UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

VINÍCIUS SOUZA MADUREIRA

REGULADOR LINEAR GAUSSIANO PARA SISTEMAS LINEARES COM ENTRADAS DESCONHECIDAS

ILHÉUS-BA
2020

VINÍCIUS SOUZA MADUREIRA

REGULADOR LINEAR GAUSSIANO PARA SISTEMAS LINEARES COM ENTRADAS DESCONHECIDAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Estadual de Santa Cruz, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia.

Orientador: Prof. Dr. Gildson Queiroz de Jesus

Coorientador: Prof. Dr. Thiago Pereira das Chagas

ILHÉUS-BA
2020

M183 Madureira, Vinícius Souza.
Regulador linear gaussiano para sistemas lineares com entradas desconhecidas / Vinícius Souza Madureira. – Ilhéus, BA: UESC, 2020.
66 f.: il.

Orientador: Gildson Queiroz de Jesus.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Santa de Cruz. Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia.
Inclui referências e apêndices.

1. Sistemas lineares. 2. Sistemas lineares de controle. 3. Modelos matemáticos. I. Título.

CDD 629.832

VINÍCIUS SOUZA MADUREIRA

REGULADOR LINEAR GAUSSIANO PARA SISTEMAS LINEARES COM ENTRADAS DESCONHECIDAS

Ilhéus-BA, 02/03/2020

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Tiago Pereira das Chagas
UESC
(Coorientador)

Prof. Dr. Eduardo Silva Palmeira
UESC

Prof. Dr. Fabíolo Moraes Amaral
IFBA/Eunápolis

Dedico este trabalho à minha avó, Marilda, sinônimo de amor e carinho em minha vida, por representar toda a base que levou à formação do que sou hoje, por incentivar e vibrar com as minhas conquistas, por sua presença constante e preocupação com o bem estar de toda a nossa família.

AGRADECIMENTOS

– Agradeço primeiramente a Deus por guiar meus passos e ter me concedido força e saúde para a conclusão de mais uma etapa.

– Aos meus orientadores Gildson Queiroz de Jesus e Thiago Pereira das Chagas pela oportunidade de trabalharmos juntos, por estarem sempre presentes e dedicados no desenvolvimento de todas as atividades, por todos os ensinamentos que me passaram, pelo incentivo e por confiarem no meu trabalho.

– Aos professores Eduardo Silva Palmeira, Fabíolo Moraes Amaral e Lucas Sampaio Garcia pela contribuição que deram a este trabalho.

– À Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC) e ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia (PPGMC) por toda a estrutura disponibilizada.

– A todos os professores do PPGMC pelas aulas ministradas e conselhos para com o andamento da pesquisa.

– Aos colegas de turma pela amizade, colaboração nas disciplinas, discussões e conselhos.

– À Comissão de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa concedida.

– Aos meus pais, Joelson e Márcia, por serem as pessoas mais importantes em minha vida e fornecerem todo o apoio nos mínimos detalhes.

– À minha esposa, Jessika, pelos aconselhamentos e por estar presente nos bons e maus momentos.

– A todos os meus familiares e amigos, que sempre me incentivam e contribuem com momentos alegres de convivência.

“Caminha que o chão aparece.”

Autor desconhecido

Regulador Linear Gaussiano
para Sistemas Lineares
com Entradas Desconhecidas

RESUMO

Neste trabalho é apresentado o desenvolvimento de um Regulador Linear Gaussiano para sistemas espaço de estados sujeitos a distúrbios externos não mensuráveis, conhecidos como entradas desconhecidas. Para isso, foi formulado um Regulador Linear Quadrático com rejeição de distúrbios que juntamente com o Filtro de Kalman para sistemas sujeitos a entradas desconhecidas fornece uma ação de controle baseada nas estimativas dos distúrbios. É proposta também a inclusão da mesma metodologia em controladores com ação integral, mostrando que é possível melhorar a rejeição de distúrbios nestes. Alguns exemplos numéricos são apresentados e os resultados são comparados com outras propostas da literatura, mostrando que a metodologia apresenta bom desempenho e tem relevância para utilização em problemas práticos. Algumas aplicações envolvendo sistemas de geração fotovoltaica foram decorrentes dessa pesquisa, como a realização de estimativa de irradiância solar a partir do Filtro de Kalman para sistemas sujeitos a entradas desconhecidas e a aplicação do controlador com ação integral proposto no rastreamento de máxima potência em painéis fotovoltaicos. Nesse sentido, boas perspectivas são esperadas visto que a metodologia empregada pode resultar em maior eficiência e redução de custos nesse tipo de sistema.

Palavras-chave: LQG, LQR, LQI, rejeição de distúrbio.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Sistema de controle sem rejeição de distúrbios 4
Figura 2 – Sistema de controle com rejeição de distúrbios 5
Figura 3 – Sistema de controle para entradas desconhecidas 5
Figura 4 – Sistema espaço de estados com ação integral 13
Figura 5 – Exemplo de sistema de controle com LQR: (a) Norma dos estados e distúrbio, (b) Sinal de controle resultante. 16
Figura 6 – Sistema espaço de estados com ação integral e rejeição de distúrbios 25
Figura 7 – Curvas de um painel fotovoltaico: (a) Corrente × Tensão, (b) Potência × Tensão 33
Figura 8 – Variação da curva de potência fornecida por um painel fotovoltaico em função da irradiância 34
Figura 9 – Variação da curva de potência fornecida por um painel fotovoltaico em função da temperatura 34
Figura 10 – Circuito equivalente da célula fotovoltaica. 34
Figura 11 – Circuito equivalente de um painel fotovoltaico. 35
Figura 12 – Painel fotovoltaico conectado ao conversor *boost* 36
Figura 13 – Primeira etapa de operação do conversor *boost*. 37
Figura 14 – Segunda etapa de operação do conversor *boost*. 37
Figura 15 – Distúrbio aplicado no Exemplo 1 41
Figura 16 – Normas das variáveis de estado - Exemplo 1 - Caso 1 42
Figura 17 – Evolução da função custo - Exemplo 1 - Caso 1 42
Figura 18 – Sinais de controle resultantes - Exemplo 1 - Caso 1 43
Figura 19 – Normas das variáveis de estado - Exemplo 1 - Caso 2 44
Figura 20 – Evolução da função custo - Exemplo 1 - Caso 2 44
Figura 21 – Sinais de controle resultantes - Exemplo 1 - Caso 2 45
Figura 22 – Normas das variáveis de estado - Exemplo 1 - Caso 3 46
Figura 23 – Evolução da função custo - Exemplo 1 - Caso 3 46
Figura 24 – Sinais de controle resultantes - Exemplo 1 - Caso 3 47
Figura 25 – Sinais de controle resultantes - Exemplo 1 - Caso 4 48
Figura 26 – Normas das variáveis de estado - Exemplo 1 - Caso 4 48
Figura 27 – Evolução da função custo - Exemplo 1 - Caso 4 49
Figura 28 – Distúrbio aplicado no Exemplo 2 50
Figura 29 – Saídas do sistema - Exemplo 2 - Caso 1 51
Figura 30 – Sinais de controle resultantes - Exemplo 2 - Caso 1 51
Figura 31 – Saídas do sistema - Exemplo 2 - Caso 2 52
Figura 32 – Sinais de controle resultantes - Exemplo 2 - Caso 2 53
Figura 33 – Normas das variáveis de estado - Exemplo 3 54

Figura 34 – Sinais de controle resultantes - Exemplo 3 54
Figura 35 – Evolução da função custo - Exemplo 3 55
Figura 36 – Estimativa da entrada desconhecida - Exemplo 3 55
Figura 37 – Saídas do sistema - Exemplo 4 56
Figura 38 – Sinais de controle resultantes - Exemplo 4 56
Figura 39 – Estimativa da entrada desconhecida - Exemplo 4 57
Figura 40 – Estimativa de irradiância – Dia 1 61
Figura 41 – Estimativa da tensão de saída do painel fotovoltaico – Dia 1 61
Figura 42 – Estimativa da corrente de saída do painel fotovoltaico – Dia 1 62
Figura 43 – Estimativa de irradiância – Dia 2 62
Figura 44 – Estimativa da tensão de saída do painel fotovoltaico – Dia 2 63
Figura 45 – Estimativa da corrente de saída do painel fotovoltaico – Dia 2 63
Figura 46 – Potência do sistema fotovoltaico para o Caso 1 65
Figura 47 – Potência do sistema fotovoltaico para o Caso 2 66

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Especificações do conversor *boost* utilizado nas simulações numéricas . . . 40
Tabela 2 – Custo final - Exemplo 1 - Caso 1 43
Tabela 3 – Valor máximo do sinal de controle - Exemplo 1 - Caso 1 43
Tabela 4 – Custo final - Exemplo 1 - Caso 2 45
Tabela 5 – Valor máximo do sinal de controle - Exemplo 1 - Caso 2 45
Tabela 6 – Custo final - Exemplo 1 - Caso 3 46
Tabela 7 – Valor máximo do sinal de controle - Exemplo 1 - Caso 3 47
Tabela 8 – Custo final - Exemplo 1 - Caso 4 49
Tabela 9 – Valor máximo do sinal de controle - Exemplo 1 - Caso 4 49
Tabela 10 – Custo final e RMSE - Exemplo 2 - Caso 1 51
Tabela 11 – Custo final e RMSE - Exemplo 2 - Caso 2 52
Tabela 12 – Custo final e RMSE - Exemplo 4 57
Tabela 13 – Especificações do painel solar 1STH-215-P 59
Tabela 14 – Especificações do conversor *boost* 60
Tabela 15 – nRMSE para estimativas do Dia 1 60
Tabela 16 – nRMSE para estimativas do Dia 2 62
Tabela 17 – Potência total do sistema fotovoltaico para o Caso 1 65
Tabela 18 – Potência total do sistema fotovoltaico para o Caso 2 66

LISTA DE ALGORITMOS

Algoritmo 1 – Algoritmo LQRED 20
Algoritmo 2 – Algoritmo LQIED 25

Algoritmo 3 – Algoritmo LQGUI 30
Algoritmo 4 – Algoritmo LQGUI-I 31

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

DALQR	*Disturbance Acomodating Linear Quadratic Regulator*
DALQR-I	DALQR com ação integral
ELQR	*Extended Linear Quadratic Regulator*
ELQR-I	ELQR com ação integral
KF	Filtro de Kalman
KFUI	Filtro de Kalman para sistemas com entradas desconhecidas
LQG	Regulador Linear Gaussiano
LQGUI	Regulador Linear Gaussiano para sistemas com entradas desconhecidas
LQGUI-I	LQGUI com ação integral
LQIED	LQRED com ação integral
LQR	Regulador Linear Quadrático
LQRED	Regulador Linear Quadrático para sistemas com distúrbios externos
MPPT	Rastreamento de máxima potência
MQP	Mínimos Quadrados Ponderados
MQPR	Mínimos Quadrados Ponderados Restritos
P&O	Perturba e Observa

LISTA DE SÍMBOLOS

d	Vetor de distúrbios/entradas externas
E	Parâmetro das entradas externas
F	Parâmetro do sistema
G	Parâmetro das entrada de controle
H	Parâmetro da saída
J	Funcional quadrático
k	Índice de tempo
K^d	Ganho de controle para distúrbio externo
K^ϵ	Ganho de controle para integral do erro
K^r	Ganho de controle para referência
K^x	Ganho de controle para estado
m	Dimensão do vetor de controle
M	Covariância da estimativa a priori
n	Dimensão do estado do sistema
p	Dimensão da saída do sistema
Π	Covariância do erro da estimativa a posteriori
q	Dimensão das entradas desconhecidas
Q	Ponderação do estado ou covariância da incerteza do estado
R	Ponderação do controle
u	Vetor de entradas de controle
v	Vetor de ruídos nas saídas
V	Covariância da incerteza sobre a medida
w	Vetor de ruídos nos estados
W	Covariância da incerteza sobre o estado

x	Vetor de variáveis de estado
y	Vetor de saídas
$\mathcal{L}^d$	Ganho do filtro de Kalman para entrada desconhecida
$\mathcal{L}^x$	Ganho do filtro de Kalman para estado
T sobrescrito	Indica transposta de vetor ou matriz
* sobrescrito	Indica valor ótimo
ˆ sobrescrito	Indica valor estimado
$A \succ 0$	Indica que a matriz A é definida positiva
$A \succeq 0$	Indica que a matriz A é semidefinida positiva

SUMÁRIO

1 – INTRODUÇÃO 1
1.1 Motivação 1
1.2 Formulação do Problema de Controle Ótimo 3
1.3 Objetivos 5
1.3.1 Objetivo Geral 5
1.3.2 Objetivo Específico 5
1.3.3 Objetivos Secundários 6
1.4 Contribuições 6
1.5 Estrutura do Texto 7
1.6 Publicações 7

2 – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA 8
2.1 Formulação Clássica do LQR 8
2.1.1 Solução 9
2.2 Formulação do LQR Baseada em MQPR 9
2.3 Regulador Linear Quadrático com Ação Integral 12

3 – CONTROLADORES ÓTIMOS COM REJEIÇÃO DE DISTÚRBIO 16
3.1 Regulador Linear Quadrático com Rejeição de Distúrbio 16
3.2 Regulador Linear Quadrático com Ação Integral e Rejeição de Distúrbios . . . 21

4 – REGULADOR LINEAR GAUSSIANO 27
4.1 Filtro de Kalman 27
4.2 Filtro de Kalman para Sistemas Sujeitos a Entradas Desconhecidas 28
4.3 Regulador Linear Gaussiano para Sistemas com Entradas Desconhecidas 29

5 – MODELAGEM E SIMULAÇÕES 33
5.1 Modelagem Matemática de um Painel Fotovoltaico 33
5.2 Modelagem do Conversor *Boost* Conectado a um Painel Fotovoltaico 36
5.3 Simulações Numéricas 40
5.3.1 Exemplo 1 41
5.3.1.1 Caso 1 41
5.3.1.2 Caso 2 43
5.3.1.3 Caso 3 45
5.3.1.4 Caso 4 47
5.3.2 Exemplo 2 49
5.3.2.1 Caso 1 50

5.3.2.2 Caso 2 52
5.3.3 Exemplo 3 53
5.3.4 Exemplo 4 55

6 – APLICAÇÕES DESENVOLVIDAS 58
6.1 Aplicação do KFUI na Estimativa de Irradiância 58
6.1.1 Estimativa de i_{ph_k} e v_{ph_k} 58
6.1.2 Estimativa da irradiância 59
6.1.3 Resultados 59
6.2 Regulador de Máxima Potência em Painéis Fotovoltaicos com LQIED 64
6.2.1 Caso 1 65
6.2.2 Caso 2 65

7 – CONCLUSÕES 67

Referências 69

Apêndices 73

APÊNDICE A – OUTROS MÉTODOS BASEADOS EM LQR PARA REJEIÇÃO DE DISTÚRBIOS 74
A.1 *Disturbance Acomodating Linear Quadratic Regulator* 74
A.2 *Extended Linear Quadratic Regulator* 74

1 INTRODUÇÃO

Uma das principais questões abordadas na teoria de controle é a ação de distúrbios/entradas externas sobre o sistema. Esses distúrbios correspondem a entradas que não são manipuláveis diretamente pelo controlador e podem degradar o desempenho de todo um sistema de controle se não forem considerados durante a etapa de projeto.

Um exemplo de aplicação que envolve este tipo de problema são os veículos aéreos não tripulados (UAV, *Unmanned Aerial Vehicle*), que estão sujeitos a rajadas de vento que podem impedi-los de seguir a trajetória desejada. Grande número de pesquisas tem se voltado para a rejeição de distúrbios nesta aplicação, como em Xiong et al. (2011), Smith et al. (2017) e Hoshu et al. (2019). Outra área que tem recebido muita atenção para a implementação de novas estratégias de controle é a de fontes renováveis de energia elétrica, como a fotovoltaica e eólica. Propostas de rejeição de distúrbio nestes sistemas tem sido aplicadas recentemente, como em Yu e Hu (2019), Benrabah et al. (2019) e Singh et al. (2019).

A técnica clássica para a rejeição de distúrbios é a utilização de controladores com ação integral, que reduzem o erro em regime permanente entre a saída do sistema e uma determinada referência, a qual representa a saída desejada (GOLNARAGHI; KUO, 2009; NISE, 2012). Entretanto, outras propostas de rejeição de distúrbios, como Cerri et al. (2009), Ostertag e Goyena (2011), Smith et al. (2017), Wang et al. (2017) e Singh e Pal (2017), estão relacionadas com a teoria de controle ótimo através do Regulador Linear Quadrático (LQR, *Linear Quadratic Regulator*).

Controle ótimo envolve a otimização de um determinado índice de desempenho do sistema garantindo que o mesmo seja controlado adequadamente dentro de seus limites físicos (estabilidade). O surgimento do LQR (KALMAN, 1960b) como um recurso para o caso particular em que o índice de desempenho associado ao sistema é uma função quadrática, tornou mais eficaz a solução de diversos problemas em controle ótimo relacionados à sistemas lineares modelados em espaço de estados. O LQR é amplamente utilizado devido à sua eficácia, fácil implementação e baixo custo computacional.

1.1 Motivação

Na formulação clássica do LQR, a modelagem matemática do sistema não considera a ação de distúrbios, sendo a lei de controle resultante função apenas das variáveis de estado e, como discutido recentemente em Smith et al. (2017), Wang et al. (2017) e Singh e Pal (2017), uma lei de controle que esteja relacionada com o distúrbio é mais eficiente. No entanto, essas novas propostas não contemplam a investigação de uma ação integral em suas formulações do LQR e, visto que a integração já está associada com o tema de rejeição de distúrbios, essa análise se faz necessária.

Um tipo de sistema em que o estudo da ação integral é muito discutida e envolvida com a rejeição de distúrbios são os conversores chaveados cc-cc (PADMANABAN et al., 2015; BRISILLA et al., 2019; MORENO-VALENZUELA, 2019; ARMGHAN et al., 2020), dispositivos de conversão de energia comumente empregados em sistemas fotovoltaicos. O controle desses conversores está diretamente ligado à eficiência do sistema fotovoltaico, sendo que quanto melhor for a rejeição de distúrbios por parte do controlador, maior será a produção de energia elétrica (MADUREIRA et al., 2019b; SINGH et al., 2019).

Em especial, existe o caso em que as variáveis de estado e/ou os distúrbios externos não são mensuráveis devido a fatores técnicos ou econômicos. Nestas circunstâncias, os distúrbios são conhecidos na literatura como *entradas desconhecidas* (DAROUACH et al., 1995). Por exemplo, em alguns casos os sistemas fotovoltaicos necessitam de medidas de irradiância e o instrumento de medida que realiza essa medição, o piranômetro, é muito caro (MADUREIRA et al., 2019a). Quando o sistema de controle no espaço de estados necessita de variáveis não mensuráveis, uma alternativa viável é realizar estimativas através observadores de Luenberger ou filtro de Kalman e, baseado no princípio da separação (veja Moudgalya (2007), Ostertag e Goyena (2011), Lewis et al. (2012), Lewis et al. (2007)), utilizar essas estimativas diretamente no controlador.

Entretanto, as formulações mais básicas destas ferramentas não estimam os valores das entradas desconhecidas, necessários para uma ação de controle mais eficiente conforme mencionado anteriormente. Em Ostertag e Goyena (2011) e He et al. (2017) podem ser encontradas metodologias que utilizam observadores de Luenberger para estimar a entrada desconhecida e realizar o controle em espaço de estados a partir dessa estimativa. Porém, observadores são propostos para sistemas determinísticos, em que não são considerados a presença de ruídos nas variáveis de estado e na saída do sistema.

Proposto por Kalman (1960a), o filtro de Kalman padrão (KF) é um estimador ótimo recursivo para variáveis de estado que engloba sistemas estocásticos e é muito utilizado em combinação com o LQR, o que constitui o Regulador Linear Gaussiano (LQG, *Linear Quadratic Gaussian Regulator*), como apresentado em Cerri et al. (2009) e Mateescu et al. (2012). Um KF para sistemas com entradas desconhecidas (KFUI, *Kalman Filter with Unknown Inputs*) foi proposto por Darouach et al. (1995) e estima tanto as variáveis de estado quanto entradas desconhecidas.

Dessa maneira, motivado pela crescente demanda por energia elétrica que exige cada vez mais o estudo e desenvolvimento de fontes de energia limpas e renováveis, este trabalho busca propor uma metodologia mais simples e intuitiva para o projeto de controladores ótimos para sistemas sujeitos a entradas desconhecidas, sendo considerada a inclusão de ação integral no sistema. Para isso, primeiro serão propostos um Regulador Linear Quadrático para Sistemas Lineares Sujeitos a Distúrbios Externos (LQRED, *Linear Quadratic Regulator with External Disturbance*) e um Regulador Linear Quadrático com Ação Integral para Sistemas Lineares Sujeitos a Distúrbios Externos (LQIED, *Linear Quadratic Regulator with Integral Action and External Disturbance*). Então, o LQRED e o LQIED são combinados com o KFUI obtendo

o Regulador Linear Gaussiano para Sistemas com Entradas Desconhecidas (LQGUI, *Linear Quadratic Gaussian with Unknow Inputs*). Os controladores propostos são comparados com outros métodos da literatura e aplicados em modelos espaço de estados linearizados de conversores cc-cc.

1.2 Formulação do Problema de Controle Ótimo

A teoria de controle pode ser dividida em controle clássico e controle moderno, cuja principal mudança está na adoção de modelos em espaço de estados pelo último. A principal vantagem desses modelos é representar sistemas não lineares, variantes no tempo, com múltiplas entradas e saídas e condições iniciais não nulas. Técnicas de controle ótimo, incluindo o LQR tratado neste trabalho, são propostos a partir de modelos em espaço de estados.

Neste trabalho são utilizados modelos de tempo discreto, visando a implementação das soluções propostas através de tecnologias digitais, as quais permitem maior flexibilidade para alterações no projeto do controlador.

Um modelo matemático em espaço de estados de tempo discreto é constituído por um conjunto de equações a diferenças de primeira ordem que representa um determinado sistema em função do estado x_k e entradas de controle u_k. O estado x_k é composto por variáveis de estado, as quais constituem o menor conjunto linearmente independente das variáveis[1] de um sistema dinâmico que, em função dos valores iniciais em um instante k_o relacionados aos parâmetros do sistema e entradas de controle, permite caracterizar o comportamento dessas variáveis para todo tempo $k \geq k_o$ (OGATA, 1995). As entradas de controle u_k estão associadas aos atuadores que modificam diretamente o estado do sistema. O espaço de estados de tempo contínuo é um conjunto de equações diferenciais com as mesmas características.

O modelo nominal de um sistema linear discreto em espaço de estado é dado por

$$x_{k+1} = F_k x_k + G_k u_k, \tag{1.1a}$$

$$y_k = H_k x_k, \tag{1.1b}$$

em que $x_k \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de variáveis de estado, $u_k \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entradas de controle, $y_k \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de saídas, $F_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é a matriz de parâmetros do sistema, $G_k \in \mathbb{R}^{n\times m}$ é o vetor de parâmetros de entrada, $H_k \in \mathbb{R}^{p\times n}$ é o parâmetro da saída e $k \in \mathbb{Z}$.

O LQR em sua formulação clássica consiste em solucionar o seguinte problema de minimização restrita à dinâmica do Sistema (1.1)

$$\min_{u_k} \left\{ x_{N+1}^T P_{N+1} x_{N+1} + \sum_{k=0}^{N} \left(x_k^T Q x_k + u_k^T R_k u_k \right) \right\}, \tag{1.2}$$

$$s.a\ x_{k+1} = F_k x_k + G_k u_k,$$

[1]Por exemplo, posição, velocidade, tensão e corrente. No entanto, quando o conjunto de equações a diferenças ou diferenciais é linear, é comum a utilização de transformações lineares que descaracterizam o significado físico das variáveis de estado para facilitar a análise do sistema.

em que $R_k \in \mathbb{R}^{m\times m}$ é uma matriz simétrica[2] e definida positiva[3] conhecida e P_{N+1} e $Q_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ são matrizes simétricas e semidefinidas positivas [4] também conhecidas. A solução clássica para este problema é dada em função do estado x_k conforme apresentado abaixo

$$u_k^* = f(x_k) = K_k^x x_k, \tag{1.3}$$

com $K_k^x \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Neste trabalho são considerados sistemas espaço de estados sujeitos a distúrbios externos que têm o seguinte modelo

$$x_{k+1} = F_k x_k + G_k u_k + E_k d_k, \tag{1.4a}$$

$$y_k = H_k x_k, \tag{1.4b}$$

em que $d_k \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de distúrbios/entradas externas, $E_k \in \mathbb{R}^{n\times q}$ é o parâmetro dos distúrbios externos e os demais parâmetros e variáveis são iguais aos do Sistema (1.1).

A Solução (1.3) é fornecida para modelos matemáticos que não consideram a influência de entradas externas. Entretanto, conforme ilustrado na Figura 1, os sistemas representados por estes modelos mais simples também podem estar sujeitos a distúrbios em situações práticas e, neste caso, a lei de controle u_k^* não atuará diretamente sobre os efeitos dos distúrbios d_k no sistema.

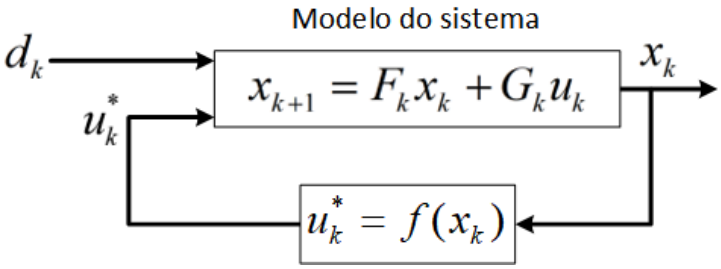


Figura 1 – Sistema de controle sem rejeição de distúrbios

Para solucionar esta questão é necessário obter um modelo com o termo $E_k d_k$ conforme (1.4) e resolver o seguinte problema de otimização

$$\min_{u_k} \left\{ x_{N+1}^T P_{N+1} x_{N+1} + \sum_{k=0}^{N} \left(x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k \right) \right\}, \tag{1.5}$$
$$s.a\ x_{k+1} = F_k x_k + G_k u_k + E_k d_k,$$

sendo a lei de controle ótima resultante função do estado x_k e do distúrbio d_k, ou seja,

$$u_k^* = f(x_k, d_k) \tag{1.6}$$

[2]Uma matriz é simétrica se for igual à sua transposta.

[3]Uma matriz $R \in \mathbb{R}^{m\times m}$ é definida positiva se $u^T R u > 0,\ \forall u \in \mathbb{R}^m$ e $u \neq 0$. A notação $R > 0$ indica que R é uma matriz definida positiva.

[4]Uma matriz $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é semidefinida positiva se $x^T Q x \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$ e $x \neq 0$. A notação $Q \geq 0$ indica que Q é uma matriz semidefinida positiva.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo Geral

Dado o Problema (1.5), constitui o objetivo geral deste trabalho a proposição de uma nova metodologia para o projeto de controladores ótimos com rejeição de distúrbio, investigando a inclusão de ação integral no sistema.

A Figura 2 mostra um diagrama de blocos que ilustra a ideia básica dessa solução.

