x^T Q x + \frac{1}{\sum_{k=1}^n \|W_k\|^2} \sum_{k=1}^n (x^T A_k^T W_k A_k x - x^T A_k^T W_k b_k - b_k^T W_k A_k x + b_k^T W_k b_k) \end{aligned}$$

Derivando em relação a x , e igualando se a zero temos:

$$\frac{\partial J}{\partial x}(x) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^T Q x + \frac{1}{\sum_{k=1}^n \|W_k\|^2} \sum_{k=1}^n (x^T A_k^T W_k A_k x - x^T A_k^T W_k b_k - b_k^T W_k A_k x + b_k^T W_k b_k)) = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^T Q x) + \frac{1}{\sum_{k=1}^n \|W_k\|^2} \frac{\partial}{\partial x}(\sum_{k=1}^n (x^T A_k^T W_k A_k x - x^T A_k^T W_k b_k - b_k^T W_k A_k x + b_k^T W_k b_k)) = 0.$$

$$x^T Q + \frac{1}{\sum_{k=1}^n \|W_k\|^2} \sum_{k=1}^n (x^T A_k^T W_k A_k - b_k^T W_k A_k) = 0.$$

$$x^T Q + \frac{1}{\sum_{k=1}^n \|W_k\|^2} x^T \sum_{k=1}^n (A_k^T W_k A_k) = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \|W_k\|^2} \sum_{k=1}^n (b_k^T W_k A_k)$$

$$x^T \left(Q + \frac{1}{\sum_{k=1}^n \|W_k\|^2} \sum_{k=1}^n (A_k^T W_k A_k) \right) = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \|W_k\|^2} \sum_{k=1}^n (b_k^T W_k A_k)$$

Elevando ambos os membros ao transposto, obtém-se:

$$\left[x^T \left(Q + \frac{1}{\sum_{k=1}^n \|W_k\|^2} \sum_{k=1}^n (A_k^T W_k A_k) \right) \right]^T = \left[\frac{1}{\sum_{k=1}^n \|W_k\|^2} \sum_{k=1}^n (b_k^T W_k A_k) \right]^T$$

$$\left[Q + \frac{1}{\sum_{k=1}^n \|W_k\|^2} \sum_{k=1}^n (A_k^T W_k A_k) \right] x = \left[\frac{1}{\sum_{k=1}^n \|W_k\|^2} \sum_{k=1}^n (A_k^T W_k b_k) \right]$$

$$\left[Q + \frac{\sum_{k=1}^n (A_k^T W_k A_k)}{\sum_{k=1}^n \|W_k\|^2} \right] x = \left[\frac{\sum_{k=1}^n (A_k^T W_k b_k)}{\sum_{k=1}^n \|W_k\|^2} \right]$$

Com isso o \hat{x} é:

$$\hat{x} = \left[Q + \frac{\sum_{k=1}^n (A_k^T W_k A_k)}{\sum_{k=1}^n \|W_k\|^2} \right]^{-1} \left[\frac{\sum_{k=1}^n (A_k^T W_k b_k)}{\sum_{k=1}^n \|W_k\|^2} \right]$$

■

Pode-se observar que as ponderações W_k nos denominadores estão no espaço normados, para que essas matrizes se transformem em escalares. Dessa forma exhibe-se a definição da norma induzida sobre matrizes, a qual será utilizada nos exemplos seguintes.

Definição 5.2. Seja $A = [a_{ij}]_{r \times s}$ uma matriz $r \times s$. A norma matricial induzida de A , é denotado por

$$\|A\| = \sqrt{\rho(A^T A)},$$

onde $\rho(A) = \max_{i=1, \dots, n} |\lambda_i(A)|$, e $\lambda_i(A)$ os próprios valores de A .

A seguir, apresentam-se alguns exemplos onde serão aplicadas matrizes ao valor ótimo do método dos mínimos quadrados regularizados via operador mistura adaptada. As matrizes utilizadas são mesmas usadas no capítulo 3.

Exemplo 5.2. Considerando $k = 2$ e as seguintes matrizes, o valor ótimo encontrado será:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} -0.32 & -0.76 \\ 0.08 & 0.024 \end{bmatrix}; b_1 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.4 \end{bmatrix}; b_2 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \end{bmatrix};$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}; W_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix} \text{ e } W_2 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Inicialmente serão encontrados os valores das $\|W_k\|^2$ usando a definição 5.2 da norma matricial induzida para matrizes.

Assim,

$$\|W_1\|^2 = \rho(W_1^T * W_1) = \rho\left(\begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix}\right) = \rho\begin{bmatrix} 0.04 & 0 \\ 0 & 0.16 \end{bmatrix} = 0.16$$

$$\|W_2\|^2 = \rho(W_2^T * W_2) = \rho\left(\begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}\right) = \rho\begin{bmatrix} 0.36 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix} = 0.36$$

Logo, $\|W_1\|^2 + \|W_2\|^2 = 0.16 + 0.36 = 0.52$.

Como é considerados $k = 2$ teremos que:

$$\hat{x} = \left[Q + \frac{(A_1^T W_1 A_1 + A_2^T W_2 A_2)}{\|W_1\|^2 + \|W_2\|^2} \right]^{-1} \left[\frac{(A_1^T W_1 b_1 + A_2^T W_2 b_2)}{\|W_1\|^2 + \|W_2\|^2} \right]$$

Sendo assim, o valor ótimo quando aplicado as matrizes na solução ótima do método dos mínimos quadrados via operador mistura adaptada é:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} -0.3606511 \\ 0.3259367 \end{bmatrix}$$

Exemplo 5.3. Considerando agora $k = 3$, e as seguintes matrizes abaixo, o valor ótimo obtido será:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} -0.32 & -0.76 \\ 0.08 & 0.024 \end{bmatrix}; A_3 = \begin{bmatrix} -0.41 & -0.80 \\ 0.06 & 0.013 \end{bmatrix};$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}; W_2 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}; W_3 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.4 \end{bmatrix}; b_2 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \end{bmatrix}; b_3 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.6 \end{bmatrix} \text{ e } Q = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

Usando a Definição 5.2 os W_k será:

$$\|W_1\|^2 = \rho(W_1^T * W_1) = \rho\left(\begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}\right) = \rho\begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.04 \end{bmatrix} = 0.04$$

$$\|W_2\|^2 = \rho(W_2^T * W_2) = \rho\left(\begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}\right) = \rho\begin{bmatrix} 0.09 & 0 \\ 0 & 0.04 \end{bmatrix} = 0.09$$

$$\|W_3\|^2 = \rho(W_3^T * W_3) = \rho\left(\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}\right) = \rho\begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0.09 \end{bmatrix} = 0.25$$

$$\text{Assim, } \|W_1\|^2 + \|W_2\|^2 + \|W_3\|^2 = 0.04 + 0.09 + 0.25 = 0.38.$$

Nesse exemplo é considerado $k = 3$, e a representação ótima é dada por:

$$\hat{x} = \left[Q + \frac{(A_1^T W_1 A_1 + A_2^T W_2 A_2 + A_3^T W_3 A_3)}{\|W_1\|^2 + \|W_2\|^2 + \|W_3\|^2} \right]^{-1} \left[\frac{(A_1^T W_1 b_1 + A_2^T W_2 b_2 + A_3^T W_3 b_3)}{\|W_1\|^2 + \|W_2\|^2 + \|W_3\|^2} \right]$$

Realizando as aplicações das matrizes na solução ótima do MMQR via operador mistura adaptada, o valor ótimo obtido é:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} -0.6854674 \\ 0.2307007 \end{bmatrix}$$

Para finalizar o capítulo, consta a seguir um algoritmo desse método desenvolvido via operador mistura adaptada.