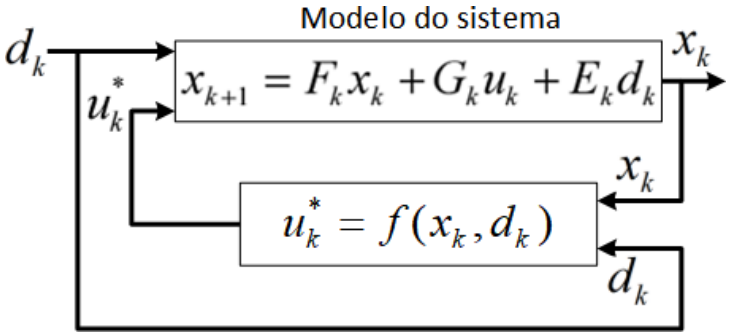


Figura 2 – Sistema de controle com rejeição de distúrbios

1.3.2 Objetivo Específico

Combinar a metodologia desenvolvida para o projeto dos controladores ótimos com rejeição de distúrbio com o KFUI a fim de proporcionar o projeto de controladores para sistemas sujeitos a entradas desconhecidas. O resultado consiste em controladores com uma lei de controle dada por

$$u_k^* = f(\hat{x}_k, \hat{d}_k), \tag{1.7}$$

em que $\hat{x}_k$ e $\hat{d}_k$ são estimativas de x_k e d_k, respectivamente, obtidas a partir de y_k pelo KFUI. Essa ideia está ilustrada na Figura 3.

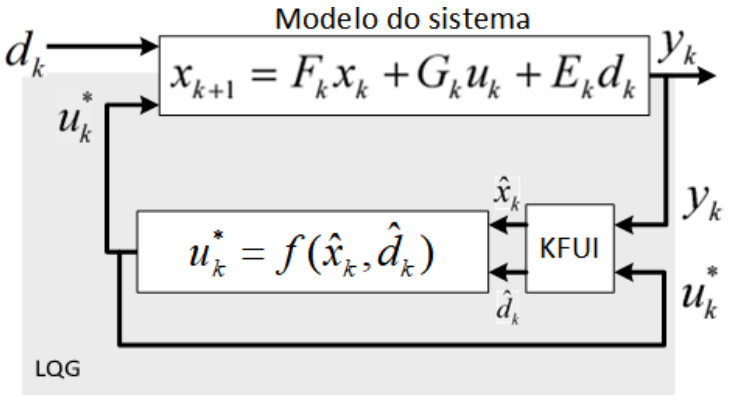


Figura 3 – Sistema de controle para entradas desconhecidas

1.3.3 Objetivos Secundários

Também constituem objetivos deste trabalho:

- Aplicação do KFUI na estimativa de irradiância através do modelo matemático de conversores chaveados cc-cc.
- Aplicação do LQIED na realização de rastreamento de máxima potência em sistemas fotovoltaicos.

1.4 Contribuições

A abordagem desta pesquisa é a rejeição de distúrbios em sistemas lineares modelados em espaços de estados. Em função deste problema, a principal contribuição deste trabalho é a formulação do LQGUI com ação integral (LQGUI-I), que, proposto de uma maneira intuitiva através de controladores quadráticos e filtro de Kalman, permite uma melhor resposta do sistema frente a entradas desconhecidas. O LQGUI com ação integral foi obtido através do LQIED, que é uma formulação proposta neste trabalho e que também constitui uma contribuição importante.

Além disso, foram contribuições decorrentes deste trabalho as seguintes aplicações desenvolvidas para sistemas fotovoltaicos:

- estimativa de irradiância através do KFUI e dos modelos matemáticos de painéis fotovoltaicos e conversores chaveados cc-cc;
- rastreamento de máxima potência utilizando LQIED.

1.5 Estrutura do Texto

Esta dissertação está organizada como segue.

- **Capítulo 2:** apresenta de maneira básica o problema de minimização de um índice de desempenho quadrático; mostra a solução clássica do LQR e outra baseada em mínimos quadrados ponderados restrito (MQPR); apresenta a formulação clássica do LQI.
- **Capítulo 3:** contém o desenvolvimento das propostas para projeto de controladores com rejeição de distúrbios, LQRED e LQIED.
- **Capítulo 4:** apresenta o KFUI e sua combinação com os controladores propostos no Capítulo 3, resultando em uma solução para sistemas sujeitos a entradas desconhecidas, nos quais não é possível medir as variáveis de estado e/ou distúrbios externos.
- **Capítulo 5:** expõe algumas simulações dos controladores propostos em um contexto de sistemas fotovoltaicos. Primeiro, são apresentadas as modelagens matemáticas do painel fotovoltaico e do conversor cc-cc do tipo *boost*. Em seguida, são feitos algumas simulações numéricas utilizando o modelo do conversor e comparando os controladores propostos com outros métodos da literatura.
- **Capítulo 6:** Apresenta os resultados de duas aplicações que foram desenvolvidas para sistemas fotovoltaicos. A primeira é uma utilização do KFUI para realizar estimativas de irradiância através dos modelos do painel e do conversor. A segunda é uma aplicação do LQIED na realização de rastreamento de máxima potência em painéis fotovoltaicos.

1.6 Publicações

- MADUREIRA, V. S.; CHAGAS, T. P. das; JESUS, G. Q. de. Irradiance Estimation Using Kalman Filter for State-space Systems with Unknown Inputs. **Anais do 14º Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente**. Galoa, 2019. Disponível em: <https://proceedings.science/proceedings/100113/_papers/111315>.
- MADUREIRA, V. S.; CHAGAS, T. P. das; JESUS, G. Q. de. Regulador Linear Quadrático com Ação Integral para Sistemas Lineares com Rejeição de Distúrbios. **Anais da 14ª Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações**. Equipe do Portal de Eventos Científicos da EESC-USP, 2019. Disponível em: <http://biblioteca.eesc.usp.br/images/soac/dincon/dincon2020anais.pdf>.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo apresenta alguns conceitos preliminares e a base matemática para o desenvolvimento dos controladores com rejeição de distúrbio no próximo capítulo. A seguir serão apresentadas a solução clássica do LQR e a formulação apresentada em Cerri (2009). Embora a primeira seja muito conhecida na literatura tradicional (OGATA, 1995; MOUDGALYA, 2007; LEWIS et al., 2012), a segunda apresenta uma contribuição para sistemas com incertezas nos parâmetros que é baseada na teoria de funções penalidade e Mínimos Quadrados Ponderados (MQP). Assim, apesar de o presente trabalho não tratar de modelos com incertezas nos parâmetros, será natural a evolução para o caso robusto em trabalhos futuros. Também será apresentada a formulação clássica do LQR com ação integral, o LQI.

2.1 Formulação Clássica do LQR

Considere o sistema linear, discreto e definido em espaço de estados na sua forma nominal (com ausência de ruído e distúrbios no modelo matemático) por

$$x_{k+1} = F_k x_k + G_k u_k, \tag{2.1a}$$

$$y_k = H_k x_k, \tag{2.1b}$$

onde $F_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $G_k \in \mathbb{R}^{n\times m}$ e $H_k \in \mathbb{R}^{p\times n}$. O problema de controle ótimo tem como objetivo minimizar um determinado índice de desempenho, determinando uma sequência de esforços de controle $\left\{u_k^*\right\}_{k=0}^{N}$ (ou seja, $u_k^*, \forall k \in [0, N]$) que faça o estado do sistema seguir uma trajetória ótima $\left\{x_k^*\right\}_{k=0}^{N}$. No caso do LQR, esse índice de desempenho corresponde à seguinte função custo quadrática

$$J = x_{N+1}^T P_{N+1} x_{N+1} + \sum_{k=0}^{N} \left(x_k^T Q_k x_k + u_k^T R_k u_k \right), \tag{2.2}$$

sendo as matrizes $P_{N+1} \succeq 0$, $Q_k \succeq 0$ e $R_k \succ 0$ todas simétricas e o problema de minimização estabelecido como segue

$$\begin{aligned} &\min_{u_k} \{J\}, \\ &s.a\ x_{k+1} = F_k x_k + G_k u_k. \end{aligned} \tag{2.3}$$

O índice de desempenho (2.2) é utilizado em problemas de mínima energia, onde se deseja obter uma sequência $\left\{u_k^*\right\}_{k=0}^{N}$ que minimiza a energia dos estados do sistema e dos esforços de controle necessários para isso, o que corresponde a manter estado e controle próximos a zero (LEWIS et al., 2012). Entretanto, por se apresentar como um problema de otimização analiticamente solucionável e que converge para trajetórias estáveis, é muito utilizado em diversas aplicações. O primeiro termo em (2.2), $x_{N+1}^T P_{N+1} x_{N+1}$, diz respeito ao estado final do sistema.

O termo $x_k^T Q_k x_k$ está associado ao quão afastado de zero o estado do sistema se encontra. Por último, $u_k^T R_k u_k$ está relacionado com a energia despendida para que a trajetória x_k^* seja atendida.

Dessa maneira, os pesos Q_k, R_k e P_{N+1} funcionam como uma balança entre o desempenho do sistema e energia a ser utilizada. Aumentar valores na matriz Q_k significa aumento de desempenho, pois penaliza as variáveis de estado do sistema para que elas se aproximem do zero mais rapidamente. Aumentar os valores em R_k penaliza os atuadores, levando-os a diminuir a energia (ou recursos) consumida pelos mesmos. Já aumentos em P_{N+1} levam à redução do estado final do sistema.

2.1.1 Solução

A solução clássica para o Problema (2.3) fornece uma sequência ótima de controle $\left\{u_k^*\right\}_{k=0}^N$ dada por (LEWIS et al., 2012)

$$u_k^* = -K_k x_k, \tag{2.4}$$

onde

$$K_k = \left(R_k + G_k^T P_{k+1} G_k\right)^{-1} G_k^T P_{k+1} F_k, \tag{2.5}$$

$$P_k = F_k^T \left(P_{k+1} - P_{k+1} G_k \left(R_k + G_k^T P_{k+1} G_k\right)^{-1} G_k^T P_{k+1}\right) F_k + Q_k, \tag{2.6}$$

em que (2.6) é uma equação algébrica de Riccati[1] de tempo discreto (DARE, *Discrete Time Algebraic Riccati Equation*).

Em malha fechada (Figura 1), o sistema (2.1) passa a ser representado, através de (2.4), por

$$x_{k+1}^* = \left(F_k - G_k K_k\right) x_k. \tag{2.7}$$

2.2 Formulação do LQR Baseada em MQPR

O problema de mínimos quadrados restritos consiste em encontrar uma solução ótima z que minimize um funcional quadrático $f(z)$ sujeito a uma restrição de igualdade $g(z)$. A formulação do problema é apresentada da seguinte maneira

$$\min_t f(z), \tag{2.8}$$

$$s.a\ g(z) = 0,$$

em que $f, g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{R}^m$.

A solução recursiva para o LQR apresentada em Cerri (2009) é obtida através de Mínimos Quadrados Ponderados Restrito (MQPR). Para isso, o autor utilizou as teorias de MQP e funções

[1] Jacopo Francesco Riccati - Matemático italiano que primeiro investigou a versão escalar deste tipo de equação: $y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$.

penalidade para obter uma solução para a função $f(z) = (Az - B)^T U (Az - B)$ sujeita à restrição de igualdade $g(z) = Cz - D$. As funções penalidade incluem as restrições de um problema de otimização diretamente na função custo, de modo que quando tais restrições são violadas o valor da função custo se eleva. A solução obtida em Cerri (2009) é apresentada na proposição abaixo.

Proposição 2.2.1. *(CERRI, 2009) Seja o problema de mínimos quadrados restritos dado por*

$$\min_z \left\{ (Az - B)^T U (Az - B) \right\}, \tag{2.9}$$

$$s.a\ Cz = D,$$

em que $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times m}$, $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma matriz de ponderação definida positiva, $z \in \mathbb{R}^m$, $B \in \mathbb{R}^n$ e $D \in \mathbb{R}^p$.

A solução ótima z^* para (2.9) é dada por

$$z^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^{-1} & 0 & A \\ 0 & 0 & C \\ A^T & C^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ D \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

Considere agora o seguinte problema de minimização

$$\min_{z,u} \{ f(z,u) \}, \tag{2.11}$$

$$s.a\ z = Fx + Gu,$$

em que $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $G \in \mathbb{R}^{n\times m}$ são conhecidos, $z \in \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathbb{R}^m$ são variáveis de decisão, $x \in \mathbb{R}^n$ é conhecido e a função objetivo $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é dada por

$$f(z,u) = z^T P z + x^T Q x + u^T R u, \tag{2.12}$$

sendo $P, Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $R \in \mathbb{R}^{n\times m}$ matrizes definidas positivas conhecidas.

Fazendo as seguintes correspondências

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \end{bmatrix} x, \mathcal{U} = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & Q \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} I & -G \end{bmatrix}, \mathcal{Z} = \begin{bmatrix} z \\ u \end{bmatrix} \text{ e } \mathcal{D} = Fx, \tag{2.13}$$

pode-se reescrever (2.11) como

$$\min_{\mathcal{Z}} \left\{ (\mathcal{A}\mathcal{Z} - \mathcal{B})^T \mathcal{U} (\mathcal{A}\mathcal{Z} - \mathcal{B}) \right\}, \tag{2.14}$$

$$s.a\ C\mathcal{Z} = \mathcal{D},$$

que tem a forma do Problema (2.9).

O corolário a seguir define o método de solução do Problema (2.11) através da substituição de (2.13) em (2.10), desde que as matrizes P, Q e R sejam definidas positivas.

Corolário 2.2.1. *(CERRI, 2009) A solução ótima (z^*, u^*) do Problema (2.11) é dada por*

$$\begin{bmatrix} z^* \\ u^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L \\ K \end{bmatrix} x \tag{2.15}$$

com

$$\begin{bmatrix} L \\ K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R^{-1} & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & -G \\ I & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -G^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.16}$$

O valor mínimo de $f(z, u)$ pode ser calculado através de

$$f(z^*, u^*) = x^T \left(L^T P L + K^T R K + Q \right) x.$$

Considere novamente o sistema (2.1),

$$x_{k+1} = F_k x_k + G_k u_k,$$

$$y_k = H_k x_k.$$

Cerri (2009) apresenta uma solução para o LQR que consiste em obter a sequência ótima $\left\{ \left(x^*_{k+1}, u^*_k \right) \right\}_{k=0}^{N}$ para o seguinte problema

$$\min_{x_{k+1}, u_k} \left\{ x_{N+1}^T P_{N+1} x_{N+1} + \sum_{k=0}^{N} \left(x_k^T Q_k x_k + u_k^T R_k u_k \right) \right\}, \tag{2.18}$$

$$s.a\ x_{k+1} = F_k x_k + G_k u_k.$$

Note que, em (2.18), a minimização é feita tanto na variável u_k quanto em x_{k+1}. A partir do corolário 2.2.1, obtém-se a solução enunciada no teorema a seguir.

Teorema 2.2.1. *(CERRI, 2009) Sejam $P_{N+1} \succ 0$, $Q_k \succ 0$ e $R_k \succ 0$ matrizes simétricas. A solução do problema de minimização (2.18) é dada por*

$$\begin{aligned} x^*_{k+1} &= S_k x_k, \\ u^*_k &= K_k x_k, \end{aligned} \tag{2.19}$$

com

$$\begin{bmatrix} S_k \\ K_k \\ P_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & F_k \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{k+1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R_k^{-1} & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Q_k^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & -G_k \\ I & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -G_k^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ F_k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.20}$$

A vantagem em utilizar a solução (2.19) ao invés da formulação clássica está associada com a solução de problemas de controle envolvendo sistemas sujeitos à incertezas paramétricas.

O Lema a seguir apresenta um resultado importante que relaciona a solução (2.19) com a formulação clássica do LQR estabelecida em (2.4) a (2.7) através da equação recursiva de Riccati.

Lema 2.2.1. *(CERRI, 2009) A Equação (2.19) pode ser equivalentemente reescrita da seguinte maneira*

$$x_{k+1}^* = \underbrace{\left(F - G\left(R + G^T P_{k+1} G\right)^{-1} G^T P_{k+1} F\right)}_{L_k} x_k, \tag{2.21}$$

$$u_k^* = \underbrace{-\left(R + G^T P_{k+1} G\right)^{-1} G^T P_{k+1} F}_{K_k} x_k, \tag{2.22}$$

sendo

$$P_k = F^T \left(P_{k+1} - P_{k+1} G\left(R + G^T P_{k+1} G\right)^{-1} G^T P_{k+1}\right) F + Q. \tag{2.23}$$

Assim, desde que $P_{N+1} \succ 0$, $Q_k \succ 0$ e $R_k \succ 0$ sejam matrizes simétricas, (2.19) e (2.4) resultam na mesma lei de controle.

2.3 Regulador Linear Quadrático com Ação Integral

Nesta seção é apresentado como pode ser incluída uma ação integral no modelo espaço de estados e como a solução clássica do LQR absorve os novos termos adicionados no sistema de controle. De um modo geral, a ação integral é utilizada nos controladores para reduzir o erro entre a resposta do sistema (saída) e uma determinada referência a ser seguida. As definições a seguir são necessárias para um melhor entendimento das consequências da ação integral sobre o sistema.

Definição 2.3.1. *(NISE, 2012) Uma função de transferência H(s) é um modelo matemático que relaciona entrada $U(s)$ e saída $Y(s)$ de um sistema no domínio de Laplace. Uma função de transferência pode ser representada através de polinômios da seguinte forma*

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{C(s + z_1)(s + z_2)\ldots}{s^h(s + p_1)(s + p_2)\ldots}, \tag{2.24}$$

onde C é uma constante.

Definição 2.3.2. *(NISE, 2012) Os valores que fazem $H(s)$ se tornar zero são chamados de zeros de $H(s)$. Nesse caso, $\{-z_1, -z_2, \ldots\}$ são zeros de $H(s)$.*

Definição 2.3.3. *(NISE, 2012) Os valores que fazem $H(s)$ se tornar infinita são chamados de polos de $H(s)$. Nesse caso, $\{-p_1, -p_2, \ldots\}$ são polos de $H(s)$. O valor zero também é um polo caso $h > 0$.*

Definição 2.3.4. *(NISE, 2012) O valor de h determina o Tipo do sistema. Se $h = 1$, o sistema é do Tipo 1. Se $h = 2$, o sistema é do Tipo 2. E assim sucessivamente.*

Definição 2.3.5. *(NISE, 2012) O número de integrações puras em uma função de transferência consiste no número de polos na origem, ou seja, equivale ao valor de h.*

Definição 2.3.6. *(NISE, 2012) Para uma referência r_k do tipo degrau (isto é, $r_k = r, \forall k \in \mathbb{Z}$), o erro em regime permanente de um sistema realimentado é nulo se houver pelo menos uma integração pura no caminho entre referência e saída.*

Dessa maneira, a ideia básica da inclusão da ação integral é aumentar o tipo do sistema para reduzir o erro em regime permanente. Nos modelos em espaço de estados a ação integral é adicionada como segue.

Considere o sistema espaço de estados com parâmetros os $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $G \in \mathbb{R}^{n\times m}$ $H \in \mathbb{R}^{p\times n}$ constantes para todo $k \in \mathbb{Z}$.

$$x_{k+1} = Fx_k + Gu_k,$$

$$y_k = Hx_k.$$

Defina o somatório (integral discreta) $\epsilon_{k+1} \in \mathbb{R}^p$ do erro entre a saída y_k e uma referência $r_k \in \mathbb{R}^p$ como

$$\epsilon_{k+1} = \epsilon_k + r_k - y_k, \tag{2.26}$$

ou

$$\epsilon_{k+1} = \epsilon_k + r_k - Hx_k. \tag{2.27}$$

A Figura 4 mostra o diagrama de blocos do sistema espaço de estados com (2.26) (ação integral) incluída. Note que a malha interna, que realimenta o estado x_k, constitui o modelo para o qual foi dada a solução do LQR na Seção 2.1. A malha externa, que realimenta y_k está associada ao termo integral ϵ_k.

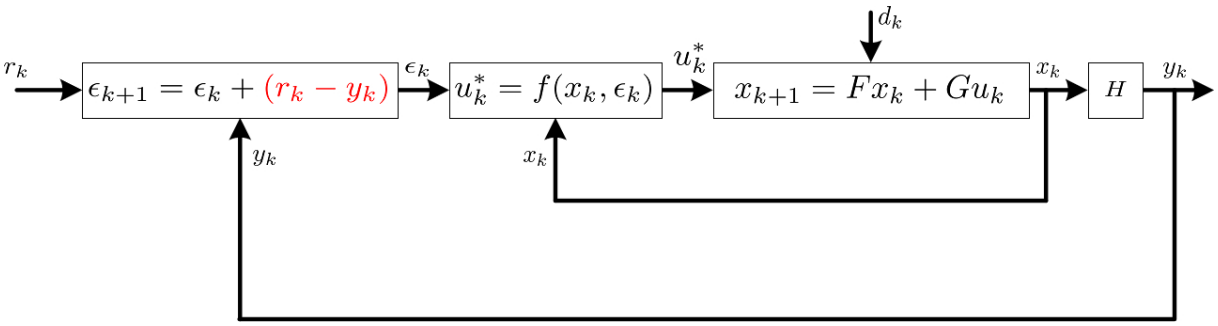


Figura 4 – Sistema espaço de estados com ação integral

Uma solução comumente empregada no problema de otimização quadrática do sistema da Figura 4 é incluir o termo ϵ_k como um novo estado no modelo matemático e obter um sistema

aumentado da seguinte forma

$$\bar{x}_{k+1} = A\bar{x}_k + Bu_k + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} r_k, \tag{2.28}$$

com

$$A = \begin{bmatrix} F & 0 \\ -H & I \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{x}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ \epsilon_k \end{bmatrix}. \tag{2.29}$$

Na literatura tradicional, a dedução desse tipo de regulador é feita através de uma análise em regime permanente onde supõe-se entradas do tipo degrau ($r_k = r, \forall k \in \mathbb{Z}$) e sistemas invariantes no tempo (OGATA, 1995; FENG et al., 2007). Esta formulação clássica do LQI minimiza o seguinte funcional

$$\min_{u_k} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\begin{bmatrix} \tilde{x}_{N+1} \\ \tilde{\epsilon}_{N+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q^x & 0 \\ 0 & Q^\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_{N+1} \\ \tilde{\epsilon}_{N+1} \end{bmatrix} + \tilde{u}_k^T R_k \tilde{u}_k \right) \right\}, \tag{2.30}$$

em que

$$\tilde{x}_k = x_k - x_\infty, \tag{2.31}$$

$$\tilde{\epsilon}_k = \epsilon_k - \epsilon_\infty, \tag{2.32}$$

$$\tilde{u}_k = u_k - u_\infty, \tag{2.33}$$

$$\tilde{r}_k = r_k - r_\infty = 0, \tag{2.34}$$

onde ∞ denota valor de regime permanente.

A solução ótima de estado estacionário que minimiza (2.30) é dada por (FENG et al., 2007)

$$u_k^* = -\left(K^x x_k + K^\epsilon \epsilon_k\right), \tag{2.35}$$

com

$$K^x = \Phi\left(P^x F - P^{x\epsilon} H\right), \tag{2.36}$$

$$K^\epsilon = \Phi P^{x\epsilon}, \tag{2.37}$$

$$\begin{aligned} P^x = &\left(F^T\left(P^x - P^x \Psi P^x\right) - H^T\left(P^{xeT} - P^{xeT}\Psi P^x\right)\right) F - \\ &\left(F^T\left(P^{xe} - P^x \Psi P^{xe}\right) - H^T\left(P^e - P^{xeT}\Psi P^{xe}\right)\right) H + Q^x, \end{aligned} \tag{2.38}$$

$$P^{xe} = F^T\left(P^{xe} - P^x \Psi P^{xe}\right) - H^T\left(P^e - P^{xeT}\Psi P^{xe}\right), \tag{2.39}$$

$$P^e = \left(P^e - P^{xeT}\Psi P^{xe}\right), \tag{2.40}$$

$$\Phi = \left(R + G^T P^x G\right)^{-1} G^T, \tag{2.41}$$

$$\Psi = G\Phi, \tag{2.42}$$

em que $P^x \in \mathbb{R}^{n\times n} \geq 0$, $P^{x\epsilon} \in \mathbb{R}^{n\times p} \geq 0$ e $P^{\epsilon} \in \mathbb{R}^{p\times p} \geq 0$.

A inclusão da ação integral aumenta o Tipo do sistema e reduz a zero o erro em regime permanente para referências do tipo degrau (NISE, 2012) e, como pode ser observado na Figura 4, garante que influências de distúrbios externos sejam rejeitadas mesmo que não estejam incluídos no modelo em espaço de estados como em (1.4), pois está sempre forçando o sistema a retornar para a referência (GOLNARAGHI; KUO, 2009; SMITH et al., 2017). Entretanto, é demonstrado no próximo capítulo que essa inclusão do distúrbio no modelo matemático do LQI reduz ainda mais o erro em regime permanente entre saída e referência.

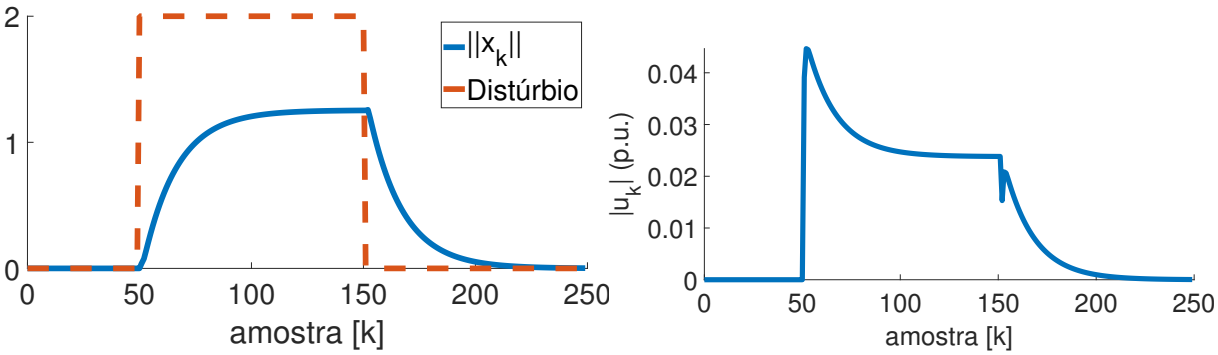
A ação integral gera também um atraso na resposta do sistema. Note que (2.35) não tem informação sobre a referência r_k, que é estabelecida através de ϵ_k que, por sua vez, depende de ϵ_{k-1}. Como apresentado em Furutani et al. (1997), Hagiwara et al. (2002) e Smith et al. (2017), soluções para este problema envolvem um termo adicional $K^r r_k$ na lei de controle, diminuindo esse atraso.

3 CONTROLADORES ÓTIMOS COM REJEIÇÃO DE DISTÚRBIO

Este capítulo apresenta duas propostas para projeto de ótimos quadráticos com rejeição de distúrbios para sistemas modelados de acordo com (1.4), o LQRED e o LQIED. Em especial, este último se mostra como uma importante contribuição por resultar em uma lei de controle que melhora ainda mais as características de rejeição de distúrbio já inerentes da ação integral. A obtenção desses controladores é realizada através de uma metodologia simples e intuitiva que consiste em utilizar sistemas aumentados que tenham a forma da representação nominal (1.1) de um sistema em espaço de estados.

3.1 Regulador Linear Quadrático com Rejeição de Distúrbio

Como discutido no Capítulo 2, o LQR é utilizado com o objetivo de manter o estado de determinado sistema em um ponto de equilíbrio nulo. Quando uma perturbação externa ocorre e o sistema deixa esse equilíbrio, o LQR atua tentando fazer com que o mesmo retorne ao estado nulo garantindo a estabilidade do sistema e levando em conta uma relação entre os esforços do controlador e desempenho, dada através das matrizes Q e R do funcional quadrático J em (2.2). Esse fato pode ser observado na Figura 5, onde um distúrbio é aplicado no intervalo [50,150] a um dado sistema discreto. Note que o módulo do esforço de controle do LQR varia apenas quando o estado do sistema é diferente de zero, e isso significa que o atuador está operando no sentido de fazer o sistema voltar para o zero. Entretanto, enquanto o distúrbio existe no sistema, o esforço de controle aplicado não consegue remover completamente o seu efeito sobre a resposta do sistema devido à sua dinâmica.



(a) (b)

Figura 5 – Exemplo de sistema de controle com LQR: (a) Norma dos estados e distúrbio, (b) Sinal de controle resultante.

Nesse sentido, levando em consideração que a ideia do controlador ótimo quadrático é minimizar o índice de desempenho J em (2.2), o controlador com rejeição de distúrbios deve

buscar reduzir, com relação à formulação clássica, o valor desse mesmo índice de desempenho quando o sistema está sujeito a esses distúrbios.

Considere novamente o sistema (1.4),

$$x_{k+1} = F_k x_k + G_k u_k + E_k d_k,$$

$$y_k = H_k x_k.$$

O teorema a seguir apresenta um novo método para o projeto de controladores ótimos quadráticos com rejeição de distúrbios. A metodologia consiste em criar um modelo aumentado contendo o parâmetro dos distúrbios externos e substituí-lo na solução clássica do LQR (2.4).

Teorema 3.1.1. *Considere o sistema linear discreto sujeito a distúrbios externos representado em espaço de estado por (1.4).*

Defina a forma aumentada de (1.4) como

$$\mathcal{X}_{k+1} = \mathcal{F}_k \mathcal{X}_k + \mathcal{G}_k u_k \tag{3.2}$$

através das seguintes identidades

$$\mathcal{X}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ d_k \end{bmatrix}, \mathcal{F}_k = \begin{bmatrix} F_k & E_k \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{G}_k = \begin{bmatrix} G_k \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

Considere o seguinte problema de minimização quadrática associado ao Sistema (3.2)

$$\min_{u_k} \left\{ \mathcal{X}_{N+1}^T \mathcal{P}_{N+1} \mathcal{X}_{N+1} + \sum_{k=0}^{N} \left(\mathcal{X}_k^T \mathcal{Q}_k \mathcal{X}_k + u_k^T R_k u_k \right) \right\}, \tag{3.4}$$

$$s.a\ \mathcal{X}_{k+1} = \mathcal{F}_k \mathcal{X}_k + \mathcal{G}_k u_k,$$

com as matrizes $\mathcal{P}_{N+1} = \mathcal{P}_{N+1}^T \geq 0$, $\mathcal{Q}_k = \mathcal{Q}_k^T \geq 0$ e $R_k = R_k^T > 0$ conhecidas e com dimensões apropriadas em relação a (3.3) como segue

$$\mathcal{P}_{N+1} = \begin{bmatrix} P_{N+1}^x & P_{N+1}^{xd} \\ P_{N+1}^{dx} & P_{N+1}^d \end{bmatrix} \text{ e } \mathcal{Q}_k = \begin{bmatrix} Q_k^x & 0 \\ 0 & Q_k^d \end{bmatrix}, \tag{3.5}$$

onde $P_{N+1}^x, Q_k^x \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P_{N+1}^d, Q_k^d \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $P_{N+1}^{xd} \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $P_{N+1}^{dx} \in \mathbb{R}^{q \times n}$.

A solução ótima para o Problema (3.4) consiste no Regulador Linear Quadrático para Sistemas Lineares Sujeitos a Distúrbios Externos (LQRED, Linear Quadratic Regulator with External Disturbance) e é dada por

$$u_k^* = -\mathcal{K}_k \mathcal{X}_k, \tag{3.6}$$

em que

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_k &= \begin{bmatrix} K_k^x & K_k^d \end{bmatrix} = \left(R_k + \mathcal{G}_k^T \mathcal{P}_{k+1} \mathcal{G}_k \right)^{-1} \mathcal{G}_k^T \mathcal{P}_{k+1} \mathcal{F}_k \\ &= \begin{bmatrix} \Phi_k P_{k+1}^x F_k & \Phi_k P_{k+1}^x E_k \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\mathcal{P}_k = \mathcal{F}_k^T \left(\mathcal{P}_{k+1} - \mathcal{P}_{k+1}\mathcal{G}_k \left(R_k + \mathcal{G}_k^T \mathcal{P}_{k+1} \mathcal{G}_k \right)^{-1} \mathcal{G}_k^T \mathcal{P}_{k+1} \right) \mathcal{F}_k + \mathcal{Q}_k, \tag{3.8}$$

$$P_k^x = F_k^T \left(P_{k+1}^x - P_{k+1}^x G_k \Phi_k P_{k+1}^x \right) F_k + Q_k^x, \tag{3.9}$$

e

$$\Phi_k = \left(R_k + G_k^T P_{k+1}^x G_k \right)^{-1} G_k^T. \tag{3.10}$$

O sistema em malha fechada através de (3.6) é dado por

$$x_{k+1}^* = \mathcal{S}_k \mathcal{X}_k, \tag{3.11}$$

sendo

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_k &= \left[\begin{array}{cc} S_k^x & S_k^d \end{array} \right] = (\mathcal{F}_k - \mathcal{G}_k \mathcal{K}_k) \\ &= \left[\begin{array}{cc} \left(F_k - G_k K_k^x\right) & \left(E_k - G_k K_k^d\right) \end{array} \right]. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Demonstração.

1) Lei de controle

A solução ótima u_k^* apresentada no Teorema 3.1.1 é obtida diretamente através da substituição de (3.3) e (3.5) na solução clássica (2.4), que resulta em

$$u_k^* = -\left(R_k + \left[\begin{array}{c} G_k \\ 0 \end{array} \right]^T \left[\begin{array}{cc} P_{k+1}^x & P_{k+1}^{xd} \\ P_{k+1}^{dx} & P_{k+1}^d \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} G_k \\ 0 \end{array} \right] \right)^{-1} \left[\begin{array}{c} G_k \\ 0 \end{array} \right]^T \left[\begin{array}{cc} P_{k+1}^x & P_{k+1}^{xd} \\ P_{k+1}^{dx} & P_{k+1}^d \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} F_k & E_k \\ 0 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x_k \\ d_k \end{array} \right]. \tag{3.13}$$

Desenvolvendo (3.13) tem-se

$$u_k^* = -\left(R_k + G_k^T P_{k+1}^x G_k \right)^{-1} G_k^T \left[\begin{array}{cc} P_{k+1}^x F_k & P_{k+1}^x E_k \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x_k \\ d_k \end{array} \right]. \tag{3.14}$$

Definindo

$$\Phi_k = \left(R_k + G_k^T P_{k+1}^x G_k \right)^{-1} G_k^T, \tag{3.15}$$

e substituindo em (3.14) obtém-se a forma vetorial de u_k^* dada por

$$u_k^* = -\left[\begin{array}{cc} \Phi_k P_{k+1}^x F_k & \Phi_k P_{k+1}^x E_k \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x_k \\ d_k \end{array} \right]. \tag{3.16}$$

A partir de (3.16) pode-se fazer as seguintes identificações

$$\mathcal{K}_k = \left[\begin{array}{cc} K_k^x & K_k^d \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} \Phi_k P_{k+1}^x F_k & \Phi_k P_{k+1}^x E_k \end{array} \right]. \tag{3.17}$$

Substituindo (3.17) em (3.16) resulta na seguinte lei de controle ótima para sistemas sujeitos a distúrbios externos

$$u_k^* = -\left(K_k^x x_k + K_k^d d_k \right), \tag{3.18}$$

que é equivalente a (3.6)

2) Equação de estado

A solução ótima x^*_{k+1} apresentada no Teorema 3.1.1 é obtida substituindo (3.18) na equação de estado do sistema (1.4), da seguinte forma

$$x^*_{k+1} = F_k x_k + G_k u^*_k + E_k d_k \tag{3.19}$$

$$= F_k x_k - G_k \left(K^x_k x_k + K^d_k d_k \right) + E_k d_k, \tag{3.20}$$

resultando em

$$x^*_{k+1} = \left(F_k - G_k K^x_k \right) x_k + \left(E_k - G_k K^d_k \right) d_k, \tag{3.21}$$

ou, em forma vetorial,

$$x^*_{k+1} = \begin{bmatrix} \left(F_k - G_k K^x_k \right) & \left(E_k - G_k K^d_k \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ d_k \end{bmatrix}. \tag{3.22}$$

A partir de (3.22) pode-se fazer as seguintes identificações

$$\mathcal{S}_k = \begin{bmatrix} S^x_k & S^d_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(F_k - G_k K^x_k \right) & \left(E_k - G_k K^d_k \right) \end{bmatrix},$$

conforme apresentado em (3.12).

3) Solução para a equação de Riccati

A substituição de (3.3) e (3.5) na solução por equação de Riccati (2.6) resulta em

$$\begin{bmatrix} P^x_k & P^{xd}_k \\ P^{dx}_k & P^d_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^T_k \left(P^x_{k+1} - P^x_{k+1} G_k \Phi_k P^x_{k+1} \right) F_k & F^T_k \left(P^x_{x+1} - P^x_{k+1} G_k \Phi_k P^x_{k+1} \right) E_k \\ E^T_k \left(P^x_{k+1} - P^x_{k+1} G_k \Phi_k P^x_{k+1} \right) F_k & E^T_k \left(P^x_{k+1} - P^x_{k+1} G_k \Phi_k P^x_{k+1} \right) E_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q^x_k & 0 \\ 0 & Q^d_k \end{bmatrix}. \tag{3.23}$$

□

A Figura 2 mostra o diagrama de blocos para a solução fornecida pelo Teorema 3.1.1, em que u^*_k é dado por (3.6). Com relação à formulação clássica do LQR essa solução deve fornecer um menor valor para o funcional quadrático (2.2) caso exista $d_k \neq 0$ para algum $k \in [0, N]$.

Observação 3.1.1. *Caso $d_k = 0$, a solução resultante do Teorema 3.1.1 tem a mesma solução do LQR clássico dada por (2.4). Com isso, os ganhos K^x_k e K^d_k são independentes um do outro na obtenção de u^*_k.*

O Algoritmo 1 resume o Teorema 3.1.1, mostrando sua implementação. Note nesse algoritmo a ideia estabelecida na Observação 3.1.1: as operações realizadas são semelhantes à solução clássica do LQR apresentada na Seção 2.1, diferindo apenas pelo cálculo de um único termo extra, K^d_k, que, por sua vez, é obtido de forma semelhante a K^x_k, apenas substituindo

F_k por E_k. Dessa maneira, não ocorrem aumentos significativos no grau de dificuldade de implementação nem no tempo de cômputo da solução u_k com relação ao método clássico.

Algoritmo 1: Algoritmo LQRED

Dados iniciais: $Q_k^x \succeq 0$, $R_k \succ 0$, F_k,G_k,E_k, d_k, conhecidos para todo $k \in [0, N]$, $P_{N+1}^x \succeq 0$, x_0 e N.

for $k = N$ **to** 0 **do**

$$\Phi_k \leftarrow \left(R_k + G_k^T P_{k+1}^x G_k\right)^{-1} G_k^T$$
$$K_k^x \leftarrow \Phi_k P_{k+1}^x F_k$$
$$K_k^d \leftarrow \Phi_k P_{k+1}^x E_k$$
$$P_k^x \leftarrow F_k^T \left(P_{k+1}^x - P_{k+1}^x G_k \Phi_k P_{k+1}^x\right) F_k$$

end

for $k = 0$ **to** N **do**

$$u_k^* \leftarrow -\left(K_k^x x_k + K_k^d d_k\right)$$
$$x_{k+1}^* \leftarrow \left(F_k - G_k K_k^x\right) x_k + \left(E_k - G_k K_k^d\right) d_k$$

end

Observação 3.1.2. *Note em (3.16) que, em relação a $\mathcal{P}$, apenas o cálculo de P_k^x é necessário para a obtenção da solução ótima (x_{k+1}^*, u_k^*) e que P_k^x corresponde à equação recursiva de Riccati (2.6). Dessa maneira, os pesos P_k^d, P_k^{xd}, P_k^{dx} e Q_k^d são irrelevantes sobre o valor de u_k^*.*

Proposição 3.1.1. *Sejam $\mathcal{P}_{N+1} = \mathcal{P}_{N+1}^T \succ 0$, $\mathcal{Q}_k = \mathcal{Q}_k^T \succ 0$ e $R_k \succ 0$ conhecidas, o resultado apresentado no Teorema 3.1.1 pode ser igualmente obtido ao utilizar o sistema aumentado (3.3) diretamente em (2.19), resultando na seguinte solução*

$$\begin{bmatrix} x_{k+1}^* \\ u_k^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{S}_k \\ \mathcal{K}_k \end{bmatrix} \mathcal{X}_k, \tag{3.24}$$

em que $\mathcal{S}_k$ e $\mathcal{K}_k$ são obtidos através da seguinte recursão

$$\begin{bmatrix} \mathcal{S}_k \\ \mathcal{K}_k \\ \mathcal{P}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & \mathcal{F}_k \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{k+1}{}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R_k^{-1} & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & \mathcal{Q}_k^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & -\mathcal{G}_k \\ I & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -\mathcal{G}_k^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ \mathcal{F}_k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.25}$$

Demonstração. Direta pela equivalência entre a solução aumentada apresentada em (3.6) - (3.8) e a solução clássica do LQR em (2.4) - (2.6) e pelo estabelecido no Lema 2.2.1. □

O resultado mostrado na Proposição 3.1.1 foi apresentado em Cerri et al. (2009) através de outra metodologia e a vantagem de sua utilização em relação ao Teorema 3.1.1, embora os resultados de ambos os métodos sejam iguais, consiste em permitir a abordagem de sistemas sujeitos a incertezas paramétricas em trabalhos futuros.

3.2 Regulador Linear Quadrático com Ação Integral e Rejeição de Distúrbios

O teorema a seguir apresenta uma nova metodologia para o projeto de controladores ótimos quadráticos com ação integral e rejeição de distúrbios. O método foi desenvolvido de uma maneira mais simples que a metodologia clássica apresentada na Seção 2.3 e que considera o Sistema (1.4) sujeito a distúrbios externos. A vantagem dessa nova formulação é que a referência r_k foi considerada parte do sistema aumentado, não havendo necessidade de definir equações de erro como em (2.31) a (2.34), que exigem que o sistema seja invariante no tempo como em (2.25). Além disso, um ganho K_k^r para a referência é obtido diretamente, sem a necessidade de cálculos extras como em Smith et al. (2017). Porém, assim como d_k, é necessário atualizar o valor de r_k em todo instante k caso a referência não seja degrau.

Teorema 3.2.1. *Considere o sistema linear definido por (1.4) e com ação integral discreta dada por*

$$\epsilon_{k+1} = \epsilon_k + r_k - H_k x_k. \tag{3.26}$$

Defina a sua forma aumentada

$$\mathcal{X}_{k+1} = \mathcal{F}_k \mathcal{X}_k + \mathcal{G}_k u_k \tag{3.27}$$

através das seguintes identidades

$$\mathcal{X}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ \epsilon_k \\ r_k \\ d_k \end{bmatrix}, \mathcal{F}_k = \begin{bmatrix} F_k & 0 & 0 & E_k \\ -H_k & I & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{G}_k = \begin{bmatrix} G_k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.28}$$

Considere o seguinte problema de minimização quadrática associado ao Sistema (3.27)

$$\min_{u_k} \left\{ \mathcal{X}_{N+1}^T \mathcal{P}_{N+1} \mathcal{X}_{N+1} + \sum_{k=0}^{N} \left(\mathcal{X}_k^T \mathcal{Q}_k \mathcal{X}_k + u_k^T R_k u_k \right) \right\}, \tag{3.29}$$

$$s.a\ \mathcal{X}_{k+1} = \mathcal{F}_k \mathcal{X}_k + \mathcal{G}_k u_k,$$

com as matrizes $\mathcal{P}_{N+1} = \mathcal{P}_{N+1}^T \geq 0$, $\mathcal{Q}_k = \mathcal{Q}_k^T \geq 0$ e $R_k = R_k^T > 0$ conhecidas e com dimensões apropriadas em relação a (3.28) como segue

$$\mathcal{P}_{N+1} = \begin{bmatrix} P_{N+1}^x & P_{N+1}^{x\epsilon} & P_{N+1}^{xr} & P_{N+1}^{xd} \\ P_{N+1}^{\epsilon x} & P_{N+1}^{\epsilon} & P_{N+1}^{\epsilon r} & P_{N+1}^{\epsilon d} \\ P_{N+1}^{rx} & P_{N+1}^{r\epsilon} & P_{N+1}^{r} & P_{N+1}^{rd} \\ P_{N+1}^{dx} & P_{N+1}^{d\epsilon} & P_{N+1}^{dr} & P_{N+1}^{d} \end{bmatrix}, \mathcal{Q}_k = diag(Q_k^x, Q_k^\epsilon, Q_k^r, Q_k^d), \tag{3.30}$$

onde $P_{N+1}^x, Q_k^x \in \mathbb{R}^{n\times n}$; $P_{N+1}^{x\epsilon}, P_{N+1}^{xr} \in \mathbb{R}^{n\times p}$; $P_{N+1}^{xd} \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $P_{N+1}^{\epsilon}, P_{N+1}^{r}, P_{N+1}^{\epsilon r}, P_{N+1}^{r\epsilon}, Q_k^\epsilon, Q_k^r \in \mathbb{R}^{p\times p}$; $P_{N+1}^{\epsilon x}, P_{N+1}^{rx} \in \mathbb{R}^{p\times n}$; $P_{N+1}^{\epsilon d}, P_{N+1}^{rd} \in \mathbb{R}^{p\times q}$; $P_{N+1}^{d}, Q_k^d \in \mathbb{R}^{q\times q}$; $P_{N+1}^{dx} \in \mathbb{R}^{q\times n}$; $P_{N+1}^{d\epsilon}, P_k^{dr} \in \mathbb{R}^{q\times p}$.

A solução para o Problema (3.29) resulta no Regulador Linear Quadrático com Ação Integral para Sistemas Lineares Sujeitos a Distúrbios Externos (LQIED, Linear Quadratic Regulator with Integral Action and External Disturbance) e é dada por

$$u_k^* = -\mathcal{K}_k \mathcal{X}_k, \tag{3.31}$$

em que

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_k &= \left[\begin{array}{cccc} K_k^x & K_k^\epsilon & K_k^r & K_k^d \end{array}\right] = \left(R_k + \mathcal{G}_k^T \mathcal{P}_{k+1} \mathcal{G}_k\right)^{-1} \mathcal{G}_k^T \mathcal{P}_{k+1} \mathcal{F}_k, \\ &= \left[\begin{array}{cccc} \Phi_k \left(P_{k+1}^x F_k - P_{k+1}^{x\epsilon} H_k\right) & \Phi_k P_{k+1}^{x\epsilon} & \Phi_k P_{k+1}^{x\epsilon} & \Phi_k P_{k+1}^x E_k, \end{array}\right],\end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\mathcal{P}_k = \mathcal{F}_k^T \left(\mathcal{P}_{k+1} - \mathcal{P}_{k+1} \mathcal{G}_k \left(R_k + \mathcal{G}_k^T \mathcal{P}_{k+1} \mathcal{G}_k\right)^{-1} \mathcal{G}_k^T \mathcal{P}_{k+1}\right) \mathcal{F}_k + \mathcal{Q}_k, \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}P_k^x = &\left(F_k^T \left(P_{k+1}^x - P_{k+1}^x \Psi_k P_{k+1}^x\right) - H_k^T \left(P_{k+1}^{x\epsilon\ T} - P_{k+1}^{x\epsilon\ T} \Psi_k P_{k+1}^x\right)\right) F_k - \\ &\left(F_k^T \left(P_{k+1}^{x\epsilon} - P_{k+1}^x \Psi_k P_{k+1}^{x\epsilon}\right) - H_k^T \left(P_{k+1}^\epsilon - P_{k+1}^{x\epsilon\ T} \Psi_k P_{k+1}^{x\epsilon}\right)\right) H_k + Q_k^x,\end{aligned} \tag{3.34}$$

$$P_k^{x\epsilon} = F_k^T \left(P_{k+1}^{x\epsilon} - P_{k+1}^x \Psi_k P_{k+1}^{x\epsilon}\right) - H_k^T \left(P_{k+1}^\epsilon - P_{k+1}^{x\epsilon\ T} \Psi_k P_{k+1}^{x\epsilon}\right), \tag{3.35}$$

$$P_k^\epsilon = \left(P_{k+1}^\epsilon - P_{k+1}^{x\epsilon\ T} \Psi_k P_{k+1}^{x\epsilon}\right) + Q_k^\epsilon, \tag{3.36}$$

$$\Phi_k = \left(R_k + G_k^T P_{k+1}^x G_k\right)^{-1} G_k^T \tag{3.37}$$

e

$$\Psi_k = G_k \Phi_k. \tag{3.38}$$

O sistema em malha fechada através de (3.31) é dado por

$$x_{k+1}^* = \mathcal{S}_k \mathcal{X}_k, \tag{3.39}$$

em que

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_k &= \left[\begin{array}{cccc} S_k^x & S_k^\epsilon & S_k^r & S_k^d \end{array}\right] = \left(\mathcal{F}_k - \mathcal{G}_k \mathcal{K}_k\right) \\ &= \left[\begin{array}{cccc} \left(F_k - G_k K_k^x\right) & -G_k K_k^\epsilon & -G_k K_k^r & \left(E_k - G_k K_k^d\right) \end{array}\right].\end{aligned} \tag{3.40}$$

Demonstração.

1) Lei de controle

A solução ótima u_k^* apresentada no Teorema 3.2.1 é obtida diretamente através da substituição de (3.28) e (3.30) na solução por equação de Riccati, que resulta em

$$u_k^* = -\left(R_k + \left[\begin{array}{c} G_k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right]^T \left[\begin{array}{cccc} P_{k+1}^x & P_{k+1}^{x\epsilon} & P_{k+1}^{xr} & P_{k+1}^{xd} \\ P_{k+1}^{\epsilon x} & P_{k+1}^\epsilon & P_{k+1}^{\epsilon r} & P_{k+1}^{ed} \\ P_{k+1}^{rx} & P_{k+1}^{r\epsilon} & P_{k+1}^r & P_{k+1}^{rd} \\ P_{k+1}^{dx} & P_{k+1}^{d\epsilon} & P_{k+1}^{dr} & P_{k+1}^d \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} G_k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right]\right)^{-1} \left[\begin{array}{c} G_k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right]^T \tag{3.41}$$

$$\begin{bmatrix} P^x_{k+1} & P^{x\epsilon}_{k+1} & P^{xr}_{k+1} & P^{xd}_{k+1} \\ P^{\epsilon x}_{k+1} & P^{\epsilon}_{k+1} & P^{\epsilon r}_{k+1} & P^{\epsilon d}_{k+1} \\ P^{rx}_{k+1} & P^{r\epsilon}_{k+1} & P^{r}_{k+1} & P^{rd}_{k+1} \\ P^{dx}_{k+1} & P^{d\epsilon}_{k+1} & P^{dr}_{k+1} & P^{d}_{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_k & 0 & 0 & E_k \\ -H_k & I & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \epsilon_k \\ r_k \\ d_k \end{bmatrix}.$$

Desenvolvendo (3.41) tem-se

$$u^*_k = -\left(R_k + G^T_k P^x_{k+1} G_k\right)^{-1} G^T_k \begin{bmatrix} \left(P^x_{k+1}F_k - P^{x\epsilon}_{k+1}H_k\right) & P^{x\epsilon}_{k+1} & P^{x\epsilon}_{k+1} & P^x_{k+1}E_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \epsilon_k \\ r_k \\ d_k \end{bmatrix}. \tag{3.42}$$

Definindo

$$\Phi_k = \left(R_k + G^T_k P^x_{k+1} G_k\right)^{-1} G^T_k \tag{3.43}$$

e substituindo em (3.42) obtém-se a forma vetorial de u^*_k

$$u^*_k = -\begin{bmatrix} \Phi_k\left(P^x_{k+1}F_k - P^{x\epsilon}_{k+1}H_k\right) & \Phi_k P^{x\epsilon}_{k+1} & \Phi_k P^{x\epsilon}_{k+1} & \Phi_k P^x_{k+1}E_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \epsilon_k \\ r_k \\ d_k \end{bmatrix}. \tag{3.44}$$

A partir de (3.44) pode-se fazer as seguintes identificações

$$\mathcal{K}_k = \begin{bmatrix} K^x_k & K^\epsilon_k & K^r_k & K^d_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_k\left(P^x_{k+1}F_k - P^{x\epsilon}_{k+1}H_k\right) & \Phi_k P^{x\epsilon}_{k+1} & \Phi_k P^{x\epsilon}_{k+1} & \Phi_k P^x_{k+1}E_k \end{bmatrix}. \tag{3.45}$$

Substituindo (3.45) em (3.16) resulta na seguinte lei de controle ótima para sistemas com ação integral sujeitos a distúrbios externos

$$u^*_k = -\left(K^x_k x_k + K^\epsilon_k \epsilon_k + K^r_k r_k + K^d_k d_k\right), \tag{3.46}$$

que corresponde a (3.31).

2) Equação de estado

A solução ótima x^*_{k+1} apresentada no Teorema 3.2.1 é obtida substituindo (3.46) na equação de estado do sistema (1.4), da seguinte forma

$$\begin{aligned} x^*_{k+1} &= F_k x_k + G_k u^*_k + E_k d_k \\ &= F_k x_k - G_k\left(K^x_k x_k + K^\epsilon_k \epsilon_k + K^r_k r_k + K^d_k d_k\right) + E_k d_k, \end{aligned} \tag{3.47}$$

resultando em

$$x^*_{k+1} = \left(F_k - G_k K^x_k\right) x_k - G_k\left(K^\epsilon_k \epsilon_k + K^r_k r_k\right) + \left(E_k - G_k K^d_k\right) d_k \tag{3.48}$$

ou

$$x_{k+1}^* = \begin{bmatrix} \left(F_k - G_k K_k^x\right) & -G_k K_k^\epsilon & -G_k K_k^r & \left(E_k - G_k K_k^d\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \epsilon_k \\ r_k \\ d_k \end{bmatrix}. \tag{3.49}$$

A partir de (3.49) pode-se fazer as seguintes identificações

$$\mathcal{S}_k = \begin{bmatrix} \left(F_k - G_k K_k^x\right) & -G_k K_k^\epsilon & -G_k K_k^r & \left(E_k - G_k K_k^d\right) \end{bmatrix},$$

que correspondem a (3.40).