- Algoritmo do MMQR via operador mistura adaptada

$$\text{Passo 1: Entrar com os parâmetros } \begin{cases} A_1, \dots, A_n \\ b_1, \dots, b_n \\ W_1, \dots, W_n \\ Q \end{cases}$$

Passo 2: Calcular os denominadores: $\|W_1\|^2 + \dots + \|W_n\|^2$

Passo 3: Calcular o \hat{x}

$$\hat{x} = \left[Q + \frac{\sum_{k=1}^n (A_k^T W_k A_k)}{\sum_{k=1}^n \|W_k\|^2} \right]^{-1} \left[\frac{\sum_{k=1}^n (A_k^T W_k b_k)}{\sum_{k=1}^n \|W_k\|^2} \right]$$

6 Resultados

Nesse capítulo serão apresentados os resultados obtidos no desenvolvimento dos capítulos 3, 4 e 5 dessa dissertação, além disso, será feita uma comparação dos métodos utilizando a definição de desigualdade presente em cada capítulo anterior.

A seguir foram analisados os exemplos numéricos apresentados no capítulo 3, os quais foram aplicados parâmetros e obtido o \hat{x} -ótimo do método dos mínimos quadrados regularizados num cenário de fusão de dados ponderada via operador OWA. Nos dois últimos exemplos do capítulo, usou-se o método clássico de (SAYED, et al., 2000).

Inicialmente foi substituído no primeiro membro da desigualdade, da Definição 3.1 os valores ótimos, dos exemplos (3.1, 3.2, 3.3 e 3.4), e no segundo membro da desigualdade os exemplos (3.5 e 3.6), juntamente com suas matrizes, para assim realizar uma análise comparativa.

- Para o exemplo 3.1 e seu \hat{x} , obtemos:

$$\|\hat{x}\|_Q^2 + \sum_{k=1}^L \|A_{(k)}\hat{x} - b_{(k)}\|_{W_k}^2 = \hat{x}^T Q \hat{x} + (A_{(1)}\hat{x} - b_{(1)})^T W_1 (A_{(1)}\hat{x} - b_{(1)}) +$$

$$(A_{(2)}\hat{x} - b_{(2)})^T W_2 (A_{(2)}\hat{x} - b_{(2)}) = 0.1324868$$

- Para o exemplo 3.2 e seu \hat{x} , obtemos:

$$\|\hat{x}\|_Q^2 + \sum_{k=1}^L \|A_{(k)}\hat{x} - b_{(k)}\|_{W_k}^2 = \hat{x}^T Q \hat{x} + (A_{(1)}\hat{x} - b_{(1)})^T W_2 (A_{(1)}\hat{x} - b_{(1)}) +$$

$$(A_{(2)}\hat{x} - b_{(2)})^T W_1 (A_{(2)}\hat{x} - b_{(2)}) = 0.1421764$$

- Para o exemplo 3.3 e seu \hat{x} , obtemos:

$$\|\hat{x}\|_Q^2 + \sum_{k=1}^L \|A_{(k)}\hat{x} - b_{(k)}\|_{W_k}^2 = \hat{x}^T Q \hat{x} + (A_{(1)}\hat{x} - b_{(3)})^T W_1 (A_{(1)}\hat{x} - b_{(3)}) +$$

$$(A_{(2)}\hat{x} - b_{(1)})^T W_2 (A_{(2)}\hat{x} - b_{(1)}) + (A_{(3)}\hat{x} - b_{(2)})^T W_3 (A_{(3)}\hat{x} - b_{(2)}) = 0.1858846$$

- Para o exemplo 3.4 e seu \hat{x} , obtemos:

$$\|\hat{x}\|_Q^2 + \sum_{k=1}^L \|A_{(k)}\hat{x} - b_{(k)}\|_{W_k}^2 = \hat{x}^T Q \hat{x} + (A_{(1)}\hat{x} - b_{(3)})^T W_3 (A_{(1)}\hat{x} - b_{(3)}) +$$

$$(A_{(2)}\hat{x} - b_{(1)})^T W_2 (A_{(2)}\hat{x} - b_{(1)}) + (A_{(3)}\hat{x} - b_{(2)})^T W_3 (A_{(3)}\hat{x} - b_{(2)}) = 0.3299349.$$

- Para o exemplo 3.5 e seu \hat{x} , obtemos:

$$\|x\|_Q^2 + \sum_{k=1}^L \|A_k x - b_k\|_{W_k}^2 = x^T Q x + (A_1 x - b_1)^T W_1 (A_1 x - b_1) +$$

$$(A_2 x - b_2)^T W_2 (A_2 x - b_2) = 0.1324868$$

- Para o exemplo 3.6 e seu \hat{x} , obtemos:

$$\|x\|_Q^2 + \sum_{k=1}^L \|A_k x - b_k\|_{W_k}^2 = x^T Q x + (A_1 x - b_1)^T W_1 (A_1 x - b_1) + (A_2 x - b_2)^T W_2 (A_2 x - b_2) +$$

$$(A_3 x - b_3)^T W_3 (A_3 x - b_3) = 0.2795511.$$

A Tabela 1 a seguir apresenta um resumo dos \hat{x} -ótimos de todos os exemplos, assim como a ordenação que obteve as W_k , o tipo de método e aplicação dos \hat{x} na Definição 3.1.

Tabela 1 – Resultado de cada exemplo usando a Definição 3.1.

	ORDEM DE W_k	MÉTODO	\hat{X} - ÓTIMO	Definição 3.1
Exemplo 3.1	Crescente	OWA	$\begin{bmatrix} -0.1338644 \\ 0.135404 \end{bmatrix}$	0.1324868
Exemplo 3.2	Decrescente	OWA	$\begin{bmatrix} -0.1055128 \\ 0.135404 \end{bmatrix}$	0.1421764
Exemplo 3.3	Crescente	OWA	$\begin{bmatrix} -0.1590967 \\ 0.1133368 \end{bmatrix}$	0.1858846
Exemplo 3.4	Decrescente	OWA	$\begin{bmatrix} -0.1905801 \\ 0.441727 \end{bmatrix}$	0.3299349
Exemplo 3.5	Sequencial	Clássico	$\begin{bmatrix} -0.1338644 \\ 0.135404 \end{bmatrix}$	0.1324868
Exemplo 3.6	Sequencial	Clássico	$\begin{bmatrix} -0.2492461 \\ 0.0230349 \end{bmatrix}$	0.2795511

Primeiro foi feito um estudo comparativo entre o método desenvolvido via operador OWA e o método clássico proposto por (SAYED, et al., 2000), com os exemplos que utilizaram os mesmos parâmetros matriciais na obtenção do valor ótimo, ou seja, com a mesma quantidade de k , a saber, o Exemplo 3.1 com Exemplo 3.5, o Exemplo 3.2 com o Exemplo 3.5, o Exemplo 3.3 com Exemplo 3.6 e o Exemplo 3.4 com Exemplo 3.6.

Foi observado que a cada exemplo comparado através da Definição 3.1, os valores estimados que obteve mais eficiência são dos Exemplos 3.1 e 3.2 via operador OWA comparado ao clássico, pois eles satisfaz a condição de desigualdade da Definição 3.1.