3) Solução para a equação de Riccati

Como, por hipótese, $\mathcal{P}_k = \mathcal{P}_k^T \geq 0$, $\mathcal{Q}_k = \mathcal{Q}_k^T > 0$, a substituição de (3.28) e (3.30) na solução por equação de Riccati (2.6) resulta em

$$\begin{bmatrix} P_k^x & P_k^{x\epsilon} & P_k^{xr} & P_k^{xd} \\ P_k^{\epsilon x} & P_k^\epsilon & P_k^{er} & P_k^{ed} \\ P_k^{rx} & P_k^{r\epsilon} & P_k^r & P_k^{rd} \\ P_k^{dx} & P_k^{d\epsilon} & P_k^{dr} & P_k^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \beta & \chi \\ \beta^T & \delta & \delta & \varphi \\ \beta^T & \delta & \delta & \varphi \\ \chi^T & \varphi^T & \varphi^T & \gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_k^x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_k^\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_k^r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_k^d \end{bmatrix}, \tag{3.50}$$

sendo

$$\alpha = \left(F_k^T \left(P_{k+1}^x - P_{k+1}^x \Psi_k P_{k+1}^x\right) - H_k^T \left(P_{k+1}^{x\epsilon\ T} - P_{k+1}^{x\epsilon\ T} \Psi_k P_{k+1}^x\right)\right) F_k \tag{3.51}$$

$$- \left(F_k^T \left(P_{k+1}^{x\epsilon} - P_{k+1}^x \Psi_k P_{k+1}^{x\epsilon}\right) - H_k^T \left(P_{k+1}^{e} - P_{k+1}^{xe\ T} \Psi_k P_{k+1}^{xe}\right)\right) H_k, \tag{3.52}$$

$$\beta = F_k^T \left(P_{k+1}^{x\epsilon} - P_{k+1}^x \Psi_k P_{k+1}^{x\epsilon}\right) - H_k^T \left(P_{k+1}^{\epsilon} - P_{k+1}^{xe\ T} \Psi_k P_{k+1}^{xe}\right), \tag{3.53}$$

$$\chi = \left(F_k^T \left(P_{k+1}^x - P_{k+1}^x \Psi_k P_{k+1}^x\right) - H_k^T \left(P_{k+1}^{x\epsilon\ T} - P_{k+1}^{x\epsilon\ T} \Psi_k P_{k+1}^x\right)\right) E_k, \tag{3.54}$$

$$\delta = \left(P_{k+1}^{\epsilon} - P_{k+1}^{x\epsilon\ T} \Psi_k P_{k+1}^{xe}\right), \tag{3.55}$$

$$\varphi = \left(P_{k+1}^{x\epsilon\ T} - P_{k+1}^{x\epsilon\ T} \Psi_k P_{k+1}^x\right) E_k, \tag{3.56}$$

$$\gamma = E_k^T \left(P_{k+1}^x - P_{k+1}^x \Psi_k P_{k+1}^x\right) E_k. \tag{3.57}$$

□

A Figura 6 mostra o diagrama de blocos para a solução fornecida pelo Teorema 3.2.1, em que u_k^* é dado por (3.31). Com relação à formulação clássica do LQI (Figura 4), essa solução deve fornecer uma melhor resposta do sistema caso exista $d_k \neq 0$ para algum $k \in [0, N]$.

Observação 3.2.1. *Os ganhos K_k^x e K_k^ϵ bem como as matrizes P^x, P^ϵ e $P^{x\epsilon}$ apresentados no Teorema 3.2.1 são iguais aos da formulação clássica em (2.36) a (2.40). Assim, não havendo distúrbio no sistema, ou seja, $d_k = 0$, a formulação proposta no Teorema 3.2.1 é igual à do LQI clássico apresentado na Seção 2.3.*

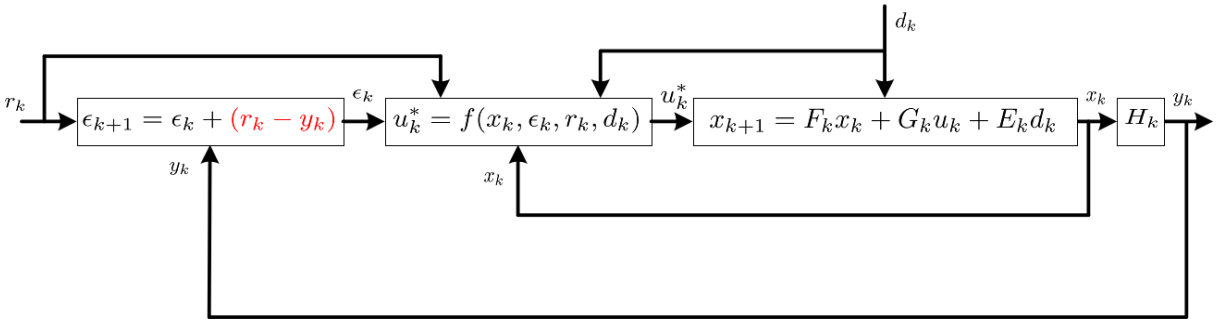


Figura 6 – Sistema espaço de estados com ação integral e rejeição de distúrbios

O Algoritmo 2 mostra a implementação do Teorema 3.2.1. Conforme já estabelecido pela Observação 3.2.1, nota-se nesse algoritmo que as operações realizadas são semelhantes à solução clássica do LQI apresentada na Seção 2.3, diferindo apenas pelo cálculo dos termos, K_k^d e K_k^r, sendo este último igual a K_k^ϵ e o primeiro obtido da mesma maneira que no Algoritmo 1. Assim, não ocorrem aumentos significativos no grau de dificuldade de implementação nem no tempo de cômputo da solução u_k com relação ao LQI clássico.

Algoritmo 2: Algoritmo LQIED

Dados iniciais: $Q_k^x \succeq 0$, $Q_k^\epsilon \succeq 0$, $R_k \succ 0$, F_k,G_k,E_k, H_k, r_k, d_k, conhecidos para todo $k \in [0, N]$, $P_{N+1}^x \succeq 0$, $P_{N+1}^{x\epsilon} \succeq 0$, $P_{N+1}^\epsilon \succeq 0$, x_0 $\epsilon_0 = 0$ e N.

for $k = N$ **to** 0 **do**

$$\Phi_k \leftarrow \left(R_k + G_k^T P_{k+1}^x G_k\right)^{-1} G_k^T$$
$$\Psi_k \leftarrow G_k \Phi_k$$
$$K_k^x \leftarrow \Phi_k \left(P_{k+1}^x F_k - P_{k+1}^{x\epsilon} H_k\right)$$
$$K_k^\epsilon \leftarrow \Phi_k P_{k+1}^{x\epsilon}$$
$$K_k^r \leftarrow \Phi_k P_{k+1}^{x\epsilon}$$
$$K_k^d \leftarrow \Phi_k P_{k+1}^x E_k$$
$$P_k^x \leftarrow \left(F_k^T \left(P_{k+1}^x - P_{k+1}^x \Psi_k P_{k+1}^x\right) - H_k^T \left(P_{k+1}^{x\epsilon\ T} - P_{k+1}^{x\epsilon\ T} \Psi_k P_{k+1}^x\right)\right) F_k - \left(F_k^T \left(P_{k+1}^{x\epsilon} - P_{k+1}^x \Psi_k P_{k+1}^{x\epsilon}\right) - H_k^T \left(P_{k+1}^\epsilon - P_{k+1}^{x\epsilon\ T} \Psi_k P_{k+1}^{x\epsilon}\right)\right) H_k + Q_k^x$$
$$P_k^{x\epsilon} \leftarrow F_k^T \left(P_{k+1}^{x\epsilon} - P_{k+1}^x \Psi_k P_{k+1}^{x\epsilon}\right) - H_k^T \left(P_{k+1}^\epsilon - P_{k+1}^{x\epsilon\ T} \Psi_k P_{k+1}^{x\epsilon}\right)$$
$$P_k^\epsilon = \left(P_{k+1}^\epsilon - P_{k+1}^{x\epsilon\ T} \Psi_k P_{k+1}^{x\epsilon}\right) + Q_k^\epsilon$$

end

for $k = 0$ **to** N **do**

$$u_k^* \leftarrow -\left(K_k^x x_k + K_k^\epsilon \epsilon_k + K_k^r r_k + K_k^d d_k\right)$$
$$x_{k+1}^* \leftarrow \left(F_k - G_k K_k^x\right) x_k - G_k \left(K_k^\epsilon \epsilon_k + K_k^r r_k\right) + \left(E_k - G_k K_k^d\right) d_k$$
$$\epsilon_{k+1} \leftarrow \epsilon_k + r_k - H_k x_k$$

end

Observação 3.2.2. *Note que a lei de controle ótima (3.46) depende apenas de P^{x}_{k+1} e $P^{x\epsilon}_{k+1}$ e estes dependem apenas deles mesmos e de P^{ϵ}_{k+1} nas suas recursões. Dessa maneira, as linhas e colunas 3 e 4 da matriz aumentada $\mathcal{P}_k$, bem como Q^{r}_{k} e Q^{d}_{k} (3.30), não têm influência sobre a resposta do sistema em malha fechada, sendo utilizados apenas para garantir o adequamento das dimensões das matrizes e obtenção da solução para o sistema aumentado através das identidades (3.28).*

A observação acima decorre das duas linhas de zeros em (3.28) pois, assim como na seção anterior, assume-se que os distúrbios futuros d_{k+i}, com $i = 1, 2, ..., N$, são desconhecidos e não podem ser manipulados como as entradas de controle u_k. Além disso, são independentes de x_k, ϵ_k, r_k e d_k. O mesmo vale para as entradas r_{k+i}. Embora estas sejam variáveis conhecidas em sua essência, tratá-las dessa maneira permite uma abordagem mais geral do regulador com ação integral sobre qualquer tipo de entrada.

Vale ressaltar que o tipo do sistema é aumentado em um pela inclusão de uma ação integral (NISE, 2012). De acordo com a Definição 2.3.6 isso garante erro nulo em regime permanente para entradas degrau. Para outros tipos de entrada não há essa garantia. Maiores informações sobre erro em regime permanente podem ser consultadas em Nise (2012).

Proposição 3.2.1. *Sejam $\mathcal{P}_{N+1} = \mathcal{P}^{T}_{N+1} \succ 0$, $\mathcal{Q}_k = \mathcal{Q}^{T}_{k} \succ 0$ e $R_k \succ 0$ conhecidas, o resultado apresentado no Teorema 3.2.1 pode ser igualmente obtido ao utilizar o sistema aumentado (3.28) diretamente em (2.19), resultando na seguinte solução*

$$\begin{bmatrix} x^{*}_{k+1} \\ u^{*}_{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{S}_k \\ \mathcal{K}_k \end{bmatrix} \mathcal{X}_k, \tag{3.58}$$

em que $\mathcal{S}_k$ e $\mathcal{K}_k$ são obtidos através da seguinte recursão

$$\begin{bmatrix} \mathcal{S}_k \\ \mathcal{K}_k \\ \mathcal{P}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & \mathcal{F}_k \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} {\mathcal{P}_{k+1}}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R^{-1}_{k} & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & \mathcal{Q}^{-1}_{k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & -\mathcal{G}_k \\ I & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -\mathcal{G}^{T}_{k} & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ \mathcal{F}_k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.59}$$

Demonstração. Direta pela equivalência entre a solução aumentada apresentada em (3.31) - (3.33) e a solução clássica do LQR em (2.4) - (2.6) e pelo estabelecido no Lema 2.2.1. □

Novamente, a vantagem da utilização da Proposição 3.1.1 em relação ao Teorema 3.1.1, embora os resultados de ambos os métodos sejam iguais, consiste em permitir a abordagem de sistemas sujeitos a incertezas paramétricas em trabalhos futuros.

4 REGULADOR LINEAR GAUSSIANO

Neste capítulo serão apresentados o filtro de Kalman padrão (KF), o filtro de Kalman para sistemas com entradas desconhecidas (KFUI) e o princípio da separação. Esses fundamentos são de grande importância por permitirem a utilização dos controladores propostos no capítulo anterior nos casos em que não é possível medir as variáveis de estado e/ou distúrbios externos.

4.1 Filtro de Kalman

Seja o sistema espaço de estados discreto, linear e invariante no tempo dado por

$$x_{k+1} = Fx_k + Gu_k + w_k, \tag{4.1a}$$

$$y_{k+1} = Hx_{k+1} + v_k. \tag{4.1b}$$

De acordo com Franklin et al. (1998), estimativas ótimas $\hat{x}_k$ podem ser calculadas a partir de (4.2) a (4.5),

$$\Pi_k = M_k - M_k H^T \left(HM_k H^T + V\right)^{-1} HM_k, \tag{4.2}$$

$$\hat{x}_k = \bar{x}_k + \Pi_k H^T V^{-1} \left(y_k - H\bar{x}_k\right), \tag{4.3}$$

$$\bar{x}_{k+1} = F\hat{x}_k + Gu_k, \tag{4.4}$$

$$M_{k+1} = F\Pi_k F^T + W, \tag{4.5}$$

onde $\Pi_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $M_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $V \in \mathbb{R}^{p\times p}$ são, respectivamente, as seguintes covariâncias

$$\Pi_k = \mathcal{E}\left\{(\hat{x} - x)\,(\hat{x} - x)^T\right\}, \tag{4.6}$$

$$M_k = \mathcal{E}\left\{\bar{x}_k \bar{x}_k^T\right\}, \tag{4.7}$$

$$W = \mathcal{E}\left\{w_k w_k^T\right\}, \tag{4.8}$$

$$V = \mathcal{E}\left\{v_k v_k^T\right\}. \tag{4.9}$$

Maiores detalhes sobre o KF podem ser encontrados em Franklin et al. (1998), Kailath et al. (2000), Ostertag e Goyena (2011), Aguirre (2015) e Lewis et al. (2007).

O valor de um possível distúrbio d_k agindo sobre o sistema estará armazenado em x_k e, consequentemente, será associado a $\hat{x}_k$. Porém, para a aplicação dos reguladores propostos no capitulo anterior é necessária a estimativa $\hat{d}_k$, que será multiplicada por um ganho K_k^d na lei de controle para a obtenção de uma melhor resposta do sistema. Por isso, será utilizado o KFUI apresentado a seguir.

4.2 Filtro de Kalman para Sistemas Sujeitos a Entradas Desconhecidas

O KFUI, proposto por Darouach et al. (1995), é uma abordagem do KF que é capaz de estimar tanto os estados do sistema quanto entradas desconhecidas (distúrbios externos não mensuráveis) que afetam o mesmo.

Considere o sistema discreto, estocástico, linear e invariante no tempo representado por

$$x_{k+1} = Fx_k + Gu_k + Ed_k + w_k, \tag{4.10a}$$

$$y_{k+1} = Hx_{k+1} + v_k, \tag{4.10b}$$

onde $d_k \in \mathbb{R}^q$ é um vetor de entradas desconhecidas e $E \in \mathbb{R}^{n\times q}$ é o parâmetro das entradas desconhecidas.

De acordo com Darouach et al. (1995) as estimativas ótimas dos estados e da entrada desconhecida são dadas por (4.11) a (4.13),

$$\bar{x}_{k|k} = F\hat{x}_{k|k} + Gu_k, \tag{4.11}$$

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = \bar{x}_{k|k} + E\hat{d}_{k|k+1} + \mathcal{L}_{k+1}^x \left[y_{k+1} - H\left(\bar{x}_{k|k} + E\hat{d}_{k|k+1}\right)\right], \tag{4.12}$$

$$\hat{d}_{k|k+1} = \mathcal{L}_{k+1}^d \left(y_{k+1} - H\bar{x}_{k|k}\right), \tag{4.13}$$

onde $\hat{x}$ e $\hat{d}$ são as estimativas dos estados e da entrada desconhecida, respectivamente e os ganhos $\mathcal{L}_{k+1}^x$ e $\mathcal{L}_{k+1}^d$ são dados por

$$\mathcal{L}_{k+1}^x = \left(M_{k|k}^{-1} + H^T V^{-1} H\right)^{-1} H^T V^{-1}, \tag{4.14}$$

$$\mathcal{L}_{k+1}^d = \Pi_{k+1|k+1}^{dx} H^T V^{-1}, \tag{4.15}$$

com

$$M_{k|k} = F\Pi_{k|k}^x F^T + W, \tag{4.16}$$

$$\Pi_{k+1|k+1}^{dx} = \Pi_{k|k+1}^d E^T M_{k|k}^{-1}\left(M_{k|k}^{-1} + H^T V^{-1} H\right)^{-1}, \tag{4.17}$$

$$\Pi^{d}_{k|k+1} = \left(E^T H^T \left(V + H M_{k|k} H^T \right)^{-1} H E \right)^{-1}, \tag{4.18}$$

$$\Pi^{x}_{k+1|k+1} = \left(M^{-1}_{k|k} + H^T V^{-1} H \right)^{-1} + \Pi^{xd}_{k+1|k+1} \left(\Pi^{d}_{k|k+1} \right)^{-1} \Pi^{dx}_{k+1|k+1}, \tag{4.19}$$

em que $\Pi^x \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de covariância do erro da estimativa dos estados, $\Pi^d \in \mathbb{R}^{q \times q}$ é a matriz de covariância do erro da estimativa da entrada desconhecida e $\Pi^{dx} \in \mathbb{R}^{q \times n}$ é a matriz de covariância do erro cruzado da estimativa dos estados e da entrada desconhecida ($\Pi^{xd} = \left(\Pi^{dx} \right)^T$).

4.3 Regulador Linear Gaussiano para Sistemas com Entradas Desconhecidas

O princípio da separação afirma que as otimizações do controle e das estimativas realizadas pelo filtro de Kalman podem ser tratados como dois problemas distintos (OSTERTAG; GOYENA, 2011). Assim, é possível utilizar os controladores LQRED e LQIED propostos no Capítulo 3 (sistemas sem ruídos) substituindo nas leis de controle (3.18) e (3.46) as variáveis de estado x_k e os distúrbios externos d_k por suas respectivas estimativas filtradas $\hat{x}_k$ e $\hat{d}_k$ obtidas através do KFUI. Dessa maneira, as proposições a seguir estabelecem dois novos controladores para sistemas com entradas desconhecidas.

Proposição 4.3.1. *A combinação entre o LQRED e o KFUI constitui o Regulador Linear Gaussiano para Sistemas com Entradas Desconhecidas (LQGUI, Linear Quadratic Gaussian with Unknow Inputs)*

O algoritmo a seguir apresenta a implementação do LQGUI. Por consequência do princípio da separação, o primeiro laço de repetição, onde são calculados os ganhos do controlador, é o mesmo do LQRED no Algoritmo 1, embora os parâmetros F, G, E, H devam ser invariantes no tempo. No segundo laço de repetição é incluída a parte da filtragem em que obtém-se as estimativas de $\hat{x}$ e $\hat{d}$ para serem utilizadas com os ganhos previamente calculados.

Algoritmo 3: Algoritmo LQGUI

Dados iniciais: $Q_k^x \succeq 0$ e $R_k \succ 0$ conhecidos para todo $k \in [0, N]$, F, G, E, H, $P_{N+1}^x \succeq 0$, $V \succ 0$, $W \succ 0$, $\Pi_{0|0}^x \succ 0$, x_0, y_0, u_0 e N.

for $k = N$ **to** 0 **do**

$$\Phi_k \leftarrow \left(R_k + G^T P_{k+1}^x G\right)^{-1} G^T$$
$$K_k^x \leftarrow \Phi_k P_{k+1}^x F$$
$$K_k^d \leftarrow \Phi_k P_{k+1}^x E$$
$$P_k^x \leftarrow F^T \left(P_{k+1}^x - P_{k+1}^x G \Phi_k P_{k+1}^x\right) F$$

end

for $k = 0$ **to** N **do**

$$y_k \leftarrow H x_k$$
$$\bar{x}_{k-1} \leftarrow F\hat{x}_{k-1} + G u_{k-1}^*$$
$$M_{k-1} \leftarrow F\Pi_{k-1}^x F^T + W$$
$$\Pi_{k-1}^d \leftarrow \left(E^T H^T \left(V + H M_{k-1} H^T\right)^{-1} H E\right)^{-1}$$
$$\Pi_k^{dx} \leftarrow \Pi_{k-1}^d E^T M_{k-1}^{-1} \left(M_{k-1}^{-1} + H^T V^{-1} H\right)^{-1}$$
$$\Pi_k^{xd} \leftarrow \left(\Pi_k^{dx}\right)^T$$
$$\Pi_k^x \leftarrow \left(M_{k-1}^{-1} + H^T V^{-1} H\right)^{-1} + \Pi_k^{xd} \left(\Pi_{k-1}^d\right)^{-1} \Pi_k^{dx}$$
$$\mathcal{L}_k^x \leftarrow \left(M_{k-1}^{-1} + H^T V^{-1} H\right)^{-1} H^T V^{-1}$$
$$\mathcal{L}_k^d \leftarrow \Pi_k^{dx} H^T V^{-1}$$
$$\hat{d}_{k-1} \leftarrow \mathcal{L}_k^d \left(y_k - H\bar{x}_{k-1}\right)$$
$$\hat{x}_k \leftarrow \bar{x}_{k-1} + E\hat{d}_{k-1} + \mathcal{L}_k^x \left[y_k - H\left(\bar{x}_{k-1} + E\hat{d}_{k-1}\right)\right]$$
$$u_k^* \leftarrow -\left(K_k^x \hat{x}_k + K_k^d \hat{d}_{k-1}\right)$$
$$x_{k+1}^* \leftarrow \left(F - G K_k^x\right)\hat{x}_k + \left(E - G K_k^d\right)\hat{d}_{k-1}$$

end

Proposição 4.3.2. *A combinação entre o LQIED e o KFUI constitui o Regulador Linear Gaussiano com Ação Integral para Sistemas com Entradas Desconhecidas (LQGUI-I, Linear Quadratic Gaussian with Integral Action and Unknow Inputs)*

A implementação do LQGUI-I pode ser realizada pelo algoritmo a seguir. Devido ao princípio da separação, o laço de repetição para o cálculo dos ganhos é o mesmo do LQIED no Algoritmo 2, porém os parâmetros F, G, E, H são invariantes no tempo. No segundo laço de

repetição encontram-se as etapas de filtragem e aplicação do controle.

Algoritmo 4: Algoritmo LQGUI-I

Dados iniciais: $Q_k^x \succeq 0$, $Q_k^e \succeq 0$, $R_k \succ 0$, r_k conhecidos para todo $k \in [0, N]$, $\epsilon_0 = 0$, F, G, E, H, $P_{N+1}^x \succeq 0$, $P_{N+1}^{xe} \succeq 0$, $P_{N+1}^e \succeq 0$, $V \succ 0$, $W \succ 0$, $\Pi_{0|0}^x \succ 0$, $\hat{x}_0$, $\hat{d}_{-1}$ e N.

for $k = N$ **to** 0 **do**

$$\Phi_k \leftarrow \left(R_k + G^T P_{k+1}^x G\right)^{-1} G^T$$
$$\Psi_k \leftarrow G\Phi_k$$
$$K_k^x \leftarrow \Phi_k \left(P_{k+1}^x F - P_{k+1}^{x\epsilon} H\right)$$
$$K_k^\epsilon \leftarrow \Phi_k P_{k+1}^{x\epsilon}$$
$$K_k^r \leftarrow \Phi_k P_{k+1}^{x\epsilon}$$
$$K_k^d \leftarrow \Phi_k P_{k+1}^x E$$
$$P_k^x \leftarrow \left(F^T \left(P_{k+1}^x - P_{k+1}^x \Psi_k P_{k+1}^x\right) - H^T \left(P_{k+1}^{x\epsilon\ T} - P_{k+1}^{x\epsilon\ T} \Psi_k P_{k+1}^x\right)\right) F - \left(F^T \left(P_{k+1}^{x\epsilon} - P_{k+1}^x \Psi_k P_{k+1}^{x\epsilon}\right) - H^T \left(P_{k+1}^\epsilon - P_{k+1}^{x\epsilon\ T} \Psi_k P_{k+1}^{x\epsilon}\right)\right) H + Q_k^x$$
$$P_k^{x\epsilon} \leftarrow F^T \left(P_{k+1}^{x\epsilon} - P_{k+1}^x \Psi_k P_{k+1}^{x\epsilon}\right) - H^T \left(P_{k+1}^\epsilon - P_{k+1}^{x\epsilon\ T} \Psi_k P_{k+1}^{x\epsilon}\right)$$
$$P_k^\epsilon = \left(P_{k+1}^\epsilon - P_{k+1}^{x\epsilon\ T} \Psi_k P_{k+1}^{x\epsilon}\right) + Q_k^\epsilon$$

end

for $k = 0$ **to** N **do**

$$y_k \leftarrow Hx_k$$
$$\bar{x}_{k-1} \leftarrow F\hat{x}_{k-1} + Gu_{k-1}^*$$
$$M_{k-1} \leftarrow F\Pi_{k-1}^x F^T + W$$
$$\Pi_{k-1}^d \leftarrow \left(E^T H^T \left(V + HM_{k-1}H^T\right)^{-1} HE\right)^{-1}$$
$$\Pi_k^{dx} \leftarrow \Pi_{k-1}^d E^T M_{k-1}^{-1} \left(M_{k-1}^{-1} + H^T V^{-1} H\right)^{-1}$$
$$\Pi_k^{xd} \leftarrow \left(\Pi_k^{dx}\right)^T$$
$$\Pi_k^x \leftarrow \left(M_{k-1}^{-1} + H^T V^{-1} H\right)^{-1} + \Pi_k^{xd} \left(\Pi_{k-1}^d\right)^{-1} \Pi_k^{dx}$$
$$\mathcal{L}_k^x \leftarrow \left(M_{k-1}^{-1} + H^T V^{-1} H\right)^{-1} H^T V^{-1}$$
$$\mathcal{L}_k^d \leftarrow \Pi_k^{dx} H^T V^{-1}$$
$$\hat{d}_{k-1} \leftarrow \mathcal{L}_k^d \left(y_k - H\bar{x}_{k-1}\right)$$
$$\hat{x}_k \leftarrow \bar{x}_{k-1} + E\hat{d}_{k-1} + \mathcal{L}_k^x \left[y_k - H\left(\bar{x}_{k-1} + E\hat{d}_{k-1}\right)\right]$$
$$u_k^* \leftarrow -\left(K_k^x \hat{x}_k + K_k^\epsilon \epsilon_k + K_k^r r_k + K_k^d \hat{d}_{k-1}\right)$$
$$x_{k+1}^* \leftarrow \left(F - GK_k^x\right)\hat{x}_k - G\left(K_k^\epsilon \epsilon_k + K_k^r r_k\right) + \left(E - GK_k^d\right)\hat{d}_{k-1}$$
$$\epsilon_{k+1} \leftarrow \epsilon_k + r_k - Hx_k$$

end

Observação 4.3.1. *Como pode ser observado em (4.13) e nos Algoritmos 3 e 4, o KFUI possui um atraso na obtenção da estimativa $\hat{d}_k$. Isso terá um impacto negativo nos controladores gaussianos, pois o sistema não terá uma ação de controle adequada nos instantes em que d_k apresentar variações.*

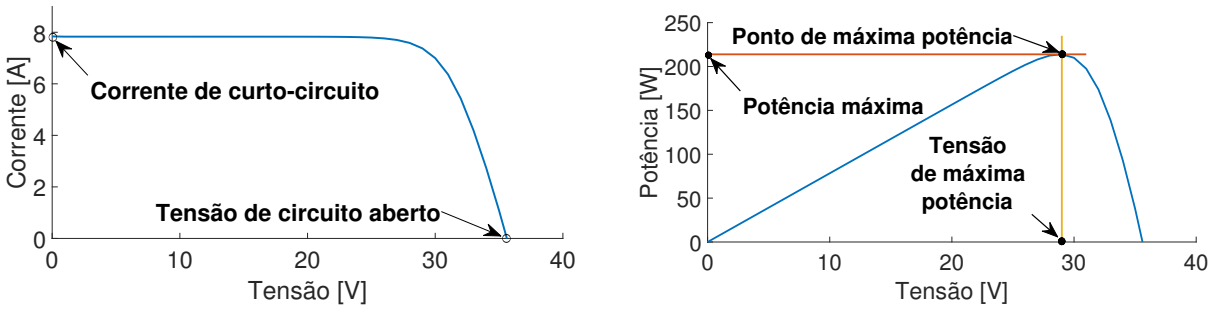
As soluções encontradas na literatura para o problema apresentado na Observação 4.3.1 exigem que o modelo em espaço de estados da Equação 1.4 tenha uma segunda matriz de parâmetros para as entradas desconhecidas na Equação (1.4b) (DAROUACH et al., 2003; GILLIJNS; De Moor, 2007; CHENG et al., 2009; PAN et al., 2011; PAN et al., 2015) e, até onde vai o conhecimento do autor, não foi encontrado na literatura um modelo equivalente para os sistemas tratados no Capítulo 5 a seguir.

5 MODELAGEM E SIMULAÇÕES

Neste capítulo serão apresentados os modelos matemáticos do painel fotovoltaico e do conversor cc-cc do tipo *boost*, sendo este último um modelo em espaço de estados com distúrbios externos. Em seguida são realizados algumas simulações numéricas utilizando o modelo obtido para o conversor e os controladores propostos nos Capítulos 3 e 4. Nestes exemplos são feitas comparações com métodos de rejeição de distúrbios encontrados na literatura.

5.1 Modelagem Matemática de um Painel Fotovoltaico

O funcionamento de um painel fotovoltaico é caracterizado pelas suas curvas corrente × tensão e potência × tensão, as quais têm comportamento conforme apresentado na Figura 7. Alguns pontos importantes são observados nessas curvas: a corrente de curto-circuito, a tensão de circuito aberto e o ponto de máxima potência.



(a) (b)

Figura 7 – Curvas de um painel fotovoltaico: (a) Corrente × Tensão, (b) Potência × Tensão

Para cada valor de irradiância solar e temperatura que incidir sobre o painel haverá um par distinto dessas curvas características, fazendo com que os pontos mencionados (em especial o ponto de máxima potência) sejam alterados. Esse fato pode ser melhor observado nas Figuras 8 e 9, onde a curva de potência e o valor de máxima potência variam com a irradiância e a temperatura, respectivamente.

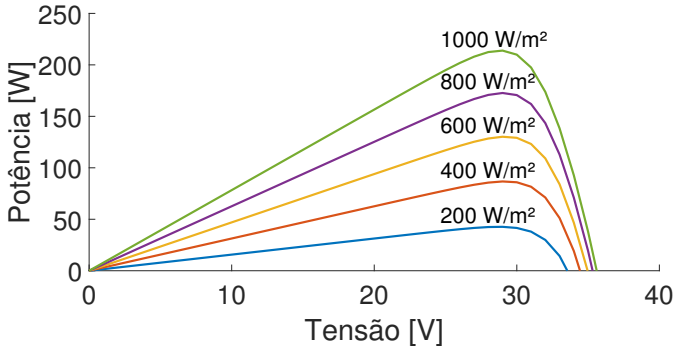


Figura 8 – Variação da curva de potência fornecida por um painel fotovoltaico em função da irradiância

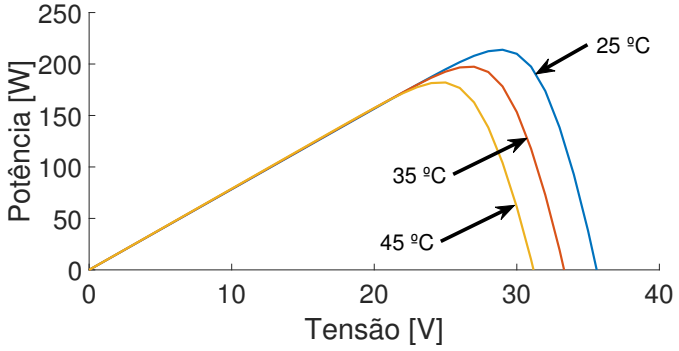


Figura 9 – Variação da curva de potência fornecida por um painel fotovoltaico em função da temperatura

O circuito em modelo de um diodo para uma célula fotovoltaica é baseado em uma fonte $i_g(t)$, cuja corrente depende da irradiância $g(t)$ e da temperatura $T(t)$ que incidem sobre a superfície da célula em um instante de tempo t (TIAN et al., 2012; MOLINA, 2016; NGUYEN; NGUYEN, 2015). Tal circuito é apresentado na Figura 10.

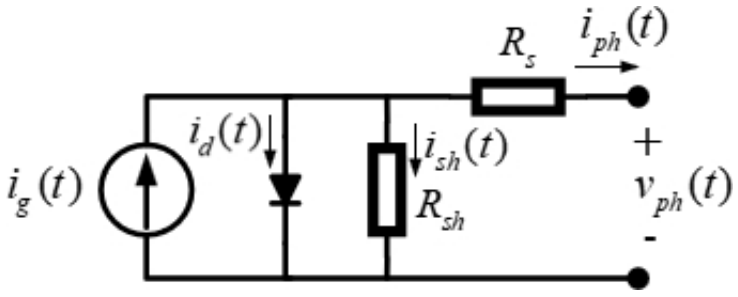


Figura 10 – Circuito equivalente da célula fotovoltaica.

A Lei de Kirchoff das correntes para esse circuito fornece a Equação (5.1), mostrando que a corrente $i_g(t)$ se divide em três parcelas: $i_d(t)$, que passa pelo diodo, $i_{sh}(t)$, que passa pelo resistor R_{sh}, e $i_{ph}(t)$, que é a corrente fornecida pela célula.

$$i_g(t) = i_d(t) + i_{sh}(t) + i_{ph}(t). \tag{5.1}$$

A corrente gerada $i_g(t)$ se relaciona com a temperatura e a irradiância de acordo com (TIAN et al., 2012; MOLINA, 2016; NGUYEN; NGUYEN, 2015)

$$i_g(t) = \frac{g(t)}{g_r}\left[I_{sc} + \alpha_{I_sc}\left(T(t) - T_r\right)\right], \tag{5.2}$$

onde g_r é a irradiância solar de referência, geralmente 1000 W/m^2 ; T_r é a temperatura de referência, 298 K; I_{sc} é a corrente de curto-circuito da célula fotovoltaica nas condições de referência (1000 W/m^2 e 298 K); e α_{I_sc} é o coeficiente de temperatura da corrente de curto-circuito dado em A/°C.

A corrente $i_d(t)$ que circula pelo diodo apresenta um decaimento exponencial à medida que a tensão $v_{ph}(t)$ aumenta e é afetada pela temperatura sobre a célula. O valor de $i_d(t)$ é dado por (TIAN et al., 2012; NGUYEN; NGUYEN, 2015)

$$i_d(t) = I_0(t)\left[\exp\left(\frac{q\left(v_{ph}(t) + i_{ph}(t)R_s\right)}{aBT_r}\right) - 1\right], \tag{5.3}$$

onde q é a carga de um elétron, 1,60x10^{-3} C; a é o fator de idealização do diodo; B é a constante de Boltzmann, 1,38x10^{-38} J/K; I_0 é a corrente de saturação reversa do diodo, dada por (TIAN et al., 2012; MOLINA, 2016; NGUYEN; NGUYEN, 2015)

$$I_0(t) = I_{0r}\left(\frac{T(t)}{T_r}\right)^3 \exp\left[\frac{qV_g}{aB}\left(\frac{1}{T_r} - \frac{1}{T(t)}\right)\right], \tag{5.4}$$

sendo V_g a tensão de folga de banda e I_{0r} é a corrente de saturação reversa do diodo nas condições de referência.

Por último, a corrente $i_{sh}(t)$ é calculada por

$$i_{sh}(t) = \frac{v_{ph}(t) + i_{ph}(t)R_s}{R_{sh}}. \tag{5.5}$$

As equações acima podem ser generalizadas para painéis fotovoltaicos, onde são dispostas N_S células em série e N_P células em paralelo, assim como apresentado na Figura 11.

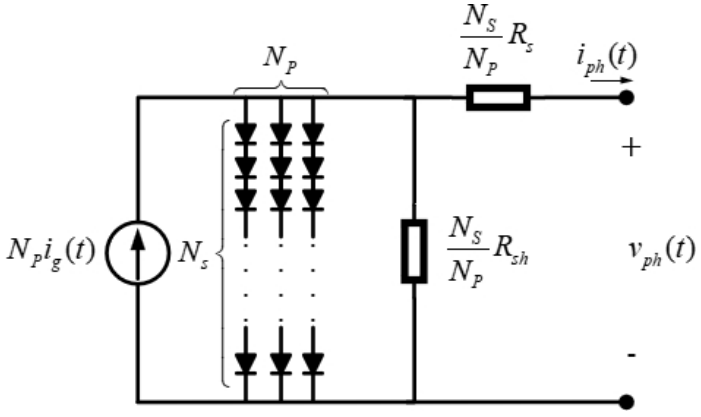


Figura 11 – Circuito equivalente de um painel fotovoltaico.

Com isso, a corrente fornecida por um painel fotovoltaico pode ser calculada a partir da seguinte equação (TIAN et al., 2012; MOLINA, 2016; NGUYEN; NGUYEN, 2015)

$$i_{ph}(t) = N_p i_g(t) - N_p i'_d(t) - \frac{N_p}{Rsh}\left(\frac{v_{ph}(t)}{N_S} + \frac{i_{ph}(t)R_s}{N_P}\right), \tag{5.6}$$

onde $i'_d(t)$ é dada por

$$i'_d(t) = I_0(t)\left[\exp\left(\frac{q\left(\frac{v_{ph}(t)}{N_s} + \frac{i_{ph}(t)R_s}{N_p}\right)}{aBT_r}\right) - 1\right] \tag{5.7}$$

e I_{0_r} pode ser calculada de acordo com (NGUYEN; NGUYEN, 2015)

$$I_{0_r} = \frac{I_{sc}}{\exp\left(\frac{qV_{oc}}{aBT_rN_S}\right) - 1}. \tag{5.8}$$

Substituindo (5.2) em (5.6) e resolvendo para $g(t)$ obtém-se uma forma analítica para se calcular a irradiância da seguinte maneira

$$g(t) = \left[\frac{i_{ph}(t)}{N_p} + i'_d(t) + \frac{1}{Rsh}\left(\frac{v_{ph}(t)}{N_S} + \frac{i_{ph}(t)R_s}{N_P}\right)\right] \times \frac{g_r}{I_{sc} + \alpha_{I_{sc}}(T(t) - T_r)}. \tag{5.9}$$

5.2 Modelagem do Conversor *Boost* Conectado a um Painel Fotovoltaico

As aplicações desenvolvidas fornecem uma metodologia para sistemas de geração fotovoltaica que apresentam uma etapa de conversão. Será empregado o conversor *boost*, o qual funciona como elevador de tensão e cujo circuito é apresentado na Figura 12 juntamente com o circuito equivalente do painel fotovoltaico (veja Figura 11).

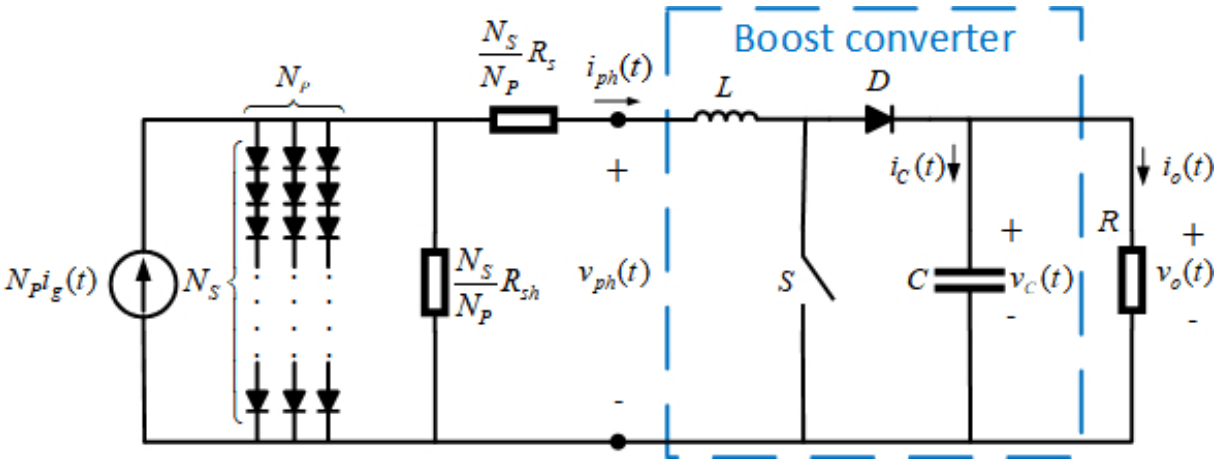


Figura 12 – Painel fotovoltaico conectado ao conversor *boost*

A teoria acerca dos conversores básicos (*buck, boost, buck-boost*, entre outros) já é consolidada e pode ser encontrada em Erickson e Maksimović (2001). Entretanto, a modelagem

aqui apresentada tem como objetivo mostrar de que maneira o conversor *boost* está sujeito a distúrbios externos. A metodologia pode ser analogamente aplicada a outros tipos de conversores.

A tensão $v_{ph}(t)$ e a corrente $i_{ph}(t)$ de saída do painel fotovoltaico correspondem à tensão e corrente de entrada do conversor, respectivamente. Assim, a tensão $v_o(t)$ na saída do conversor também está sujeita às variações da irradiância.

A modelagem matemática do conversor é realizada em duas etapas. Na primeira, ilustrada na Figura 13, a chave *S* está em condução. Pela Lei de Kirchoff das tensões obtém-se a Equação (5.10a) e como $i_c(t) = -i_o(t)$ tem-se a Equação (5.10b) com $v_c(t) = v_o(t)$.

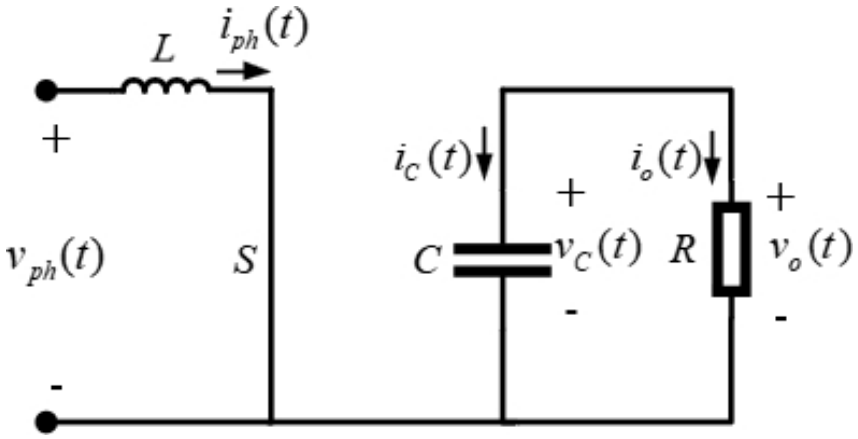


Figura 13 – Primeira etapa de operação do conversor *boost*.

$$L\frac{d}{dt}i_{ph}(t) = v_{ph}(t). \tag{5.10a}$$

$$C\frac{d}{dt}v_o(t) = -\frac{v_o(t)}{R}. \tag{5.10b}$$

Na segunda etapa, a chave *S* está em bloqueio e o circuito se apresenta conforme ilustrado na Figura 14. Pela Lei de Kirchoff das tensões obtém-se a Equação (5.11a) e pela Lei de Kirchoff das correntes tem-se a Equação (5.11b).

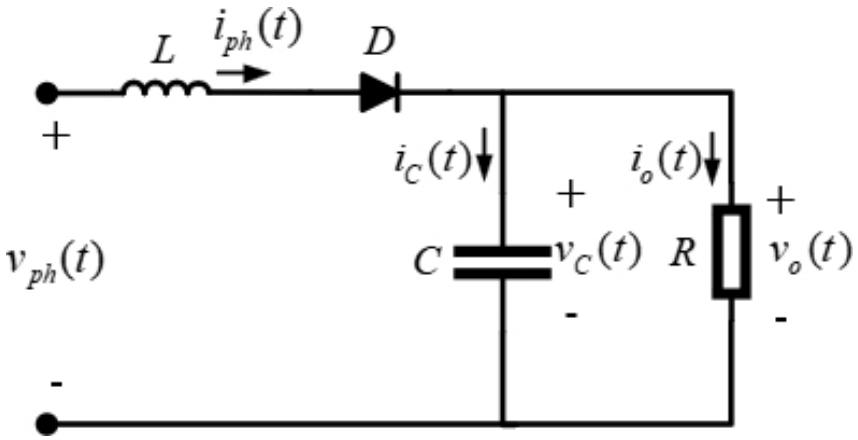


Figura 14 – Segunda etapa de operação do conversor *boost*.

$$L\frac{d}{dt}i_{ph}(t) = v_{ph}(t) - v_o(t). \tag{5.11a}$$

$$C\frac{d}{dt}v_o(t) = i_{ph}(t) - \frac{v_o(t)}{R}. \tag{5.11b}$$

A mudança de estado da chave S ocorre através da aplicação de um sinal de onda quadrada à mesma. Sendo T_s o período desse sinal de chaveamento, define-se a razão cíclica $u_c(t)$ como sendo a razão entre o tempo T_{on} em que a chave permanece em condução e T_s, conforme a Equação (5.12). O valor de $u_c(t)$, que varia entre 0 e 1, é comumente alterado através da técnica de PWM (*Pulse Width Modulation*) (ERICKSON; MAKSIMOVIĆ, 2001).

$$u_c(t) = \frac{T_{on}}{T_s}. \tag{5.12}$$

O comportamento do conversor para um ciclo completo de operação pode ser obtido através da média ponderada, com relação a T_s, das duas etapas de operação do conversor (Equações (5.10) e (5.11)). Essa média fornece as seguintes equações

$$L\frac{d}{dt}i_{ph}(t) = v_{ph}(t) - [1 - u_c(t)]\, v_o(t), \tag{5.13}$$

$$C\frac{d}{dt}v_o(t) = [1 - u_c(t)]\, i_{ph}(t) - \frac{v_o(t)}{R}. \tag{5.14}$$

Os sinais $i_{ph}(t)$, $v_o(t)$, $v_{ph}(t)$ e $u_c(t)$ apresentam uma pequena oscilação em torno de um valor médio (ponto de operação). Dessa maneira, pode-se reescrever esses sinais a partir das seguintes somas (ERICKSON; MAKSIMOVIĆ, 2001)

$$i_{ph}(t) = I_{ph} + \tilde{i}_{ph}(t), \tag{5.15}$$

$$v_o(t) = V_o + \tilde{v}_o(t), \tag{5.16}$$

$$v_{ph}(t) = V_{ph} + \tilde{v}_{ph}(t), \tag{5.17}$$

$$u_c(t) = U_c + \tilde{u}_c(t), \tag{5.18}$$

onde I_{ph}, V_o, V_{ph} e U_c são os valores médios de $i_{ph}(t)$, $v_o(t)$, $v_{ph}(t)$ e $u_c(t)$, respectivamente; e $\tilde{i}_{ph}(t)$, $\tilde{v}_o(t)$, $\tilde{v}_{ph}(t)$ e $\tilde{u}_c(t)$ são pequenas variações em torno desses valores médios.

Substituindo as Equações (5.15) a (5.18) em (5.13) e (5.14) e linearizando o resultado conforme Erickson e Maksimović (2001), obtém-se o modelo de pequenos sinais do conversor *boost* dado por

$$L\frac{d}{dt}\tilde{i}_{ph}(t) = \tilde{v}_{ph}(t) - (1 - U_c)\tilde{v}_o(t) + V_o\tilde{u}_c(t), \tag{5.19a}$$

$$C\frac{d}{dt}\tilde{v}_o(t) = (1-U_c)\tilde{i}_{ph}(t) - I_{ph}\tilde{u}_c(t) - \frac{\tilde{v}_o(t)}{R}. \tag{5.19b}$$

Dessa linearização resultam algumas características importantes da operação do conversor *boost*. A tensão média de saída V_o do conversor depende da tensão média V_{ph} em sua entrada e da razão cíclica U_c de acordo com (ERICKSON; MAKSIMOVIĆ, 2001)

$$V_o = \frac{V_{ph}}{1-U_c}. \tag{5.20}$$

Analogamente, a corrente I_{ph} é dada pela seguinte equação

$$I_{ph} = \frac{V_o}{R(1-U_c)}. \tag{5.21}$$

Colocando a Equação (5.19) na forma de espaço de estados obtém-se a seguinte representação de um sistema linear e invariante no tempo

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \mathcal{F}\tilde{x}(t) + \mathcal{G}\tilde{u}_c(t) + \mathcal{E}\tilde{v}_{ph}(t), \tag{5.22a}$$

$$\tilde{y}(t) = \mathcal{H}\tilde{x}(t), \tag{5.22b}$$

onde

$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{(1-U_c)}{L} \\ \frac{(1-U_c)}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}$ é o parâmetro do sistema,

$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} \frac{V_0}{L} & -\frac{I_{ph}}{C} \end{bmatrix}^T$ é o parâmetro da entrada $\tilde{u}_c(t)$,

$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}^T$ é o parâmetro da entrada $\tilde{v}_{ph}(t)$,

$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{i}_{ph}(t) & \tilde{v}_o(t) \end{bmatrix}^T$ são as variáveis de estado do sistema e $\mathcal{H}$ é o parâmetro de saída. O valor de $\mathcal{H}$ depende de qual medida o sistema de controle projetado levará em consideração (por exemplo, $\tilde{y}(t) = \tilde{i}_{ph}(t) \rightarrow \mathcal{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\tilde{y}(t) = \tilde{v}_o(t) \rightarrow \mathcal{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ ou $\tilde{y}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{i}_{ph}(t) & \tilde{v}_o(t) \end{bmatrix}^T \rightarrow \mathcal{H} = I^{2\times 2}$) . Os valores de I_{ph}, V_o, V_{ph}, U_c, L, R e C são previamente conhecidos, pois são provenientes do dimensionamento do conversor. Dessa maneira, são conhecidos a matriz $\mathcal{F}$ e os vetores $\mathcal{G}$ e $\mathcal{E}$.

O sinal $\tilde{u}_c(t)$ é uma entrada manipulável a partir do ajuste no sinal de chaveamento do conversor e, portanto, é o atuador do sistema, onde é aplicada a lei de controle ótima dos controladores propostos nos capítulos anteriores. Por outro lado, a tensão $\tilde{v}_{ph}(t)$ não pode ser controlada diretamente porque é fornecida pelo painel fotovoltaico e, com isso, depende da irradiância solar, que é uma variável aleatória e não manipulável. Com isso, pode-se dizer que variações em $\tilde{v}_{ph}(t)$ constituem distúrbios para o sistema da Equação (5.22).

Como a metodologia desenvolvida nos capítulos anteriores é para sistemas discretos, é necessária a discretização de (5.22). Neste trabalho as discretizações foram realizadas através da técnica *zero order hold* (ZOH) conforme estabelecido em MathWorks (2019).

Discretizando o sistema linear e invariante no tempo da Equação (5.22) tem-se um novo sistema assim como apresentado na Equação (1.4), em que k é um índice de tempo, para uma certa taxa de amostragem T_a. As seguintes transformações são realizadas durante a discretização:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F} \rightarrow F, \mathcal{G} \rightarrow G, \mathcal{E} \rightarrow E, \mathcal{H} \rightarrow H, \\
&x(t) \rightarrow x_k, \dot{x}(t) \rightarrow x_{k+1}, x_k = \begin{bmatrix} i_{ph_k} & v_{o_k} \end{bmatrix}^T, \\
&\tilde{x}(t) \rightarrow \tilde{x}_k, \dot{\tilde{x}} \rightarrow \tilde{x}_{k+1}, \tilde{x}_k = \begin{bmatrix} \tilde{i}_{ph_k} & \tilde{v}_{o_k} \end{bmatrix}^T, \\
&v_{ph}(t) \rightarrow v_{ph_k} = d_k, y(t) \rightarrow y_k, u_c(t) \rightarrow u_{c_k} \\
&\tilde{v}_{ph}(t) \rightarrow \tilde{v}_{ph_k} = \tilde{d}_k, \tilde{y}(t) \rightarrow \tilde{y}_k, \tilde{u}_c(t) \rightarrow \tilde{u}_{c_k},
\end{aligned} \tag{5.23}$$

sendo o sistema final utilizado para o projeto do controlador dado por

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_{k+1} &= F\tilde{x}_k + G\tilde{u}_{c_k} + E\tilde{v}_{ph_k}, \\
\tilde{y}_k &= H\tilde{x}_k.
\end{aligned} \tag{5.24}$$

5.3 Simulações Numéricas

Para os exemplos a seguir, considere o Sistema (1.4) com os parâmetros dados por (5.25), obtidos através da modelagem de um conversor *boost* (ver Seção 5.2) com especificações apresentadas na Tabela 1, sendo que o valor $V_{ph} = 29$ V corresponde à tensão de máxima potência fornecida por um painel fotovoltaico de modelo 1Soltech 1STH-215-P para uma referência de 1000 W/m^2 de irradiância solar e o ponto de operação escolhido foi $U_c = 0,5$. Os valores de indutância e capacitância foram dimensionados conforme Erickson e Maksimović (2001) para uma operação em modo contínuo do conversor. O modelo resultante da modelagem foi discretizado utilizando matriz de transição de estados e ZOH, metodologia clássica (OGATA, 1995), e aplicada via função *c2d* do MATLAB®. Foi utilizada uma frequência de amostragem $f_s = 25$ kHz, que corresponde a uma frequência cinco vezes maior que a frequência de chaveamento utilizada no conversor (5 kHz, conforme Tabela 1) e atende ao Teorema da Amostragem[1].

$$F = \begin{bmatrix} 0,9942 & -0,1005 \\ 0,1079 & 0,9808 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 11,8188 \\ -0,9496 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0,2024 \\ 0,0110 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \forall k = 0, 1, ..., N. \tag{5.25}$$

[1]Seja $x(t)$ um sinal contínuo no tempo, f_c a maior frequência entre as componentes de $x(t)$ e f_s a frequência com que este sinal é amostrado. Se $f_s > 2f_c$, então o sinal contínuo $x(t)$ pode ser completamente reconstruído por um sinal amostrado x_k (OGATA, 1995).

Tabela 1 – Especificações do conversor *boost* utilizado nas simulações numéricas

Tensão quiescente de entrada V_{ph}	29 V
Tensão quiescente de saída V_o	58 V
Razão cíclica quiescente U_c	0.5
Indutância L	19.73 mH
Capacitância C	18.38 mF
Frequência de chaveamento	5 kHz

5.3.1 Exemplo 1

Nesta primeira simulação é feita uma análise comparativa das respostas fornecidas pelos controladores LQR clássico (2.4), LQRED (3.6), DALQR (A.1) e ELQR (A.4) para o Sistema (5.25) quando este é perturbado por um distúrbio caracterizado pela função $d_k = 0,95^k$, o mesmo utilizado na análise feita por Singh e Pal (2017), conforme ilustra a Figura 15. As formulações do DALQR e ELQR são apresentadas no Apêndice A.