- Exemplo 3.1 com Exemplo 3.5, pela Definição 3.1 tem-se: $0.1324868 \leq 0.1324868$.
- Exemplo 3.2 com Exemplo 3.5, pela Definição 3.1 tem-se: $0.1421764 \geq 0.1324868$.
- Exemplo 3.3 com Exemplo 3.6, pela Definição 3.1 tem-se: $0.1858846 \leq 0.2795511$.
- Exemplo 3.4 com Exemplo 3.6, pela Definição 3.1 tem-se: $0.3299349 \geq 0.2795511$.

Portanto, nos exemplos apresentado, o método dos mínimos quadrados regularizados num cenário de fusão de dados via operador de agregação OWA, obteve melhor eficácia em parte dos exemplos, enquanto nos outros o clássico foi mais eficiente.

Outra análise feita foi no próprio método dos mínimos quadrados via operador OWA, em relação às ponderações W_k . Notou-se que esse método está seguindo a definição da OWA vista no capítulo 2. Foi visto que na OWA, maiores ponderações levadas em maiores entradas obtém maior valor de saída, e essa observação é vista a seguir.

Quando maiores ponderações, os quais foram os W_k na ordem crescente, foram levadas aos maiores parâmetros A_k e b_k isso no Exemplo 3.2, foi obtido maior valor de saída do que no Exemplo 3.1, quando menores ponderações W_k foram levadas aos maiores parâmetros A_k e b_k , isto é, $0.1421764 \geq 0.1324868$.

Da mesma forma acontece com os Exemplos 3.4 e 3.3, quando maiores W_k foram levadas a maiores A_k e b_k e menores W_k foram levadas a maiores A_k e b_k , obteve $0.3299349 \geq 0.1858846$.

No método dos mínimos quadrados regularizados num cenário de fusão de dados via operador da integral de Choquet, do Capítulo 4, foi aplicado à Definição 4.1 nas matrizes de cada exemplo junto com seu valor ótimo, como é visto a seguir

- Para Exemplo 4.1 e seu valor ótimo:

$$\|\hat{x}\|_Q^2 + \sum_{k=1}^n \|(A_{(k)}\hat{x} - b_{(k)}) - (A_{(k-1)}\hat{x} - b_{(k-1)})\|^2 I\mu(G_k) = 0.2254942.$$

- Para Exemplo 4.2 e seu valor ótimo:

$$\|\hat{x}\|_Q^2 + \sum_{k=1}^n \|(A_{(k)}\hat{x} - b_{(k)}) - (A_{(k-1)}\hat{x} - b_{(k-1)})\|^2 I\mu(G_k) = 0.0614863.$$

A Tabela 2 a seguir apresenta um resumo dos \hat{x} -ótimos de todos os exemplos, o tipo de método e aplicação dos \hat{x} na Definição 4.1.

Tabela 2 – Resultado de cada exemplo usando a Definição 4.1.

	MÉTODO	\hat{X} -ÓTIMO	Definição 4.1
Exemplo 3.5	Clássico	$\begin{bmatrix} -0.1338644 \\ 0.135404 \end{bmatrix}$	0.1324868
Exemplo 3.6	Clássico	$\begin{bmatrix} -0.2492461 \\ 0.0230349 \end{bmatrix}$	0.2795511
Exemplo 4.1	Choquet	$\begin{bmatrix} -0.13037331 \\ 0.122372 \end{bmatrix}$	0.2254942
Exemplo 4.2	Choquet	$\begin{bmatrix} -0.1228279 \\ 0.1454066 \end{bmatrix}$	0.0614863

A análise comparativa foi realizada entre o método desenvolvido via operador da integral de Choquet e o método clássico proposto por (SAYED, et al., 2000), com os exemplos que utilizaram a maioria dos mesmos parâmetros matricial na obtenção do valor ótimo, ou seja, com a mesma quantidade de k , a saber, o Exemplo 4.1 com Exemplo 3.5 e o Exemplo 4.2 com Exemplo 3.6.

Foi observado que, para os exemplos comparados através da Definição 4.1, os valores estimados obteve menos eficiência no Exemplo 4.1 comparado ao Exemplo 3.5 e mais eficiência no Exemplo 4.2 comparado ao Exemplo 3.6, como pode ser visto a seguir.

- Exemplo 4.1 com Exemplo 3.5, pela Definição 4.1 tem-se: $0.2254942 \geq 0.1324868$.
- Exemplo 4.2 com Exemplo 3.6 pela Definição 4.1 tem-se: $0.0614863 \leq 0.2795511$.

Assim, para os exemplos apresentados no Capítulo 4, pode ser observado que o método clássico apresentou melhor resultado na comparação dos Exemplo 4.1 com Exemplo 3.5, enquanto que, o método de Choquet apresentou melhor resultado no Exemplo 4.2 comparado ao Exemplo 3.6, pois satisfaz a desigualdade da Definição 4.1.

Para o método dos mínimos quadrados regularizados num cenário de fusão de dados via operador mistura adaptada, do Capítulo 5, foi aplicado à Definição 5.1 às matrizes de cada exemplo junto com seu valor ótimo, como é visto a seguir:

- Para Exemplo 5.2 e seu valor ótimo:

$$\begin{aligned} \|\hat{x}\|_Q^2 + \frac{\sum_{k=1}^n \|(A_k \hat{x} - b_k)\|_{W_k}^2}{\sum_{k=1}^n \|W_k\|^2} &= \hat{x}^T Q x + \frac{(A_1 \hat{x} - b_1)^T W_1 (A_1 \hat{x} - b_1) + (A_2 \hat{x} - b_2)^T W_2 (A_2 \hat{x} - b_2)}{\|W_1\|^2 + \|W_2\|^2} \\ &= 0.2852419. \end{aligned}$$

- Para Exemplo 5.3 e seu valor ótimo:

$$\begin{aligned} \|\hat{x}\|_Q^2 + \frac{\sum_{k=1}^n \|(A_k \hat{x} - b_k)\|_{W_k}^2}{\sum_{k=1}^n \|W_k\|^2} &= \hat{x}^T Q x + \frac{(A_1 \hat{x} - b_1)^T W_1 (A_1 \hat{x} - b_1) + (A_2 \hat{x} - b_2)^T W_2 (A_2 \hat{x} - b_2) + A_3 \hat{x} - b_3)^T W_3 (A_3 \hat{x} - b_3)}{\|W_1\|^2 + \|W_1\|^2 + \|W_1\|^3} \\ &= 0.7760650. \end{aligned}$$

A análise comparativa foi realizada entre o método desenvolvido via operador mistura e o método clássico proposto por (SAYED, et al., 2000), com os exemplos que utilizaram os mesmos parâmetros matricial na obtenção do valor ótimo, ou seja, com a mesma quantidade k , a saber, o Exemplo 5.2 com Exemplo 3.5 e o Exemplo 5.3 com Exemplo 3.6.

A Tabela 3 a seguir apresenta um resumo dos \hat{x} -ótimos de todos os exemplos, o tipo de método e aplicação dos \hat{x} na Definição 5.1.

Tabela 3 – Resultado de cada exemplo usando a Definição 5.1.

	MÉTODO	\hat{X} -ÓTIMO	Definição 5.1
Exemplo 3.5	Clássico	$\begin{bmatrix} -0.1338644 \\ 0.135404 \end{bmatrix}$	0.1324868
Exemplo 3.6	Clássico	$\begin{bmatrix} -0.2492461 \\ 0.0230349 \end{bmatrix}$	0.2795511
Exemplo 5.2	Mistura Adaptada	$\begin{bmatrix} -0.3606511 \\ 0.3259367 \end{bmatrix}$	0.2852419
Exemplo 5.3	Mistura Adaptada	$\begin{bmatrix} -0.6854674 \\ 0.2307007 \end{bmatrix}$	0.7760650

Foi observado que, para os exemplos comparado através da Definição 5.1, os valores estimados obteve menos eficiência no método dos mínimos quadrados via operador mistura adaptada, do que no método clássico de (SAYED, et al., 2000), como pode ser visto a seguir:

- Exemplo 5.2 com Exemplo 3.5, pela Definição 5.1 tem-se: $0.2852419 \geq 0.1324868$.
- Exemplo 5.3 com Exemplo 3.6 pela Definição 5.1 tem-se: $0.7760650 \geq 0.2795511$.

Assim, para os exemplos apresentados no Capítulo 5, o método dos mínimos quadrados regularizado num cenário de fusão de dados via operador mistura adaptada obteve menor eficácia quanto ao método clássico de (SAYED, et al., 2000).

7 Aplicação

Como demonstração do potencial de aplicação das teorias propostas nessa dissertação, apresentamos neste capítulo uma situação-problema envolvendo o processo de escolha de locais para hospedagem, tomando como base a rede hoteleira da cidade de Ilhéus na Bahia. Essa aplicação será introduzida nos métodos abordados em capítulos anteriores, sendo eles, o MMQR num cenário de fusão de dados de Sayed, o MMQR num cenário de fusão de dados via operador *OWA*, o MMQR num cenário de fusão de dados via operador da integral de Choquet e MMQR num cenário de fusão de dados via operador mistura adaptada com o objetivo de analisar qual método é mais eficaz, através dos valores estimados obtidos.

Problemática:

Obviamente, quando se deseja realizar a escolha de um lugar para nos hospedarmos em uma determinada localidade, levamos em consideração alguns parâmetros para nortear nossa escolha, considerando as acomodações existentes na cidade ou região de destino, além do nosso perfil pessoal. Por exemplo, se considerarmos três parâmetros para nortear nossa escolha, a saber, a localização do hotel, seus níveis de limpeza e custo-benefício (preço) da hospedagem, pessoas com perfis distintos de viagem, podem “pesar” esses atributos de maneiras diferentes.

No caso de um mochileiro que, em geral, são pessoas que viajam sozinhas e que está mais preocupado em conhecer a cidade e o que ela oferece, o que é mais importante na avaliação de um hotel é o preço, ficando a localização e a limpeza em segundo plano. Já se pensamos em alguém que viaja a negócios, a limpeza e o custo-benefício passam a serem critérios mais importantes do que a localização.

Assim, cabe perguntar: Considerando o perfil de mochileiro e de negócios, além do rol de opções de hospedagem disponíveis em uma determinada cidade, qual a seria a melhor escolha de hotel para cada perfil?

7.1 Metodologia da Solução

Para responder o problema apresentado acima, realizamos uma avaliação em um site de busca de hotel, selecionando vinte hospedagens com diferentes avaliações da cidade de Ilhéus, incluindo hotéis, resorts e apartamentos para obtenção da nota de três critérios escolhidos, a saber, localização, limpeza e custo-benefício. A fusão desses dados acontecerá através do MMQR via operador *OWA*, via operador de Choquet, via operador mistura adaptada e também pelo método clássico. Foi criado dois tipos de perfis fictícios que procuram

por hospedagens para escolher quais critérios consideram mais importante, sendo os perfis de mochileiro e negócio, assim cada um deles atribuirá uma nota considerada peso a cada critério, sendo o maior peso atribuído considerado como mais importante e o menor, o menos importante. A seguir apresentamos os critérios em ordem de 1 a 3 e os perfis com suas respectivas escolhas, sendo essas escolhas também fictícias.

Critérios de hospedagem:

1 - Localização

2 - Limpeza

3 - Custo-benefício

Perfis e escolhas fictícias:

Mochileiro: 3, 1 e 2.

Negócio: 2, 1 e 3 .

A Tabela 4 a seguir apresenta os dados obtido pela busca feita no site.

Tabela 4 – Dados obtidos do site.

Hospedagem	Localização	Limpeza	Custo-Benefício
1	8.3	8.5	7.8
2	8.5	8.5	8.5
3	8.4	8.4	7.9
4	8.1	8.1	7.9
5	8.6	8.6	8.3
6	8.7	9.0	8.3
7	8.5	8.6	8.0
8	8.2	8.2	8.0
9	8.9	9.0	8.6
10	8.7	8.8	8.5
11	8.5	8.5	8.2
12	8.3	8.4	8.0
13	8.3	8.5	8.1
14	8.7	8.9	8.4
15	7.6	7.8	7.6
16	9.0	9.0	8.4
17	8.3	8.4	8.2
18	8.6	8.6	7.4
19	9.1	9.1	8.3
20	8.0	8.0	7.9

Curvas de regressão simples foram criadas para cada situação através do método

dos mínimos quadrados não regularizado (método sem fusão de dados) considerando as hospedagens como a variável independente e os critérios como a variável dependente, a dispersão dos dados de cada critério juntamente com a reta que melhor se aproxima deles, é vista nas Figuras 4, 5 e 6. Nota-se que os pontos dispostos nos gráficos, das figuras citada, apresentam uma tendência de comportamento linear, e assim esses dados serão introduzido aos métodos com fusão de dados desenvolvidos na dissertação. Para todos os métodos foram criados algoritmos no programa scilab, para obtenção do valor ótimo e também para representação gráfica presente nas figuras.

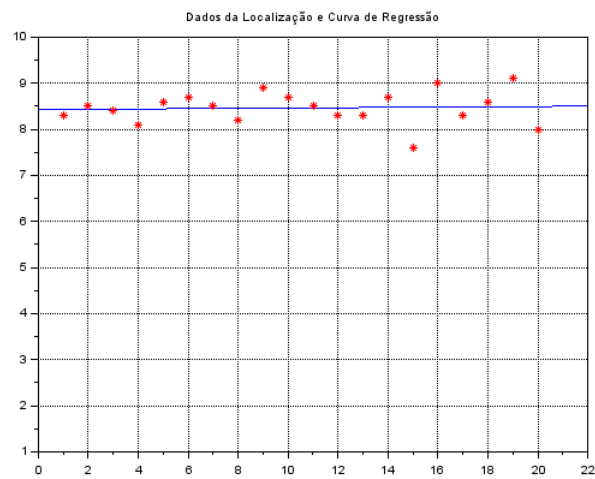


Figura 4 – Dados da localização e curva de regressão usando método dos mínimos quadrados sem fusão de dados.

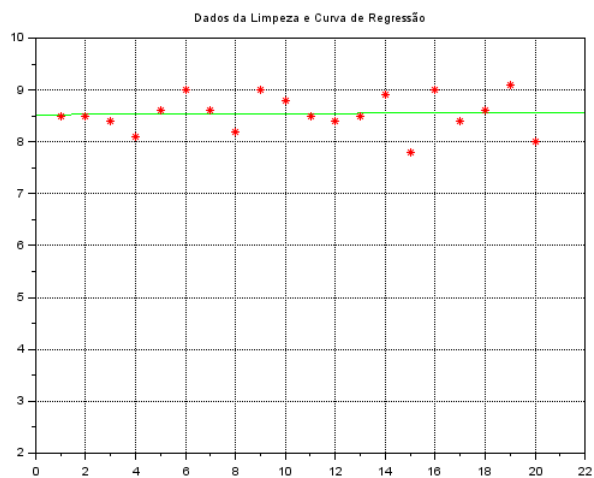


Figura 5 – Dados da limpeza e curva de regressão do método dos mínimos quadrados sem fusão de dados.