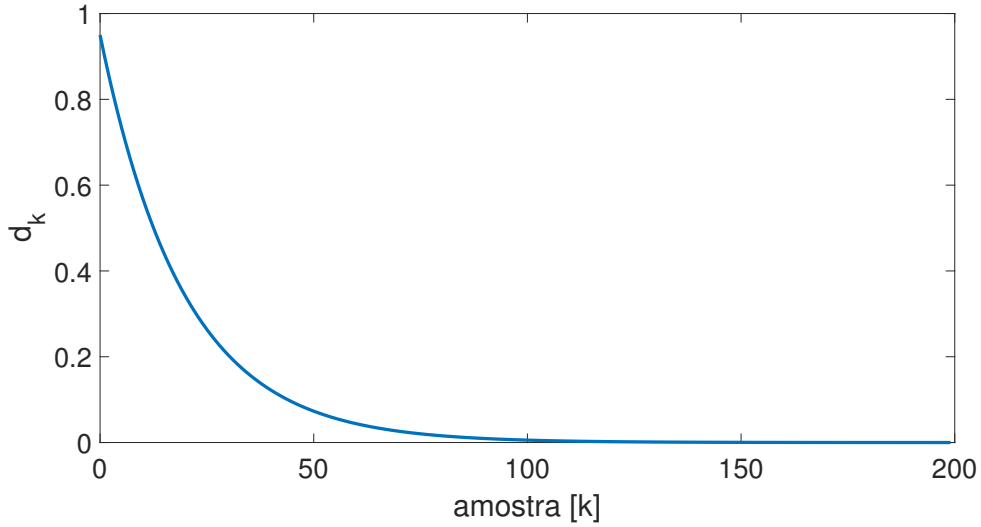


Figura 15 – Distúrbio aplicado no Exemplo 1

São avaliadas mudanças nos pesos Q^x e R de acordo com o que foi explanado no Capítulo 2. Considerando as dimensões do Sistema (5.25), R é um escalar e Q^x é uma matriz diagonal de ordem dois, ou seja, .

$$Q^x = \begin{bmatrix} Q^x(1,1) & 0 \\ 0 & Q^x(2,2) \end{bmatrix}$$

Em um primeiro estudo de caso é mantida a mesma proporção entre os pesos. No Caso 2 busca-se observar a resposta do sistema quando $Q^x(1,1)$ é muito maior que R e $Q^x(2,2)$, ou seja, a prioridade do controlador é obter um menor erro na primeira variável de estado. O terceiro caso faz essa mesma análise para a segunda variável de estado, penalizando $Q^x(2,2)$ em relação aos

outros pesos. Por último, o Caso 4 avalia um aumento no peso R para observar o comportamento do sistema frente a uma penalização no esforço de controle.

5.3.1.1 Caso 1

- $P_{N+1} = I$, $Q^x = I$ e $R = I$ (mesma proporção entre os pesos), em que I indica matriz identidade.

A Figura 16 apresenta as normas euclidianas, $||x_k||$, das variáveis de estado do Sistema (5.25) após a simulação. Nota-se que o ELQR apresenta uma resposta mais rápida, ou seja, o estado do sistema converge para zero em menos iterações. Em contrapartida, esse método apresenta um sobressinal acentuado nos instantes iniciais se comparado com o LQRED e o DALQR. O LQR clássico apresenta o pior desempenho, sendo bastante afetado pelos distúrbios.

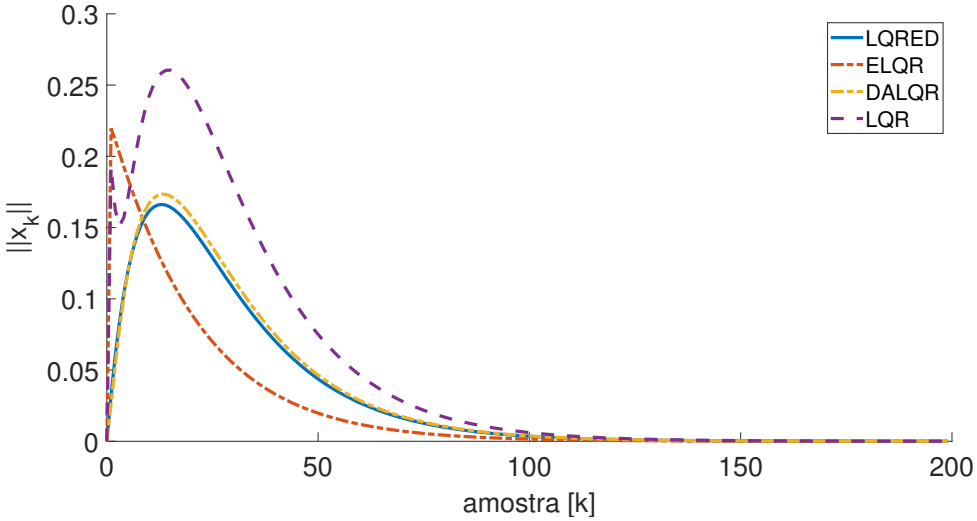


Figura 16 – Normas das variáveis de estado - Exemplo 1 - Caso 1

A evolução da função custo J (2.2) para cada instante k é apresentada na Figura 17, mostrando que J_{ELQR} apresenta um crescimento mais acentuado nos instantes iniciais, mas acomoda em um valor menor, que os demais métodos, o que se reflete em melhor desempenho do sistema ao longo do processo realizado. A Tabela 2 apresenta o custo final de cada método para este caso. O LQRED proposto apresenta melhor resultado que o DALQR e o LQR clássico.

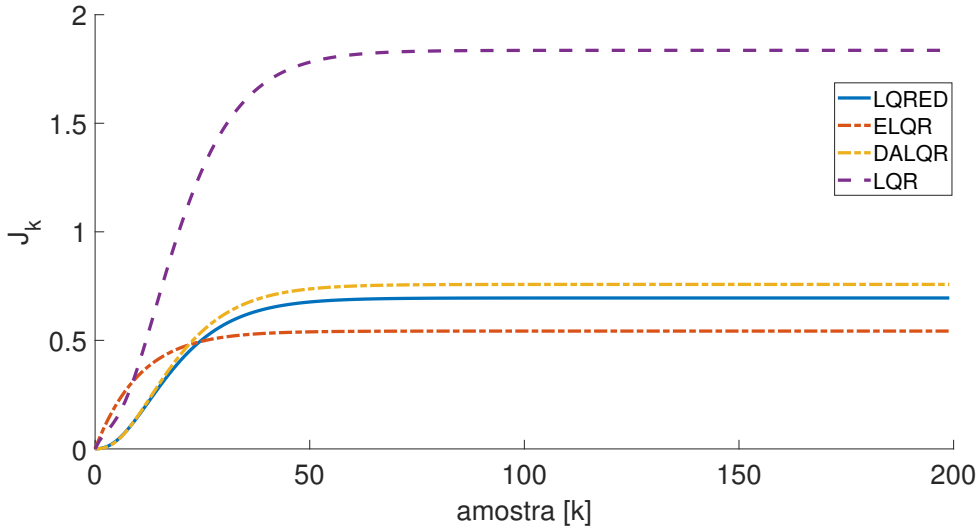


Figura 17 – Evolução da função custo - Exemplo 1 - Caso 1

Tabela 2 – Custo final - Exemplo 1 - Caso 1

	LQRED	**ELQR**	**DALQR**	**LQR**
J	0,6952	0,5428	0,7577	1,8359

A Figura 18 apresenta o sinal de controle gerado por cada regulador. Nota-se que, no instante inicial, quando ocorre uma variação instantânea no valor de d_k, o ELQR apresenta um maior esforço de controle u_k de tal forma que o seu valor máximo é maior que o valor máximo atingido pelo LQR clássico, ou seja, $\max(|u_k|_{ELQR}) > \max(|u_k|_{LQR})$. A depender de qual seja o atuador que receba esse sinal de controle, seus limites físicos podem ser extrapolados ou, caso exista algum limitador (saturação) nesse atuador, a resposta projetada pode não ser atingida. Por outro lado, o valor máximo de $|u_k|$ a partir do LQRED e DALQR são menores que $\max(|u_k|_{LQR})$. Os valores de $\max(|u_k|)$ são apresentados na Tabela 3 para cada método.

Observe que o valor inicial u_o do LQR clássico é zero, pois sua lei de controle $u_k = K_k^x x_k$ apenas percebe o distúrbio no instante seguinte quando o efeito do mesmo se propaga pelo estado do sistema. Os outros métodos já atuam sobre o distúrbio no mesmo instante em que ele ocorre.

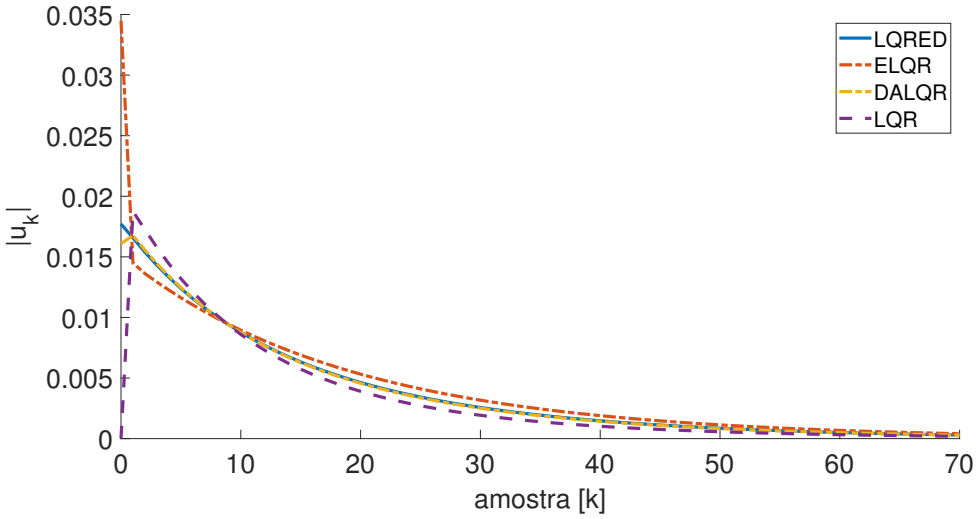


Figura 18 – Sinais de controle resultantes - Exemplo 1 - Caso 1

Tabela 3 – Valor máximo do sinal de controle - Exemplo 1 - Caso 1

	LQRED	**ELQR**	**DALQR**	**LQR**
$\max(\lvert u_k \rvert)$	0,0177	0,0345	0,0168	0,0187

5.3.1.2 Caso 2

- $P_{N+1} = I$, $Q^x(1,1) = 1000$, $Q^x(2,2) = 1$ e $R = I$ (maior importância para a primeira variável de estado).

A Figura 19 apresenta as normas euclidianas das variáveis de estado do Sistema (5.25) para este segundo caso analisado. Nota-se que os três métodos de rejeição de distúrbio apresentam uma resposta semelhante com relação a sobressinal e à rejeição do distúrbio. O LQR clássico apresenta um desempenho inferior, necessitando de mais iterações para atingir o zero.

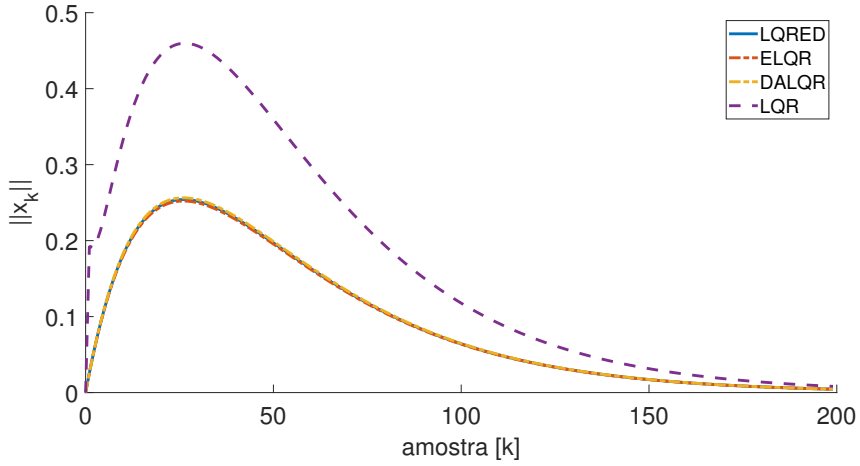


Figura 19 – Normas das variáveis de estado - Exemplo 1 - Caso 2

A evolução da função custo J (2.2) é apresentada na Figura 20, reforçando a ideia de que o LQRED, ELQR e DALQR, apresentam um desempenho semelhante. Os valores de J_{LQR} estão divididos por 100, para uma melhor visualização dos resultados para os quatro métodos no mesmo gráfico. Os valores finais dos custos para cada método são apresentados na Tabela 4, sendo possível observar que, neste caso analisado, o LQRED apresenta, levemente, um menor custo em relação ao ELQR e DALQR. Isso mostra que o desempenho dos reguladores depende dos pesos utilizados.

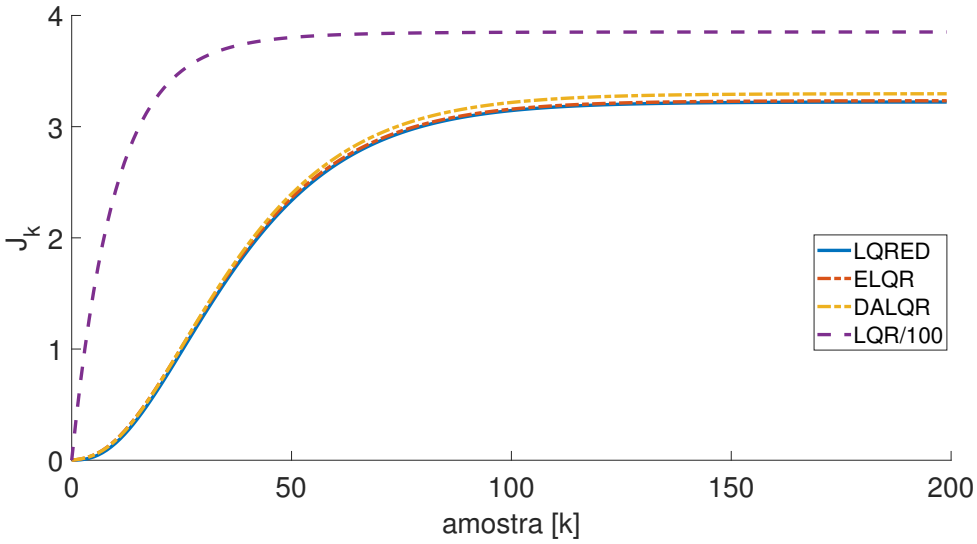


Figura 20 – Evolução da função custo - Exemplo 1 - Caso 2

Tabela 4 – Custo final - Exemplo 1 - Caso 2

	LQRED	**ELQR**	**DALQR**	**LQR**
J	3,2215	3,2329	3,2958	385,1288

A Figura 21 apresenta o sinal de controle gerado por cada regulador. A Tabela 5 apresenta os valores $\max(|u_k|)$ para cada método, percebendo-se que LQRED e ELQR têm esse valor máximo levemente superior ao do LQR.

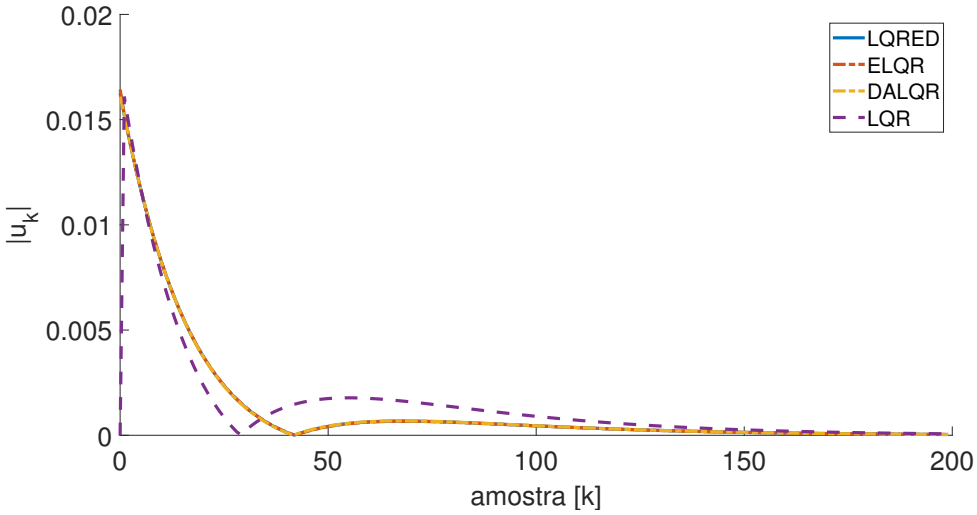


Figura 21 – Sinais de controle resultantes - Exemplo 1 - Caso 2

Tabela 5 – Valor máximo do sinal de controle - Exemplo 1 - Caso 2

	LQRED	**ELQR**	**DALQR**	**LQR**
$\max(\lvert u_k \rvert)$	0,0163	0,0164	0,0161	0,0161

5.3.1.3 Caso 3

- $P_{N+1} = I$, $Q^x(1,1) = 1$, $Q^x(2,2) = 1000$ e $R = I$ (maior importância para a segunda variável de estado).

A Figura 22 apresenta as normas euclidianas das variáveis de estado do Sistema (5.25) para este terceiro caso analisado. Nota-se, a princípio, o elevado sobressinal do ELQR em relação aos demais métodos, mas sua acomodação é mais rápida. A resposta do LQRED e do DALQR são melhores que a resposta do LQR clássico. Com relação ao Caso 1, este terceiro caso apresenta uma resposta mais rápida, pois o estado do sistema converge em menos iterações para zero.

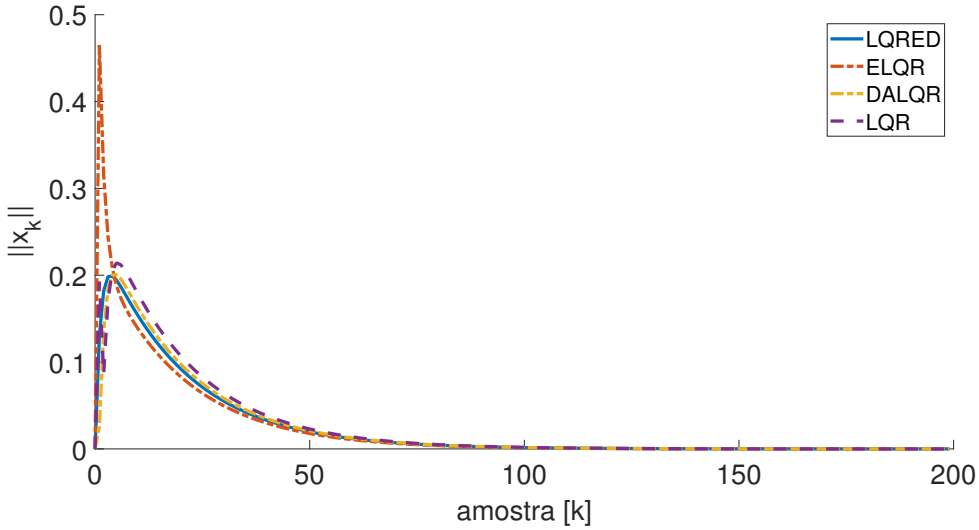


Figura 22 – Normas das variáveis de estado - Exemplo 1 - Caso 3

A evolução da função custo J (2.2) é apresentada na Figura 23, mostrando que o ELQR é superior em relação aos demais métodos. O LQRED proposto se apresenta como o segundo melhor método. Os valores finais dos custos para cada método são apresentados na Tabela 6.

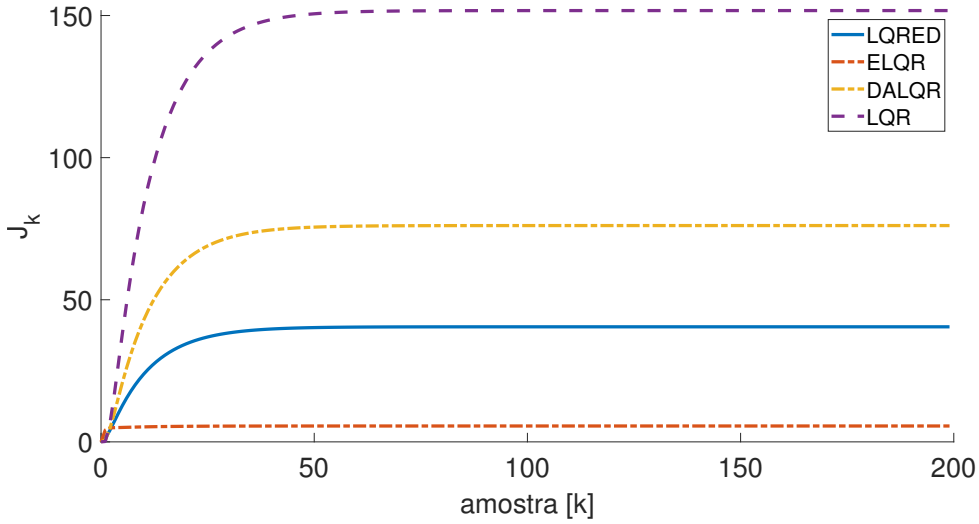


Figura 23 – Evolução da função custo - Exemplo 1 - Caso 3

Tabela 6 – Custo final - Exemplo 1 - Caso 3

	LQRED	**ELQR**	**DALQR**	**LQR**
J	40,4809	5,5851	76,1018	151,7416

A Figura 24 apresenta o sinal de controle gerado por cada regulador. A Tabela 7 apresenta os valores $\max(|u_k|)$ para cada método, onde percebe-se uma situação semelhante em relação ao Caso 1, o ELQR tem um esforço de controle mais acentuado que os demais métodos quando

ocorre a variação instantânea em d_0 (k=0). O LQRED e o DALQR têm os menores esforços de controle nesse instante inicial.

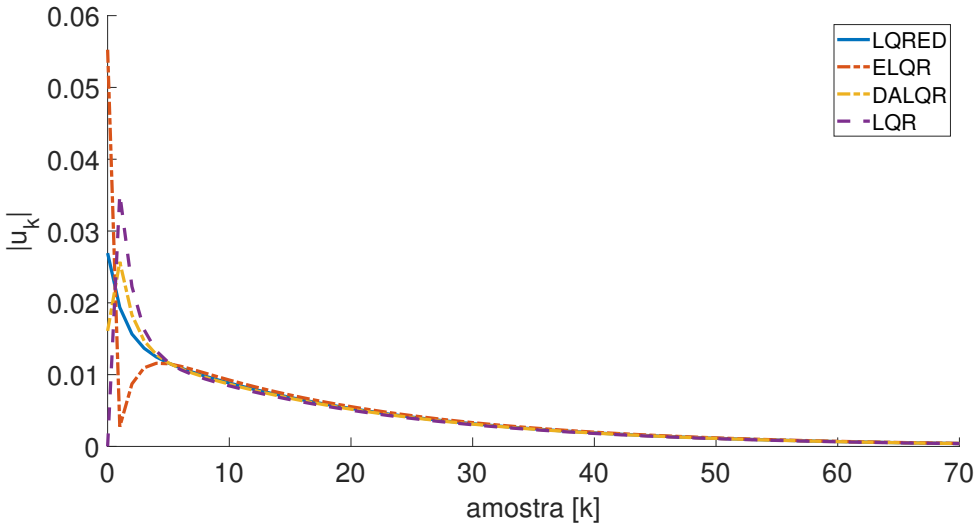


Figura 24 – Sinais de controle resultantes - Exemplo 1 - Caso 3

Tabela 7 – Valor máximo do sinal de controle - Exemplo 1 - Caso 3

	LQRED	**ELQR**	**DALQR**	**LQR**
$\max(\lvert u_k \rvert)$	0,0269	0,0553	0,0257	0,0351

5.3.1.4 Caso 4

- $Q^x(P_{N+1} = I)$, $Q^x = I$ e $R = 1000$ (maior limitação para o esforço de controle).

Neste caso a discussão começará pela análise do esforço de controle, cujo comportamento apresentado por cada regulador se encontra na Figura 25. A Tabela 7 apresenta os valores $\max(|u_k|)$ para cada método. Observa-se que o LQRED apresenta um sinal de controle mais limitado em relação ao ELQR e DALQR, atendendo melhor a ideia de aumentar o peso R, referente à penalização do esforço de controle conforme discutido no Capítulo 2. Isso se deve ao fato de que o ELQR e o DALQR não utilizam o valor de R no cálculo de K^d, como pode ser observado em (A.1) e (A.4) no Apêndice A. Assim, nesses métodos o valor da parcela $K^d d_k$ é limitado pelo valor de d_k, de modo que torna difícil para o projetista do controlador contornar possíveis problemas no atuador variando o valor de R. Por outro lado, o LQRED leva em consideração o valor de R no cálculo de K^d de acordo com (3.7).

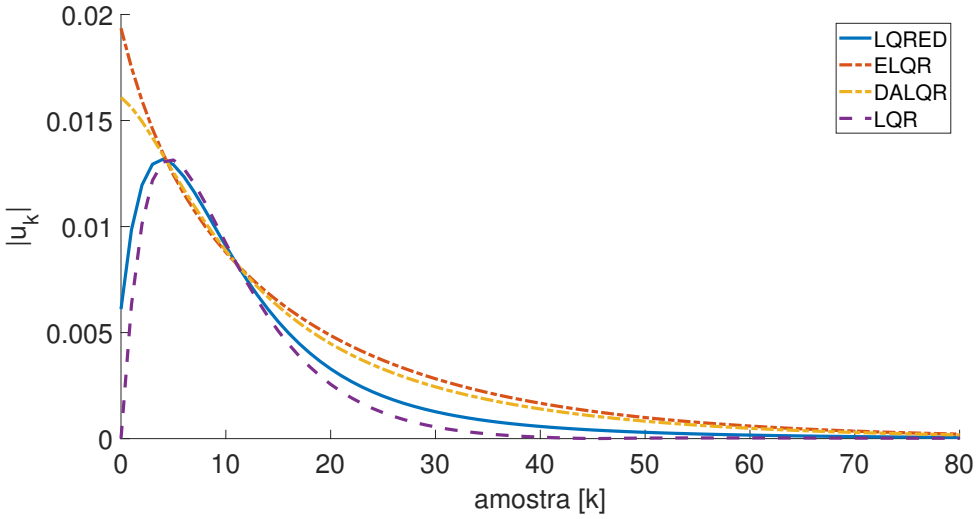


Figura 25 – Sinais de controle resultantes - Exemplo 1 - Caso 4

A Figura 26 apresenta as normas euclidianas das variáveis de estado do Sistema (5.25) para o Caso 4. Nota-se que, embora ainda seja melhor que o LQR clássico, o desempenho do LQRED diminui muito em relação aos outros dois métodos de rejeição de distúrbio, mas isso se deve ao fato de ocorrer uma limitação do esforço de controle no ganho K^d também, como já foi discutido anteriormente.

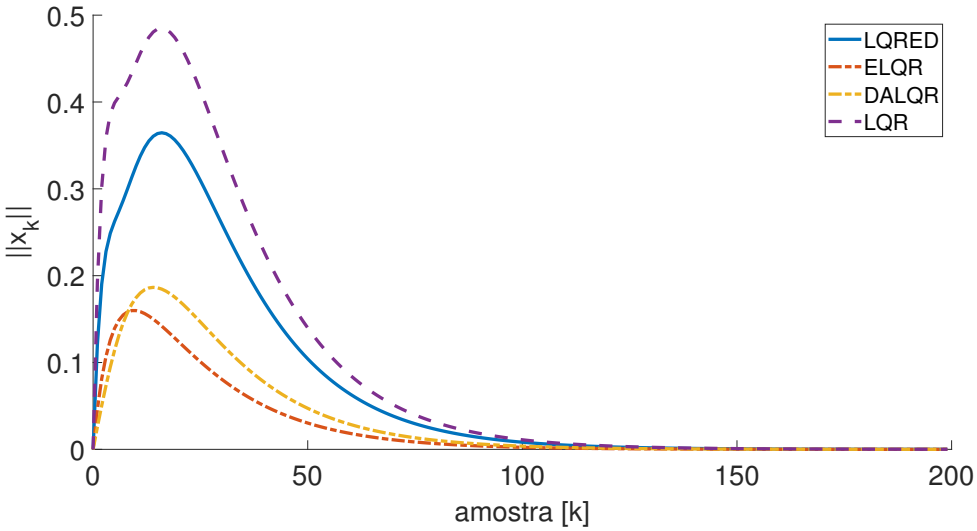


Figura 26 – Normas das variáveis de estado - Exemplo 1 - Caso 4

A evolução da função custo J (2.2) é observada na Figura 27 e a Tabela 8 apresenta o custo final para cada método. Neste estudo de caso o DALQR apresentou custo final semelhante ao ELQR, mostrando, mais uma vez, que o desempenho dos reguladores depende dos pesos utilizados.