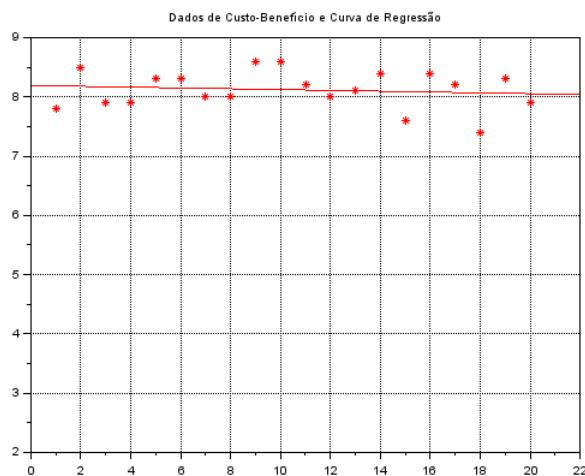


Figura 6 – Dados do custo-benefício e curva de regressão do método dos mínimos quadrados sem fusão de dados.

Assim, o \hat{x} -ótimo desse método clássico é:

$$\hat{x} = \left[Q + A_1^T W_1 A_1 + A_2^T W_2 A_2 + A_3^T W_3 A_3 \right]^{-1} \left[A_1^T W_1 b_3 + A_2^T W_2 b_1 + A_3^T W_3 b_2 \right].$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 6.0931607 \\ 0.1558369 \end{bmatrix}.$$

Como esse x -ótimo são os coeficientes da reta, na Figura 7 apresenta-se essa reta ajustada aos dados.

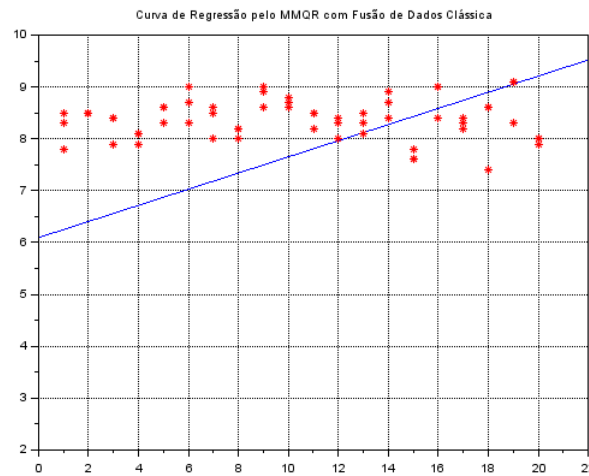


Figura 7 – MMQR num cenário de fusão de dados clássico (perfil de mochileiro).

Para esse método também foi introduzido o perfil de negócio, o qual utilizou dos mesmos parâmetros do perfil de mochileiro, porém para esse caso os maiores pesos foram levados aos critérios na ordem: limpeza, localização e custo-benefício. Assim, o \hat{x} -ótimo do método clássico para o perfil de negócio é:

$$\hat{x} = \left[Q + A_1^T W_1 A_1 + A_2^T W_2 A_2 + A_3^T W_3 A_3 \right]^{-1} \left[A_1^T W_1 b_2 + A_2^T W_2 b_1 + A_3^T W_3 b_3 \right].$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 6.2204799 \\ 0.1573569 \end{bmatrix}.$$

E a reta que melhor se aproxima dos dados por esse método é apresentada na Figura 8.

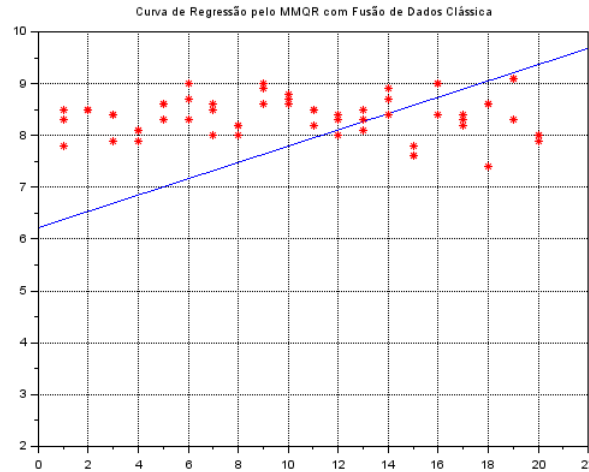


Figura 8 – MMQR num cenário de fusão de dados clássico (perfil de negócio).

Para o método da OWA considerando o perfil de mochileiro os critérios que levaram maiores pesos tem a seguinte ordem: custo-benefício, localização e limpeza, então o peso W_1 foi atribuído ao custo-benefício, o W_2 a localização e o W_3 a limpeza. Nos dois perfis os parâmetros utilizados foram, Q , A_1 , A_2 , A_3 , b_1 , b_2 , b_3 , W_1 , W_2 e W_3 . Nesse método os A_k e b_k são permutados em ordem decrescente, assim teremos a ordenação $\{b_2, b_1, b_3\}$, como os A_k são iguais eles permaneceram da mesma forma, uma explicação detalhada de como acontece a ordenação de matrizes é visto nos exemplos do Capítulo 3. Assim o valor ótimo é apresentado da seguinte maneira:

$$\hat{x} = \left[Q + A_{(1)}^T W_3 A_{(1)} + A_{(2)}^T W_2 A_{(2)} + A_{(3)}^T W_1 A_{(3)} \right]^{-1} \left[A_{(1)}^T W_3 b_{(2)} + A_{(2)}^T W_2 b_{(1)} + A_{(3)}^T W_1 b_{(3)} \right]$$

Assim, a solução ótima é:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 6.0931607 \\ 0.1558369 \end{bmatrix}.$$

E a reta que melhor se aproxima dos dados por esse método é apresentada na Figura 9.

Da mesma forma foram aplicadas ao perfil de negócio, considerando que os maiores pesos foram levados as escolhas mais importante na seguinte ordem: limpeza, localização e custo-benefício. A permutação decrescente desses critérios é: $\{b_2, b_1, b_3\}$.

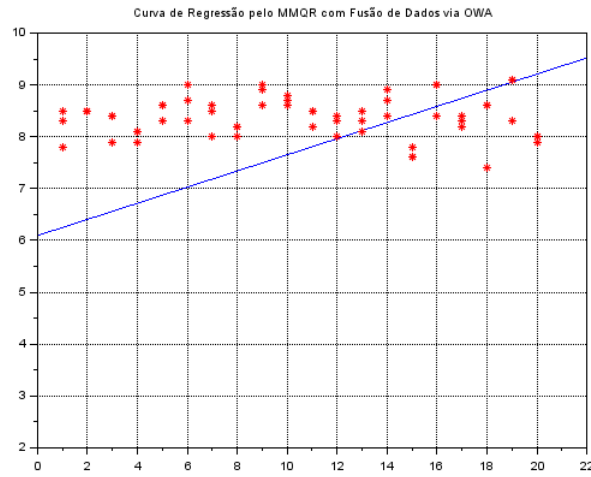


Figura 9 – MMQR num cenário de fusão de dados via operador OWA (perfil de mochileiro).

Assim, o valor ótimo apresentado é:

$$\hat{x} = \left[Q + A_{(1)}^T W_1 A_{(1)} + A_{(2)}^T W_2 A_{(2)} + A_{(3)}^T W_3 A_{(3)} \right]^{-1} \left[A_{(1)}^T W_1 b_{(2)} + A_{(2)}^T W_2 b_{(1)} + A_{(3)}^T W_3 b_{(3)} \right]$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 6.1994464 \\ 0.1502555 \end{bmatrix}.$$

A reta que se aproxima dos dados por esse método é apresentada na Figura 10.