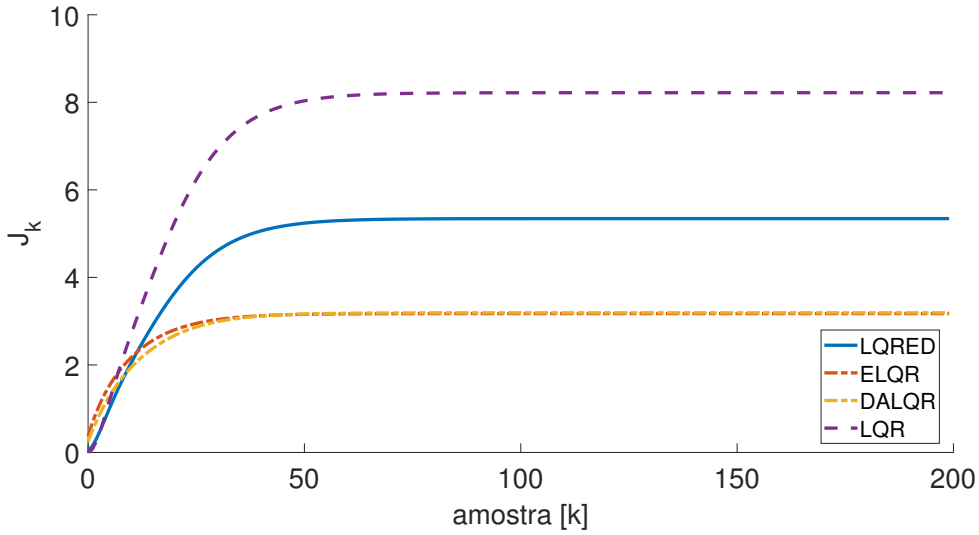


Figura 27 – Evolução da função custo - Exemplo 1 - Caso 4

Tabela 8 – Custo final - Exemplo 1 - Caso 4

	LQRED	**ELQR**	**DALQR**	**LQR**
J	5,3429	3,1730	3,1908	8,2196

Tabela 9 – Valor máximo do sinal de controle - Exemplo 1 - Caso 4

	LQRED	**ELQR**	**DALQR**	**LQR**
$\max(\lvert u_k \rvert)$	0,0132	0,0193	0,0161	0,0131

5.3.2 Exemplo 2

Este exemplo numérico mostra uma comparação de desempenho entre o LQI clássico (2.35), LQIED (3.31), e os métodos DALQR (A.1) e ELQR (A.4) implementados com ação integral (DALQR-I e ELQR-I). O DALQR-I foi implementado com as mesmas identidades do LQIED, conforme (3.28), mas excluindo-se a linha e a coluna 4, porque estas são responsáveis pelo cálculo do ganho K_k^d no LQIED, enquanto no DALQR K_k^d é dado por (A.2). Nas simulações realizadas, o ELQR-I não admitiu utilizar essas mesmas identidades pois, devido à linha de zeros, o termo $(P_k - Q)$ em (A.4) se torna singular durante a solução da equação recursiva de Riccati e, assim, não admite a sua inversa, necessária para o cálculo de K_k^d através deste método. Assim, o ELQR-I e o LQI clássico foram implementados com as identidades clássicas (2.29) e, para manter uma comparação mais justa entre os métodos, tiveram o ganho K_k^r igual ao do LQIED e DALQR-I adicionado (estes dois últimos métodos diferem apenas no ganho K_k^d).

Neste exemplo é avaliada também a raiz média do erro quadrático (RMSE, *Root Mean Square Error*) entre a saída do sistema e a referência. Como a ideia é fazer a saída do sistema

seguir uma determinada referência, este indicador é mais adequado na avaliação do erro $(r_k - y_k)$ pois representa um acumulo sempre positivo do mesmo, enquanto a integral do erro ϵ_k pode se anular.

Considere novamente o Sistema (5.25), mas agora com a ação integral (3.26) associada a este sistema. A referência utilizada é $r_k = 2,\ \forall k \in [0, N]$ e o gráfico do distúrbio aplicado é apresentado na Figura 28.

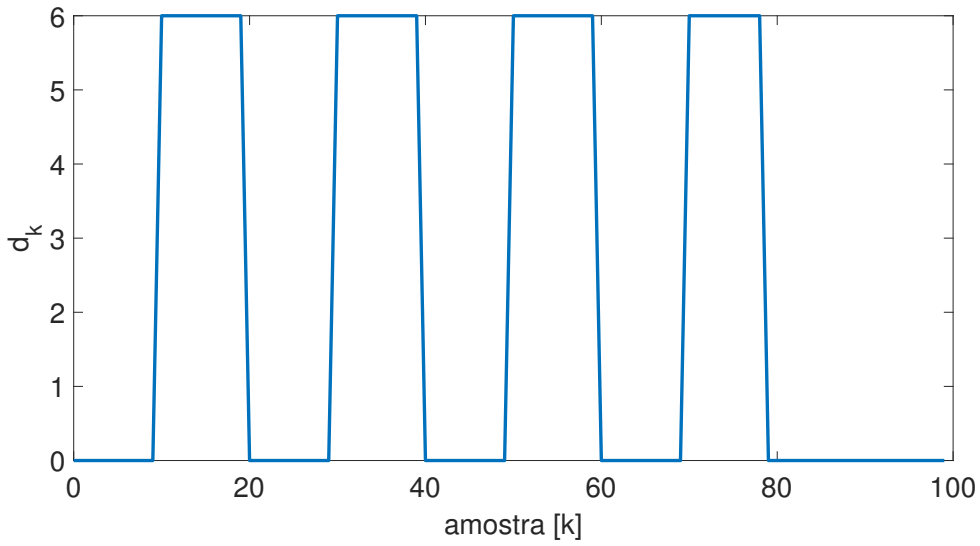


Figura 28 – Distúrbio aplicado no Exemplo 2

5.3.2.1 Caso 1

- $P_{N+1} = I$, $Q^x = I$, $Q^\epsilon = I$ e $R = I$.

Assim como no Exemplo 1, este primeiro caso mostra uma análise da resposta do sistema utilizando pesos em mesma proporção. A Figura 29 mostra as saídas do sistema com a utilização de cada método e na Figura 30 observa-se o módulo do esforço de controle resultante. Note que, como já mencionado anteriormente, a própria formulação clássica do LQI consegue compensar o distúrbio de forma a atingir a resposta desejada. Entretanto, os métodos de rejeição de distúrbio fazem isso com menor sobressinal, com menor tempo de acomodação e com menores picos no esforço de controle nos instantes em que ocorrem os distúrbios.

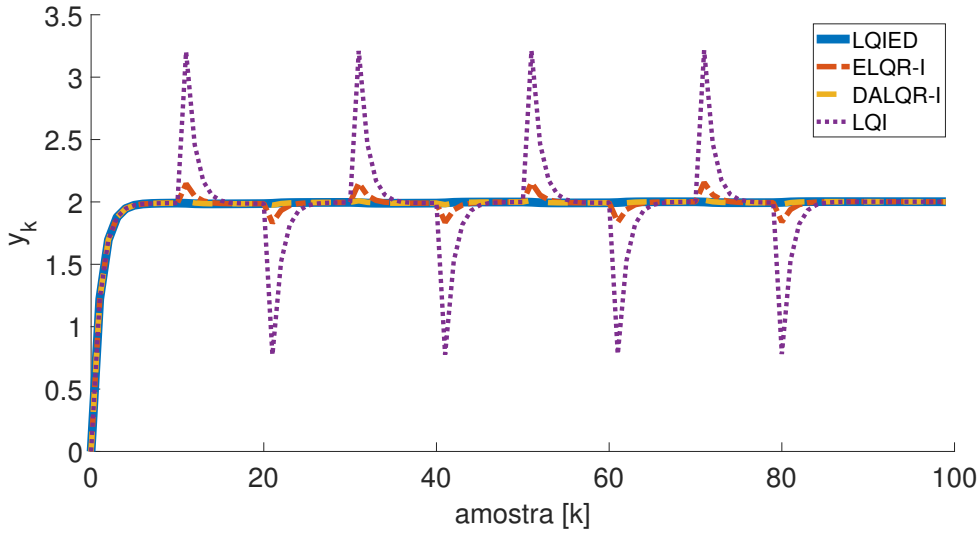


Figura 29 – Saídas do sistema - Exemplo 2 - Caso 1

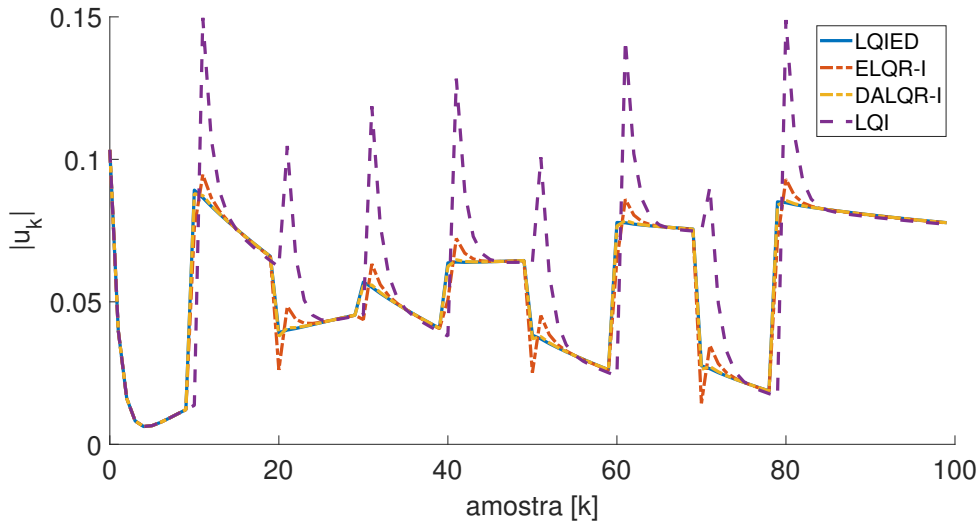


Figura 30 – Sinais de controle resultantes - Exemplo 2 - Caso 1

A Tabela 10 apresenta o custo final J (2.2) e o RMSE de cada método. Nota-se que o LQIED apresenta o melhor resultado, seguindo a referência estipulada com custo e RMSE levemente inferiores com relação aos outros métodos de rejeição de distúrbio. O LQI clássico tem o pior desempenho pois sua lei de controle não apresenta um ganho K^d voltado para compensar distúrbios.

Tabela 10 – Custo final e RMSE - Exemplo 2 - Caso 1

	LQIED	**ELQR-I**	**DALQR-I**	**LQI**
$J[\times 10^3]$	5,7730	5,7760	5,7733	5,8097
RMSE	0,2173	0,2225	0,2174	0,4314

5.3.2.2 Caso 2

Como a resposta no Caso 1 já foi bem satisfatória em termos de erro em regime permanente, será apresentado apenas este próximo caso aumentando o peso Q^{ϵ} para tentar forçar o LQI clássico a ter uma resposta melhor. Considere os seguintes pesos

- $P_{N+1} = I$, $Q^{x} = I$, $Q^{\epsilon} = 1000$ e $R = I$.

A Figura 29 apresenta as saídas do sistema com a utilização de cada método. A Figura 30 mostra o módulo do esforço de controle resultante. Observa-se que, embora apresente uma resposta mais rápida, o LQI clássico ainda sofre os efeitos dos distúrbios, enquanto os outros métodos conseguem rejeitá-los. Conforme especificado em Smith et al. (2017), ocorre um incremento indesejável no esforço de controle do método clássico devido ao aumento de Q^{ϵ}, enquanto os outros métodos não apresentam este problema.

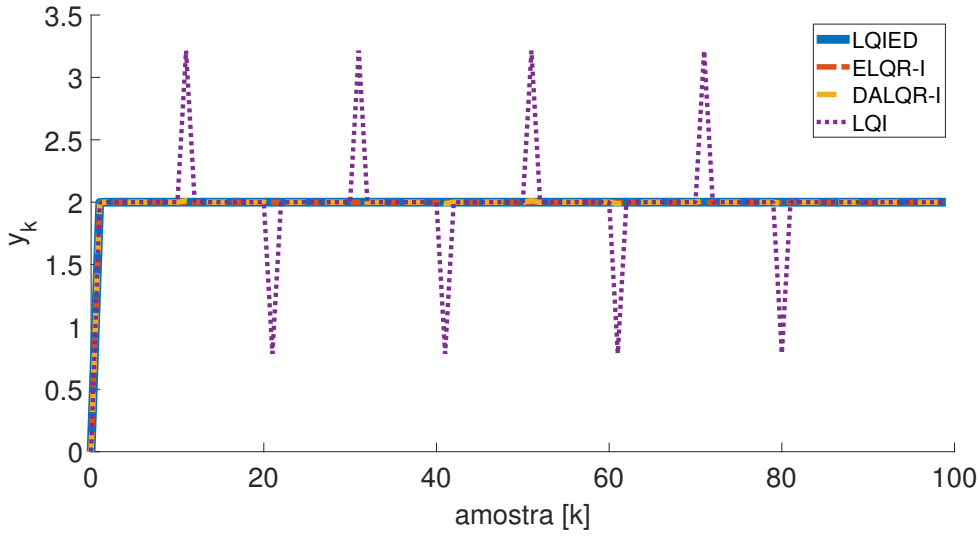


Figura 31 – Saídas do sistema - Exemplo 2 - Caso 2

A Tabela 11 apresenta o custo final J (2.2) e o RMSE de cada método. Embora o RMSE do LQI clássico tenha melhorado em relação ao caso anterior, ainda é aproximadamente o dobro do RMSE dos outros métodos, os quais apresentaram desempenhos semelhantes se comparados entre si.

Tabela 11 – Custo final e RMSE - Exemplo 2 - Caso 2

	LQIED	**ELQR-I**	**DALQR-I**	**LQI**
$J[\times 10^4]$	5,8495	5,8495	5,8496	5,8744
RMSE	0,2000	0,2000	0,2000	0,3974

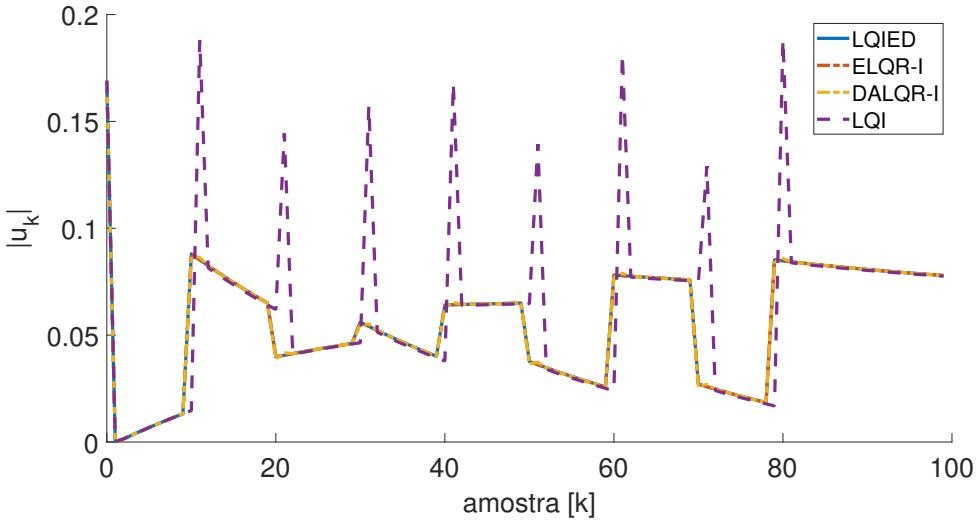


Figura 32 – Sinais de controle resultantes - Exemplo 2 - Caso 2

5.3.3 Exemplo 3

Este exemplo aborda a aplicação do LQGUI, LQRED combinado com o KFUI, apresentado no Capítulo 4.

Considere o Sistema (5.25) sujeito a entradas desconhecidas, ou seja, distúrbios não mensuráveis, com comportamento de acordo com a Figura 15. Foi incluído um ruído de 5% nos estados e na saída. Considere o Caso 1 do Exemplo 1 ($P_{N+1} = I$, $Q^x = I$ e $R = I$). As covariâncias do KFUI foram definidas como[2] $\Pi^x_{0|0} = I$, $W = I$ e $V = 1$.

A Figura 33 mostra a norma dos estados para LQGUI, ELQG, DALQG (ELQR/DALQR combinado com KFUI) e LQG (clássico). A Figura 34 apresenta o sinal de controle gerado por cada regulador e a Figura 17 mostra a evolução da função custo J (2.2) para cada controlador.

Primeiramente nota-se a mesma situação do Exemplo 1: a formulação clássica apresenta o pior desempenho por não ter um ganho K^d para as estimativas $\hat{d}_k$. Os controladores têm o comportamento da norma dos estados, do esforço de controle e da função custo semelhante ao que foi apresentado no Exemplo 1 - Caso 1, entretanto o desempenho é um pouco pior devido à presença de ruídos no sistema e ao atraso do KFUI (veja Observação 4.3.1) na realização da estimativa de $\hat{d}_k$. O mesmo ocorre com relação aos casos 2, 3 e 4 do Exemplo 1, portanto eles serão omitidos neste quarto exemplo, valendo-se das mesmas discussões já apresentadas.

[2]Foram testados outros valores para V e W, mas não resultaram em mudanças nos resultados das estimativas.

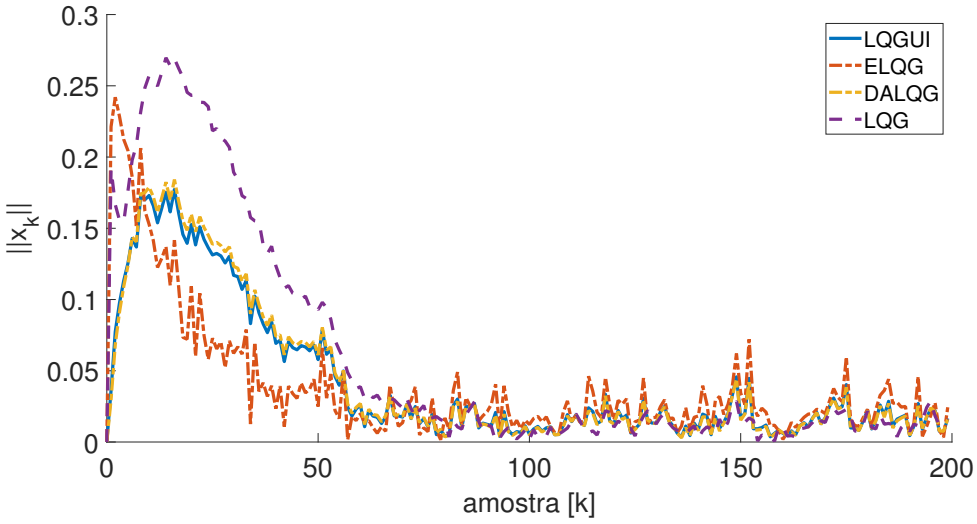


Figura 33 – Normas das variáveis de estado - Exemplo 3

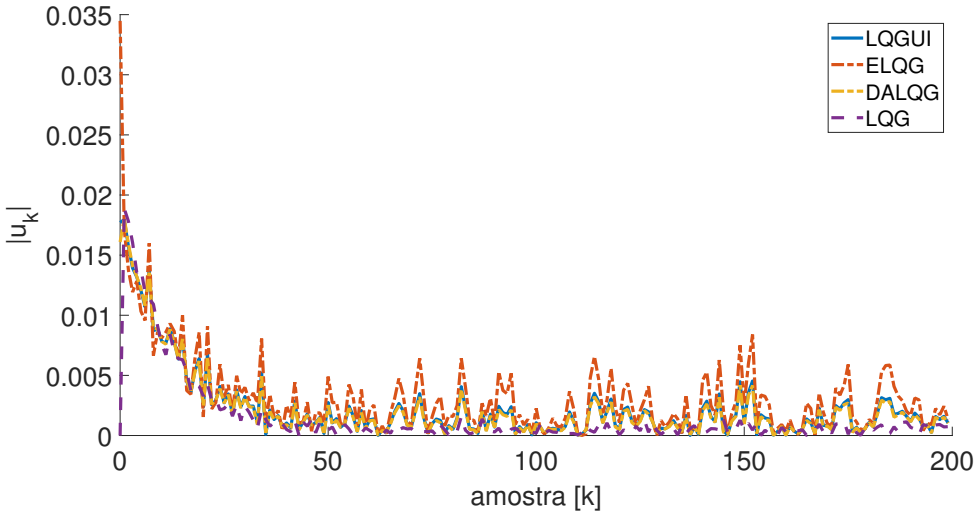


Figura 34 – Sinais de controle resultantes - Exemplo 3

Como os parâmetros do sistema, os ruídos e os pesos do controlador e do filtro são iguais em todos os métodos, a estimativa $\hat{d}_k$ obtida através de (4.13) por eles é a mesma e está apresentada na Figura 39 juntamente com o sinal real.

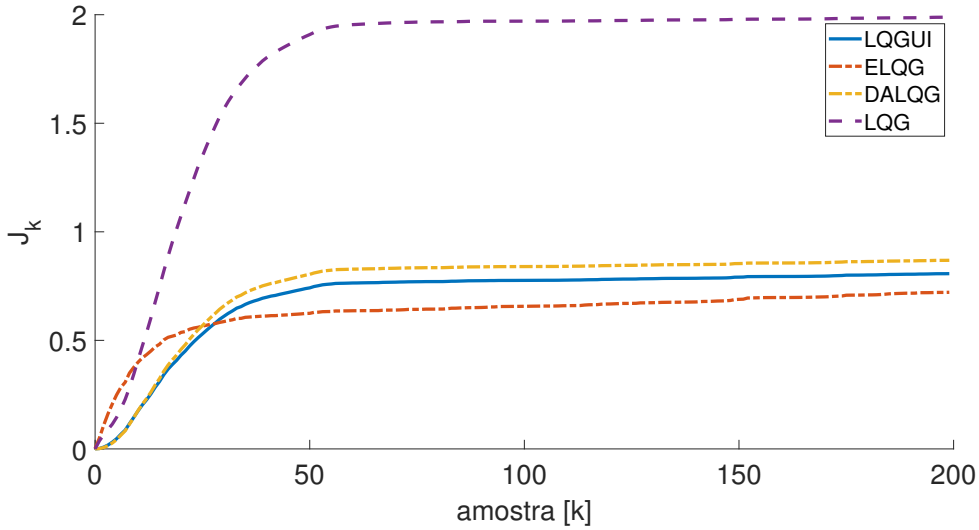


Figura 35 – Evolução da função custo - Exemplo 3

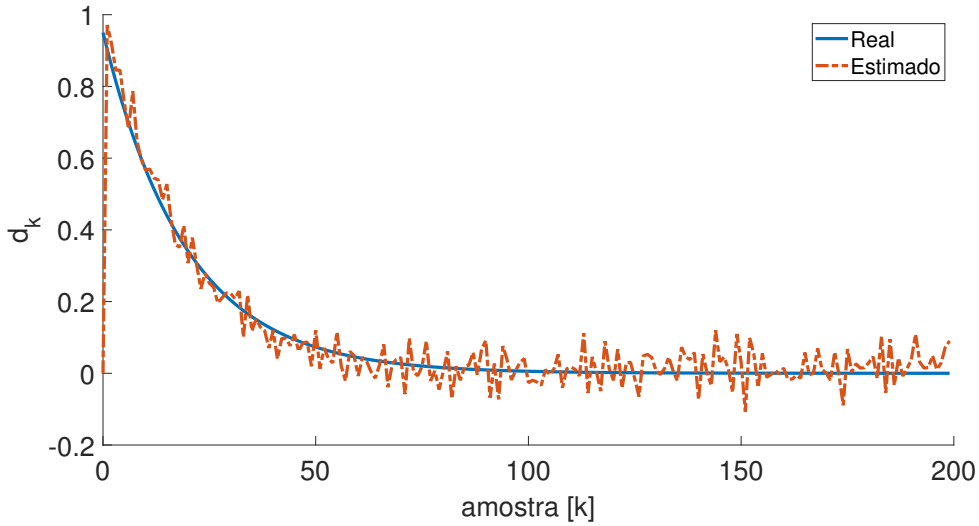


Figura 36 – Estimativa da entrada desconhecida - Exemplo 3

5.3.4 Exemplo 4

Considere novamente o sistema e KFUI do exemplo anterior. Este exemplo mostra uma implementação do LQGUI com ação integral (LQGUI-I). Os pesos utilizados para o regulador foram $P_{N+1} = I$, $Q^x(1,1) = 50$, $Q^x(2,2) = 1$, $Q^\epsilon = 10$ e $R = I$, os pesos do KFUI são $\Pi^x_{0|0} = I$, $W = I$ e $V = 1$ e a referência utilizada é $r_k = 2,\ \forall k \in [0, N]$.

A Figura 37 mostra as saídas do sistema com a utilização de cada método. Na Figura 30 observa-se o módulo do esforço de controle resultante. Note que, os métodos de rejeição de distúrbio funcionam com as estimativas $\hat{x}_k$ e $\hat{d}_k$ do KFUI e conseguem controlar o sistema para que a saída atinja a referência desejada.

O LQG-I, método clássico, apresenta um comportamento semelhante ao apresentado pelo LQI clássico no Exemplo 2, rejeita o distúrbio devido à ação integral e mantém a resposta

do sistema na referência estabelecida, mas apresenta um sobressinal quando ocorre variação instantânea em d_k. Os métodos de rejeição de distúrbio também têm esse comportamento de sobressinal na saída y_k, pois, devido ao atraso na estimativa da entrada desconhecida $\hat{d}_k$ (veja Observação 4.3.1), o sistema é afetado pelo distúrbio no instante em que ocorre uma variação instantânea, havendo ainda uma elevação no sinal de controle se comparado com o método clássico. Entretanto, como d permanece constante, a rejeição do distúrbio começa a ocorrer no instante $k+1$ seguinte com uma redução no esforço de controle.