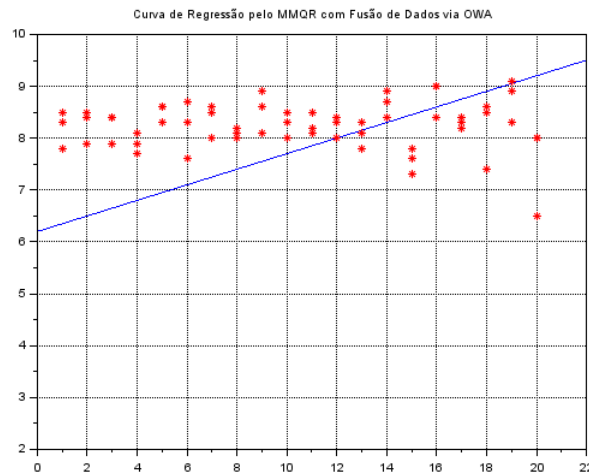


Figura 10 – MMQR num cenário de fusão de dados via operador OWA (perfil de negócio).

Para o MMQR num cenário de fusão de dados via operador da integral de Choquet, considerou a medida fuzzy uniforme $\mu(G_k) = \frac{|G|}{n}$ e os parâmetros $\{Q, A_0, A_1, A_2, A_3, b_0, b_1, b_2 \text{ e } b_3\}$, para os dois perfis, sendo, A_0 e b_0 matrizes nulas. Nesse método as matrizes são permutadas em ordem crescente, e ocorrendo sempre a diferença entre a menor matriz pela anterior.

Considerando o perfil de mochileiro as medidas foram associadas às entradas também na forma que maiores medidas foram levadas as entradas consideradas mais importantes, sendo elas, custo-benefício, localização e limpeza, cuja permutação crescentes segue exatamente o critério de importância (b_3, b_1, b_2) . Assim temos, $\mu(G_1)$ levada b_3 , $\mu(G_2)$ levada b_1 e $\mu(G_3)$ levada b_2 , obtendo o seguinte valor ótimo :

$$\hat{x} = \left[Q + (A_{(1)} - A_{(0)})^T I\mu(G_1)(A_{(1)} - A_{(0)}) + (A_{(2)} - A_{(1)})^T I\mu(G_2)(A_{(2)} - A_{(1)}) + \right. \\ \left. (A_{(3)} - A_{(2)})^T I\mu(G_3)(A_{(3)} - A_{(2)})^{-1} \left[(A_{(1)} - A_{(0)})^T I\mu(G_1)(b_{(3)} - b_{(0)}) + \right. \right. \\ \left. \left. (A_{(2)} - A_{(1)})^T I\mu(G_2)(b_{(1)} - b_{(3)}) + (A_{(3)} - A_{(2)})^T I\mu(G_3)(b_{(2)} - b_{(1)}) \right] \right]$$

Assim, a solução ótima é:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 6.7398184 \\ 0.0993515 \end{bmatrix}.$$

A reta que melhor se aproxima dos dados por esse método é apresentada na Figura 11.

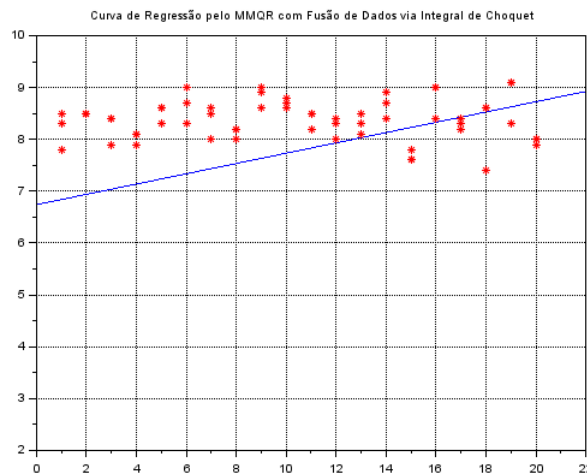


Figura 11 – MMQR num cenário de fusão de dados via operador da integral de Choquet (perfil mochileiro).

Considerando agora o perfil de negócio, os critérios mais importantes são: limpeza, localização e custo-benefício. Assim temos, $\mu(G_3)$ levada b_3 , $\mu(G_2)$ levada b_1 e $\mu(G_1)$ levada b_2 . E a permutação crescente é, (b_3, b_1, b_2) . Obtendo o seguinte valor ótimo:

$$\hat{x} = \left[Q + (A_{(1)} - A_{(0)})^T I\mu(G_3)(A_{(1)} - A_{(0)}) + (A_{(2)} - A_{(1)})^T I\mu(G_2)(A_{(2)} - A_{(1)}) + \right. \\ \left. (A_{(3)} - A_{(2)})^T I\mu(G_1)(A_{(3)} - A_{(2)})^{-1} \left[(A_{(1)} - A_{(0)})^T I\mu(G_3)(b_3 - b_{(0)}) + \right. \right. \\ \left. \left. (A_{(2)} - A_{(1)})^T I\mu(G_2)(b_1 - b_{(3)}) + (A_{(3)} - A_{(2)})^T I\mu(G_1)(b_2 - b_{(1)}) \right] \right]$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 6.7398184 \\ 0.0993515 \end{bmatrix}.$$

A reta que melhor se aproxima dos dados por esse método é apresentada na Figura 12

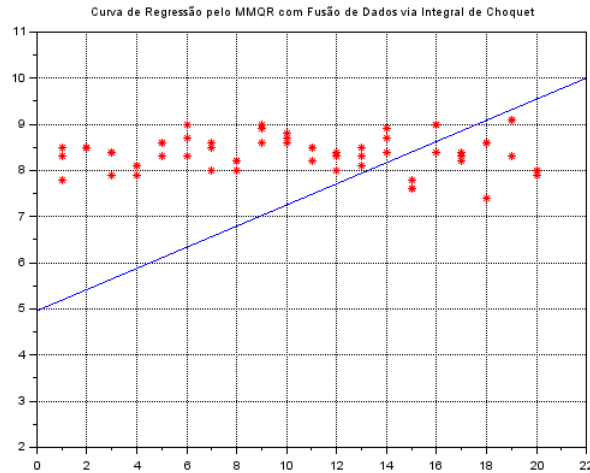


Figura 12 – MMQR num cenário de fusão de dados via operador da integral de Choquet (perfil negócio).

Por último foi aplicado ao MMQR num cenário de fusão de dados via operador mistura adaptada para o perfil de mochileiro. Para os dois perfis desse método considerou os parâmetros $\{Q, A_1, A_2, A_3, b_1, b_2, b_3, W_1, W_2$ e $W_3\}$. De maneira semelhante ao métodos já visto, maiores pesos foram levados aos critérios mais importante. Assim, o valor ótimo do perfil mochileiro é:

$$\hat{x} = \left[Q + \frac{(A_1^T W_1 A_1 + A_2^T W_2 A_2 + A_3^T W_3 A_3)}{\|W_1\|^2 + \|W_2\|^2 + \|W_3\|^2} \right]^{-1} \left[\frac{(A_1^T W_1 b_3 + A_2^T W_2 b_1 + A_3^T W_3 b_2)}{\|W_1\|^2 + \|W_2\|^2 + \|W_3\|^2} \right]$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 7.119952 \\ 0.0848024 \end{bmatrix}$$

E a reta que melhor se aproxima dos dados por esse método é apresentada na Figura 13.

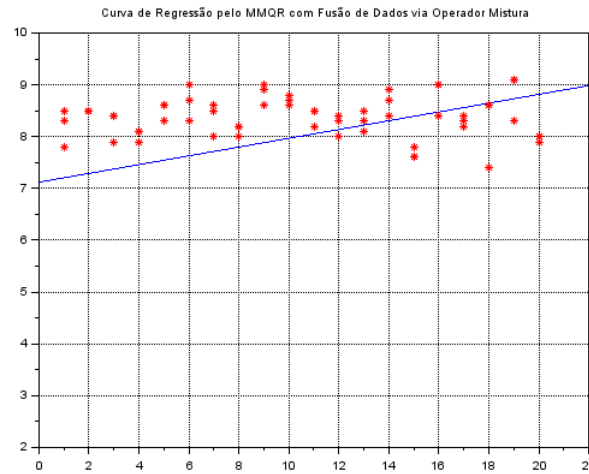


Figura 13 – MMQR num cenário de fusão de dados via operador mistura adaptada (perfil de mochileiro).

Para o método da mistura considerando o perfil de negócio obtém-se o seguinte valor ótimo:

$$\hat{x} = \left[Q + \frac{(A_1^T W_1 A_1 + A_2^T W_2 A_2 + A_3^T W_3 A_3)}{\|W_1\|^2 + \|W_2\|^2 + \|W_3\|^2} \right]^{-1} \left[\frac{(A_1^T W_1 b_1 + A_2^T W_2 b_2 + A_3^T W_3 b_3)}{\|W_1\|^2 + \|W_2\|^2 + \|W_3\|^2} \right]$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 7.2489764 \\ 0.0826897 \end{bmatrix}$$

E a reta que melhor se aproxima dos dados por esse método é apresentada na Figura 14.

7.2 Análise e Discussão dos Resultados

Na Tabela 5 abaixo apresenta-se todos os valores estimado, assim como também os valores obtido pela utilização de cada x -ótimo a sua respectiva definição de desigualdades de cada capítulo, as quais são: Definição 3.1, Definição 4.1 e a Definição 5.1.

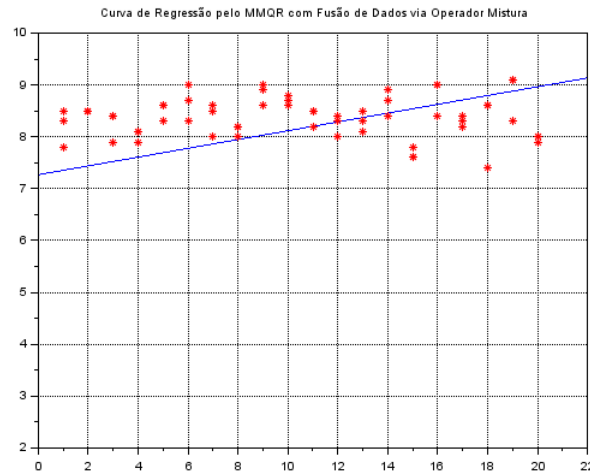


Figura 14 – MMQR num cenário de fusão de dados via operador mistura adaptada (perfil de negócio).

O método clássico foi inserido na segunda parte da desigualdade enquanto os outros métodos na primeira parte de cada definição correspondente ao seu método, a fim de analisar qual deles obteve melhor estimativa.

- O método da OWA obteve valores mais estimados do que o método clássico, tanto para o perfil de mochileiro quanto para o de negócio, pois pela Definição 3.1 tem-se $52.011204 \leq 52.011204$ e $52.832747 \leq 54.047571$.
- O método de Choquet obteve valor menos estimado comparado ao método clássico para o perfil de mochileiro e mais estimado para o negócio, quando comparado pela Definição 4.1, pois $59.842342 \geq 52.011204$ e $44.175639 \leq 54.047571$.
- O método da mistura adaptada obteve valores menos estimados comparados ao método clássico para os dois perfis, quando comparado pela Definição 5.1, pois $62.540620 \geq 52.011204$ e $64.826506 \geq 54.047571$.
- Quando comparado as OWAs pelos dois perfis, percebeu-se que o de negócio obteve maior valor, isso porque ele levou maiores pesos em critérios com maiores valores, pois estes são organizados por permutações decrescentes. Com isso afirma-se que para essa aplicação o MMQR via operador OWA se comportou igual a sua definição vista no Capítulo 2.

Assim, as retas que melhor se ajustou aos dados num processo de fusão de dados pelo MMQR foi via operador OWA, cuja representação gráfica consta nas Figuras 9 e 10. Sendo assim,

Tabela 5 – Resultado de cada método.

MÉTODO	\hat{X} - ÓTIMO	Definição
Clássico (perfil de mochileiro)	$\begin{bmatrix} 6.0931607 \\ 0.1558369 \end{bmatrix}$	52.011204
Clássico (perfil de negócio)	$\begin{bmatrix} 6.2204799 \\ 0.1573569 \end{bmatrix}$	54.047571
OWA (perfil de mochileiro)	$\begin{bmatrix} 6.0931607 \\ 0.1558369 \end{bmatrix}$	52.011204
OWA (perfil de negócio)	$\begin{bmatrix} 6.1994464 \\ 0.1502555 \end{bmatrix}$	52.832747
Choquet (perfil mochileiro)	$\begin{bmatrix} 6.7398184 \\ 0.0993515 \end{bmatrix}$	59.842342
Choquet (perfil negócio)	$\begin{bmatrix} 4.9601359 \\ 0.2293646 \end{bmatrix}$	44.175639
Mistura Adaptada (perfil de mochileiro)	$\begin{bmatrix} 7.119952 \\ 0.0848024 \end{bmatrix}$	62.540620
Mistura Adaptada (perfil de negócio)	$\begin{bmatrix} 7.2687468 \\ 0.0848361 \end{bmatrix}$	64.826506

o método da OWA apresentou melhor eficácia comparada ao clássico e este obteve melhor eficácia quanto aos métodos de Choquet nos dois perfis e da mistura adaptada para o perfil de mochileiro, mas o perfil de negócio da mistura se mostrou mais eficaz que o clássico.

Em resposta a pergunta introduzida na problemática, tem-se que, como o método da OWA e o de Choquet no perfil de negócio foram obtidos como mais eficaz, e os critérios para OWA obteve a ordenação $\{b_2, b_1 e b_3\}$ e para o de Choquet no negócio $\{b_3, b_1, b_2\}$, então as melhores escolhas de hospedagens deve levar em consideração sendo mais importante em primeiro lugar a limpeza = b_2 , segundo lugar a localização = b_1 e terceiro o custo-benefício = b_3 ou em primeiro lugar o custo-benefício = b_3 , segundo lugar a localização = b_1 e terceiro lugar a limpeza = b_2 .

8 Conclusão e Trabalhos Futuros

Nesta dissertação foram desenvolvidos métodos dos mínimos quadrados regularizados num cenário de fusão de dados via operador de agregação OWA, via operador da integral de Choquet e via operador mistura v , com a OWA e a mistura utilizando ponderações enquanto Choquet medida difusa. A formulação de todos os três métodos apresentados foram baseados em (SAYED et al., 2000). Assim, aos problemas otimização criados, soluções mínimas quadráticas na forma regularizada foram obtidas e demonstrada no lema de cada método.

Além disso, vale ressaltar que para a obtenção do método dos mínimos quadrados regularizados via operador mistura, uma nova forma de calcular esse operador foi apresentada, considerando assim um algoritmo, onde as funções pesos passaram a ser fixas e assim obtivemos a mistura adaptada.

O presente estudo possibilitou perceber através da aplicação o potencial de aplicação das teorias propostas nessa dissertação, e, além disso, observou-se que o método da OWA e o de Choquet no perfil de negócio apresentaram estimativas mais eficientes, isto é, os valores ótimos obtidos obteve uma melhor aproximação quando comparado ao método clássico. Enquanto o método da mistura adaptada e de Choquet para o perfil de mochileiro obteve estimativas menos eficiente quanto ao clássico. Já nas análises dos exemplos no Capítulo 6 foi observado que os novos métodos desenvolvidos foi mais eficiente em alguns exemplos, enquanto em outros o método clássico se apresentou melhor. Portanto, tanto nos exemplos apresentado e na aplicação, o MMQR num cenário de fusão de dados via operador de agregação OWA, obteve melhor eficácia do que o método clássico de (SAYED, et al., 2000).

Enfim, por meio do método clássico já existente outros foram desenvolvidos, os quais utilizam técnicas de fusão de dados, técnica essa que permitirá a inserção desses novos métodos em várias áreas de aplicação.

Como trabalho futuro, pretende-se estender esses métodos para o caso em que os parâmetros apresentam incertezas e também desenvolvê-los para o cenário de fusão probabilística.

Referências

- ALEMÁN, J.J., **Um modelo de fusão de informação e dados de sensores baseado no Modelo JDL para a assistência não intrusiva a idosos em ambientes outdoor.** 2015. Dissertação (Mestre em Computação)- Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2015.
- BELIAKOV, G.; PRADA, A.; CALVO, T. **Aggregation Functions: A Guia for Practitioners.** New York, 2007.
- BELIAKOV, G.; SOLA, H. B.; SANCHEZ, T. C. **A Practical Guide to Averaging Functions.** New York, 2016.(Studies in Fuzziness and Soft Computing, v. 329)
- BUENO, J. C. S. **Redução Dimensional de Imagens: Aplicação de Funções de Pré-Agregação Baseadas na Intergral de Choquet.** 2018. Dissertação (Mestre em Modelagem Computacional)- Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, novembro 2018.
- CRATO, N. **O Papel dos Mínimos Quadrados na Descoberta dos Planetas.** Lisboa, 2000.
- CALVO, T.; MAYOR, G.; MESIAR, R. **Aggregation Operators.** New York, 2002. (Studies in fuzziness and soft computing, v. 97)
- CHOQUET, G. **Annales de L’Institut Fourier.** v. 5, p. 131-295, 1954.
- FARIAS, A., D., S. **Funções Mistura Generalizada e Aplicações.** 2018. Tese (Doutorado em Ciência da Computação)- Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2018.
- FILHO, M.B.C.; SOUZA, J. C.S.; SCHILLING, M. Sobre o Problema da Integração Generalizada de Dados. **Controle e Automação,** Rio de Janeiro, v. 18, n. 1, março 2007.
- GRABISCH, M.; MARICHAL, J.; MESIAR, R.; PAP, E. **Aggregation Functions,** New York Cambridge University Press, 2009.
- HALL, D. L.; LLINAS, J. L. **Introduction to Multisensor Data Fusion.** New York, 2001.
- HELENE, O. **Método dos Mínimos Quadrados com Formalismo Matricial,** São Paulo, Livraria da Física, 2006.
- JÚNIOR, J. G. C., **Fusão de Dados Multi-Nível em Ambientes de Monitoração Contínua de Sistemas Táticos Navais Utilizando Múltiplas Lógicas.** 2010. Tese (Doutor

em Ciências em Engenharia Civil)- Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.

KAILATH, T.; SAYED, A. H., HASSIBI, B. **Linear Estimation**. New Jersey, Prentice Hall, 2000.

MESIAR, R.; SPIRKOVA, J. **Weighted Means and Weighting Functions**. v.42, p. 151-160, 2006.

MOURA, I. D. P. **Filtragem Ótima Robusta para Sistemas Lineares num Cenário de Fusão de Dados**. 2019, Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional)- Universidade Estadual de Santa Cruz. Ilhéus, 2019.

PLACKETT, R. L., **The discovery of the method of least squares**, *Biometrika* 59. 1972.

PERREIRA, R. A.; RIBEIRO, R. A. **Aggregation with generalized mixture operators using weighting functions** *Fuzzy Sets and Systems*, v. 137, n. 1, p. 43 – 58, 2003.

SAYED, A. H.; AL-NAFFOURI, T. Y.; KAILAT, T. Robusto Estimation Four Uncertain Models In a Data Fusion Scenario. **System Identification**, v. 3, Junho 2000.

SILVA, B. M. C. **Filtragem Robusta Para Sistemas Lineares Num Cenário de Fusão de Dados**.2018. Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional) - Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2018.

STEWART, J. **Cálculo**. São Paulo, 2006, v. 1.

TORRES, A. B. B. **Fusão de Dados Multinível para Sistemas de Internet das Coisas em Agricultura Inteligente**. 2017. Dissertação (Mestre em Engenharia de Teleinformática) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2017.

YAGER, Ronald R. **On Ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making**. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, v. 18, p. 183 – 190, 1988.

APÊNDICE A – Definições Matemática

A seguir consta definições matemática que servirão para melhor entendimento do trabalho, pois as mesmas foram citadas no decorrer da dissertação.

Definição 1 (Idempotência) Uma função de agregação f é chamada idempotente se para cada entrada $x = (t, t, \dots, t), t \in [0, 1]$ a saída for $f(t, t, \dots, t) = t$.

Definição 2 (Continuidade) Seja f uma função. Dizemos que f é contínua em a se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Observe que a Definição 2 implicitamente requer para a continuidade de f em a :

- $f(a)$ está definida (isto é, a está no domínio de f)
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Definição 3 (Elemento neutro) Uma função de agregação f tem um elemento neutro $e \in [0, 1]$, se para cada $t \in [0, 1]$ em qualquer posição que ela ocupa

$$f(e, \dots, e, t, e, \dots, e) = t.$$

Definição 4 (Homogeneidade) Uma função de agregação $f : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ é homogênea se para todos $\lambda \in [0, 1]$ e para todos $(x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$, isto é,

$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda f(x_1, \dots, x_n).$$

Definição 5 (Negação forte) Uma função univariada N definida em $[0, 1]$ é chamada de negação forte, se for estritamente decrescente e involutiva (ou seja, $N(N(t)) = t$ para todo $t \in [0, 1]$).

Exemplo 1 A negação forte mais comumente usada é a negação padrão $N(t) = 1 - t$.

Definição 6 (Função de agregação dupla). Seja $N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ uma negação forte e $f : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ uma função de agregação. Então, a função de agregação f_d dada por

$$f_d(x_1, \dots, x_n) = N(f(N(x_1), N(x_2), \dots, N(x_n)))$$

é chamado de dual de f em relação a N , ou, para abreviar, o dual de N de f . Ao usar a negação padrão, f_d é dado por

$$f_d(x_1, \dots, x_n) = 1 - (1 - x_1, \dots, 1 - x_n)$$

e diremos simplesmente que f_d é o dual de f .

Definição 7 (Simétrica) Uma função de agregação f é chamada simétrica, se seu valor não depender da permutação dos argumentos, ou seja, $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{P(1)}, x_{P(2)}, \dots, x_{P(n)})$, para todo x e toda permutação $P = (P(1), P(2), \dots, P(n))$ de $(1, 2, \dots, n)$