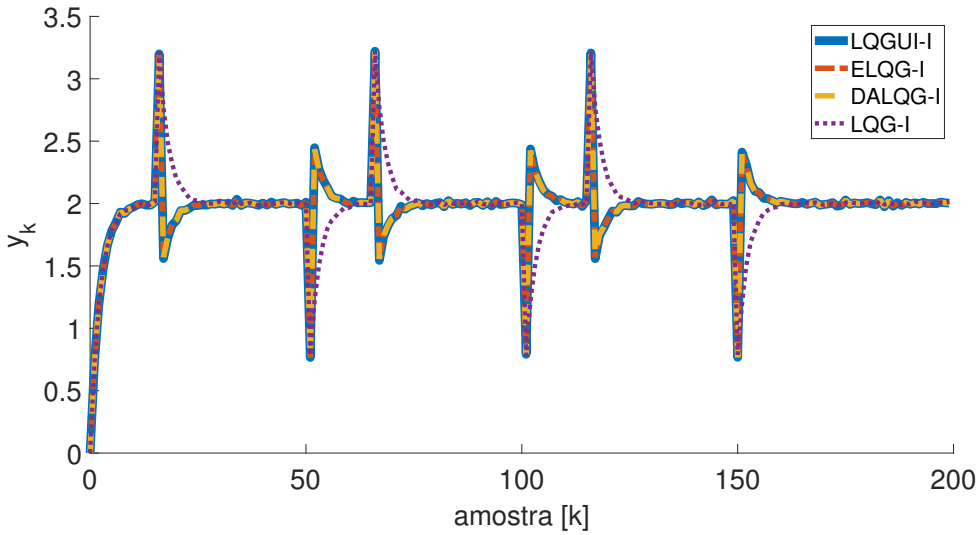


Figura 37 – Saídas do sistema - Exemplo 4

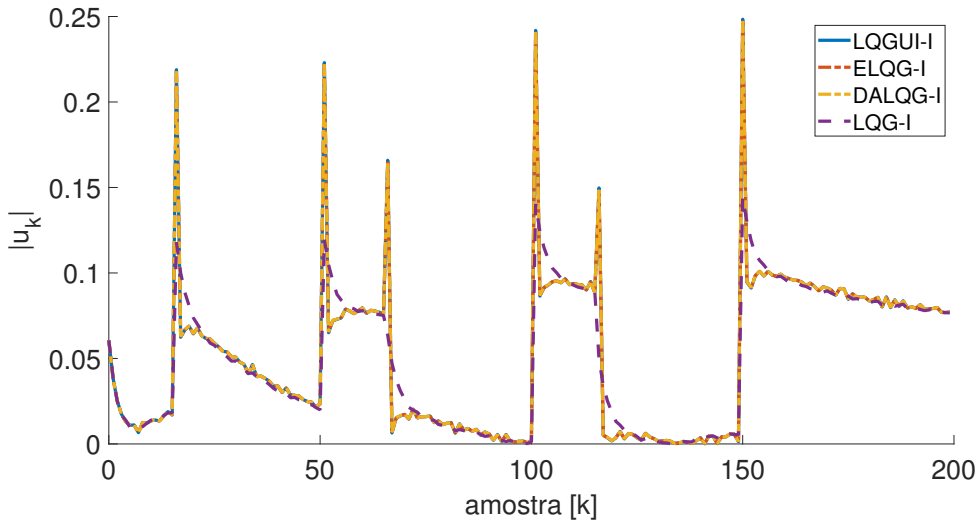


Figura 38 – Sinais de controle resultantes - Exemplo 4

Observe na Tabela 12 que, embora apresentem melhor desempenho, os métodos de rejeição de distúrbio (LQGUI-I, ELQG-I e DALQG-I) têm custo final J (2.2) e RMSE próximos aos do método clássico LQG-I. Isso é uma consequência direta do atraso na estimativa da entrada desconhecida $\hat{d}_k$.

Tabela 12 – Custo final e RMSE - Exemplo 4

	LQGUI-I	**ELQG-I**	**DALQG-I**	**LQG-I**
$J[\times 10^4]$	5,8697	5,8693	5,8692	5,8942
RMSE	0,2971	0,2963	0,2961	0,3304

Novamente, como os parâmetros do sistema, os ruídos e os pesos do controlador e do filtro são iguais em todos os métodos, a estimativa $\hat{d}_k$ da entrada desconhecida realizada por eles é a mesma e está apresentada na Figura 39 juntamente com o sinal real. Neste exemplo fica mais fácil ver o atraso que ocorre na estimativa da entrada desconhecida pelo KFUI.

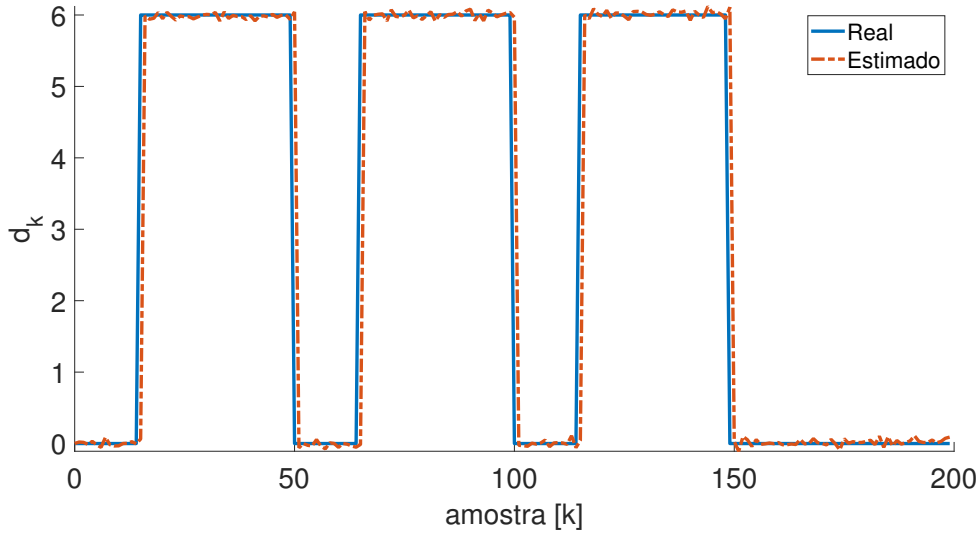


Figura 39 – Estimativa da entrada desconhecida - Exemplo 4

6 APLICAÇÕES DESENVOLVIDAS

Neste capítulo são apresentados os resultados de duas aplicações envolvendo sistemas fotovoltaicos e utilizando os modelos matemáticos dos conversores *boost* e dos painéis fotovoltaicos. Como explanado no capítulo anterior, a tensão e a corrente de entrada de conversores conectados a painéis fotovoltaicos estão sujeitas às variações de irradiância solar, que é uma variável que possui um comportamento aleatório. O modelo espaço de estados do conversor foi obtido de tal forma que variações na sua tensão de entrada correspondem à distúrbios externos/entradas desconhecidas. Nesse sentido, a primeira aplicação consiste na estimativa de irradiância através do KFUI e dos modelos do painel e do conversor. A segunda corresponde à realização de rastreamento de máxima potência utilizando LQIED. As aplicações foram desenvolvidas em ambiente MATLAB/Simulink®.

6.1 Aplicação do KFUI na Estimativa de Irradiância

Esta aplicação compreende a metodologia empregada em Madureira et al. (2019a), publicado nos Anais do 14º Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente sob o título de: *Irradiance Estimation Using Kalman Filter for State-space Systems with Unknown Inputs*.

Considerando a modelagem matemática apresentada na Seção 5.1, no *datasheet* do fabricante do painel fotovoltaico são encontradas as constantes V_{oc}, I_{sc}, αI_{sc}, N_S e N_P. Os valores de R_s, R_{sh}, a e V_g podem ser obtidos conforme apresentado em Tian et al. (2012) e Tan et al. (2013). A temperatura foi considerada constante a 25 ºC, pois essa grandeza pode ser facilmente medida sem apresentar obstáculos financeiros ou técnicos. Com isso, os efeitos de variação da temperatura na Equação (5.9) se cancelam. Portanto, para o cálculo de $g(t)$ resta o conhecimento de duas incógnitas, $i_{ph}(t)$ e $v_{ph}(t)$.

6.1.1 Estimativa de i_{ph_k} e v_{ph_k}

Para cada medida da tensão de saída v_{o_k} e conhecendo-se V_o, calcula-se a perturbação $\tilde{v}_{o_k}$ (nesse caso, $\tilde{y}(t) = \tilde{v}_o(t) \rightarrow \mathcal{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ em (5.22)) a partir da Equação (5.16), ou seja:

$$\tilde{v}_{o_k} = v_{o_k} - Vo \tag{6.1}$$

Com isso, $\tilde{v}_{o_k}$ e os parâmetros F, G e E do conversor são utilizados nas Equações (4.11) a (4.19) do KFUI. Como resultado, obtém-se as estimativas $\hat{\tilde{i}}_{ph_k}$, $\hat{\tilde{v}}_{o_k}$ e $\hat{\tilde{v}}_{ph_k}$. Consequentemente, pode-se calcular $\hat{i}_{ph_k}$, $\hat{v}_{o_k}$ e $\hat{v}_{ph_k}$ através das Equações (6.2) a (6.4).

$$\hat{i}_{ph_k} = I_{ph} + \hat{\tilde{i}}_{ph_k} \tag{6.2}$$

$$\hat{v}_{o_k} = V_o + \hat{\tilde{v}}_{o_k} \tag{6.3}$$

$$\hat{v}_{ph_k} = V_{ph} + \hat{\tilde{v}}_{ph_k} \tag{6.4}$$

6.1.2 Estimativa da irradiância

Em tempo discreto, a Equação (5.9) pode ser representada pela Equação (6.5).

$$g_k = \left[\frac{i_{ph_k}}{N_p} + i'_{dk} + \frac{1}{Rsh} \left(\frac{v_{ph_k}}{N_S} + \frac{i_{ph_k} R_s}{N_P} \right) \right] \times \frac{g_r}{I_{sc} + \alpha_{I_{sc}} (T_k - T_r)} \tag{6.5}$$

Para cada instante $k = 0, 1, 2, ..., N$ as únicas incógnitas para realizar o cálculo de g_k são v_{ph_k} e i_{ph_k}. Considerando que a fonte de entrada do conversor seja um painel fotovoltaico com modelo matemático apresentado na Seção 5.1, o circuito resultante é o mesmo ilustrado na Figura 12. Com as estimativas $\hat{v}_{ph_k}$ e $\hat{i}_{ph_k}$ realizadas através do filtro de Kalman é possível obter uma estimativa $\hat{g}_k$ para a irradiância, susbstituindo $\hat{v}_{ph_k}$ e $\hat{i}_{ph_k}$ na Equação (6.5).

6.1.3 Resultados

Foram realizadas simulações no software MATLAB/Simulink® utilizando o circuito da Figura 12 juntamente com o KFUI.

Utilizou-se o painel fotovoltaico de modelo 1Soltech 1STH-215-P, cujas especificações estão disponíveis na biblioteca *MATLAB's Specialized Power Systems Toolbox* e são apresentadas na Tabela 13 para uma referência de 1000 W/m^2.

Tabela 13 – Especificações do painel solar 1STH-215-P

Potência máxima	213,15 W
Tensão de circuito aberto	36,30 V
Tensão de máxima potência	29,00 V
Corrente de curto-circuito	7,84 A
Corrente de máxima potência	7,35 A
Células por módulo	6 x 10
Fator de idealidade do diodo	0,98
Resistência *shunt* R_{sh}	313,40 Ω
Resistência série R_s	0,39 Ω

O conversor *boost* utilizado foi projetado de acordo com Erickson e Maksimović (2001) e tem as especificações conforme Tabela 14.

As matrizes de ponderação do KFUI utilizadas foram

$$V = 0.2030 \times 10^{-5}$$
$$W = \begin{bmatrix} 0.1807 \times 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0.1807 \times 10^{-5} \end{bmatrix}.$$

Através de medidas de irradiância obtidas na base de dados do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE (2019), dois dias com as seguintes características foram analisados:

Tabela 14 – Especificações do conversor *boost*

Tensão quiescente de entrada V_{ph}	29,3 V
Tensão quiescente de saída V_o	58 V
Razão cíclica quiescente U_c	0,4948
Indutância L	19,94 µH
Capacitância C	36,34 µF
Frequência de chaveamento	50 kHz

- Dia 1: céu limpo;
- Dia 2: céu nublado;

Dois casos foram analisados para cada dia:

- Caso 1: ausência de ruído na medida da tensão de saída do conversor;
- Caso 2: presença de ruído gaussiano com média 0 e desvio padrão 1 na medida de $v_o(t)$;;

Os resultados foram avaliados através da *Normalized Root Mean Square Error* (nRMSE), de acordo com (SCOLARI et al., 2018a; SCOLARI et al., 2018b),

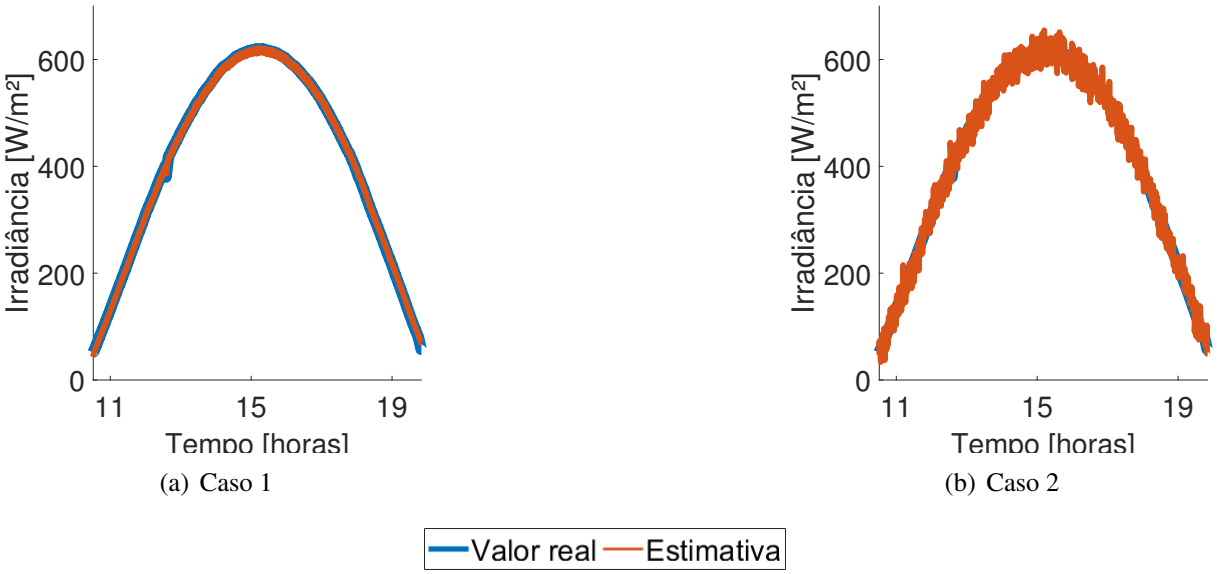
$$nRMSE = \frac{1}{\bar{M}}\sqrt{\sum_{k=1}^{N}\frac{\left(M_k - \hat{M}_k\right)^2}{N}}, \tag{6.6}$$

em que N é o número de medidas disponíveis, $\bar{M}$ é a média das medidas, M_k é a k-ésima medida conhecida e $\hat{M}_k$ é a k-ésima estimativa da irradiância obtida pelo KFUI.

Os nRMSEs obtidos para as estimativas no primeiro dia podem ser observados na Tabela 15. Os gráficos das estimativas de irradiância e da tensão e corrente de saída do painel fotovoltaico são apresentados nas Figuras 40 a 42.

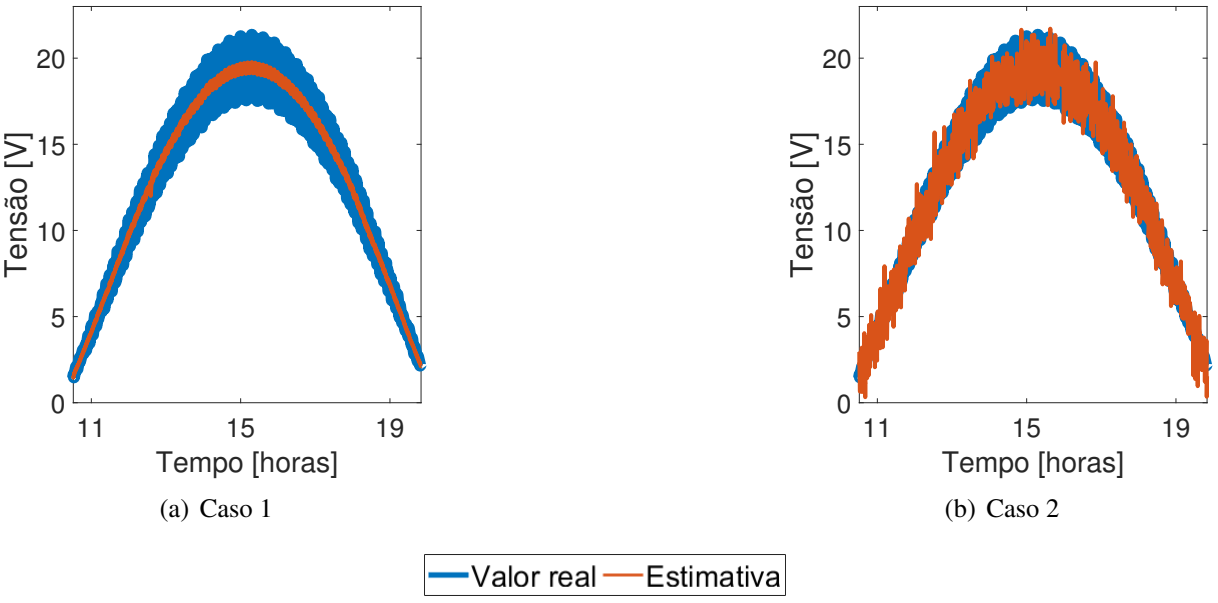
Tabela 15 – nRMSE para estimativas do Dia 1

	nRMSE[%]		
	$\hat{g}_k$	$\hat{v}_{ph_k}$	$\hat{i}_{ph_k}$
Caso 1	0,93	5,66	0,65
Caso 2	3,96	6,92	3,93



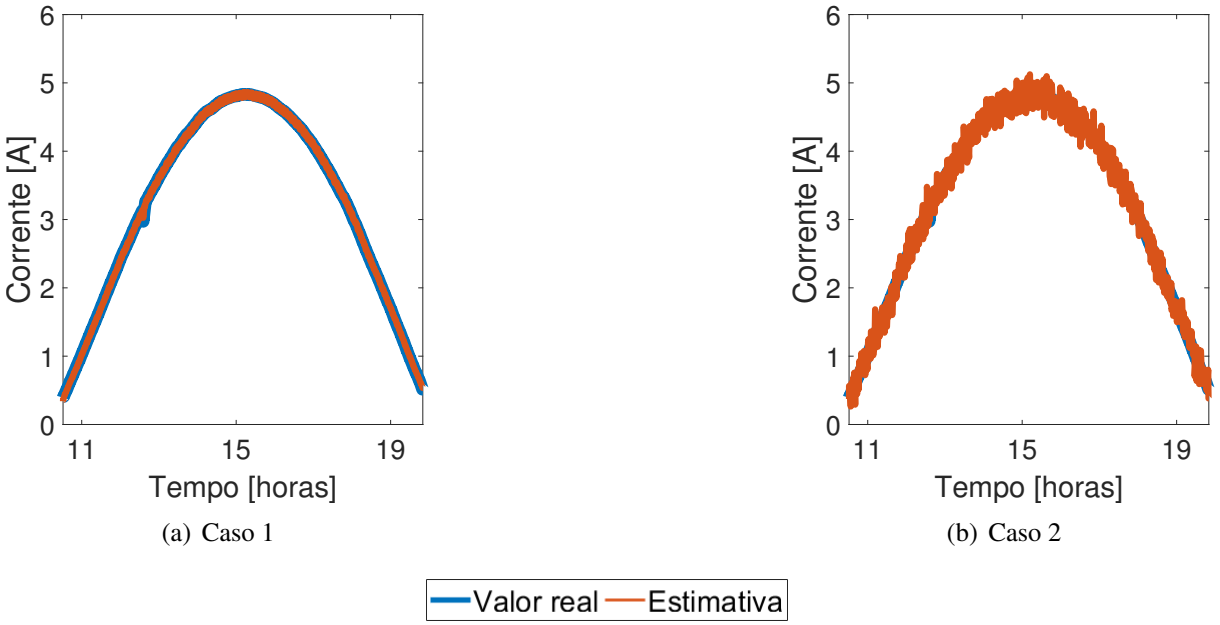
(a) Caso 1 (b) Caso 2

Figura 40 – Estimativa de irradiância – Dia 1



(a) Caso 1 (b) Caso 2

Figura 41 – Estimativa da tensão de saída do painel fotovoltaico – Dia 1



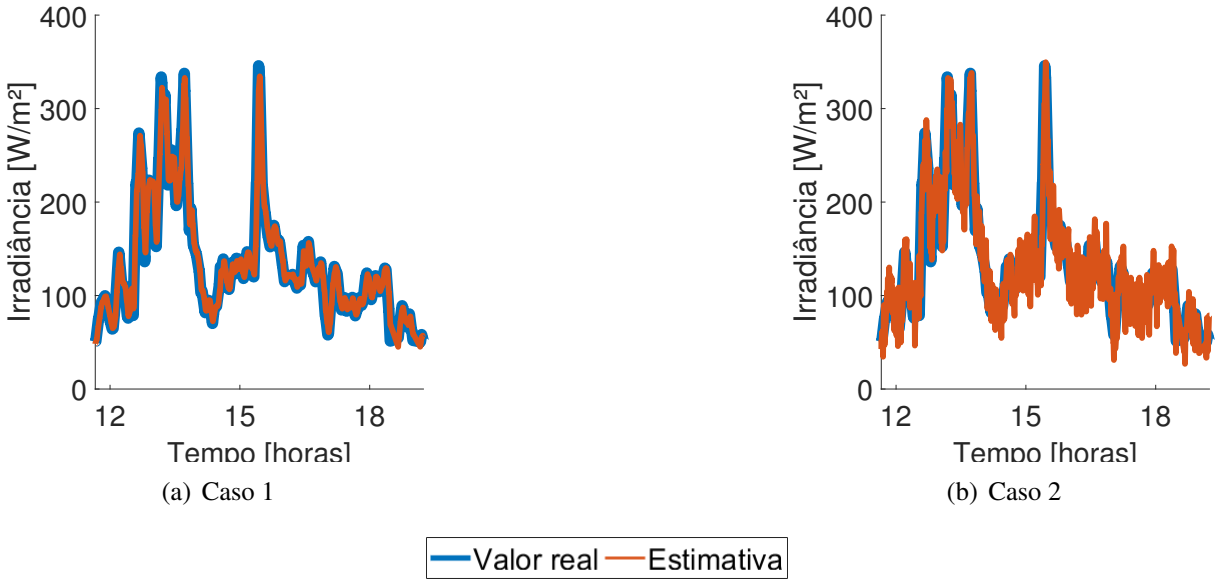
(a) Caso 1 (b) Caso 2

Figura 42 – Estimativa da corrente de saída do painel fotovoltaico – Dia 1

No segundo dia analisado, as estimativas foram obtidas com nRMSEs apresentados na Tabela 16 e com os gráficos das Figuras 43 a 45.

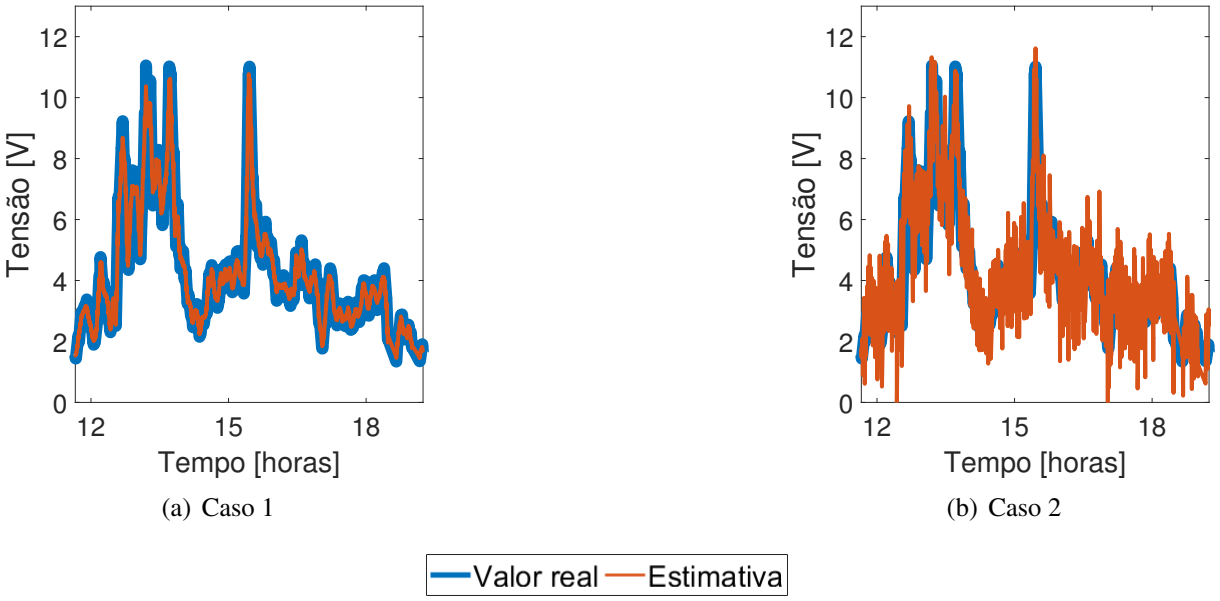
Tabela 16 – nRMSE para estimativas do Dia 2

	nRMSE[%]		
	$\hat{G}_k$	$\hat{v}_{ph_k}$	$\hat{i}_{ph_k}$
Caso 1	8.32	5.72	4.55
Caso 2	14.23	13.15	12.46



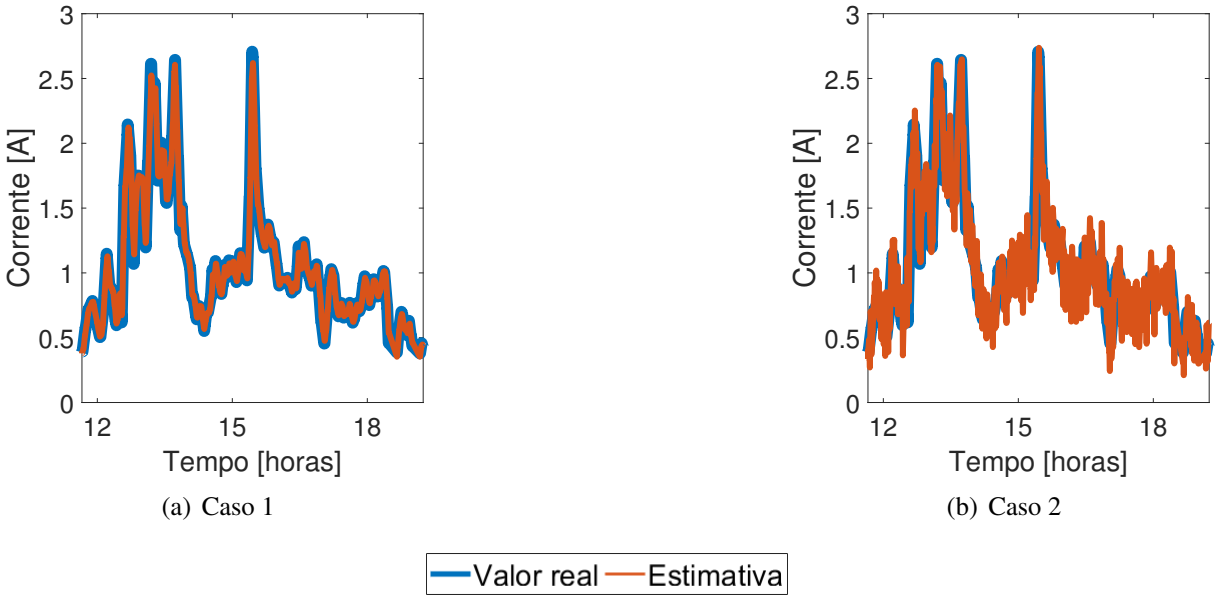
(a) Caso 1 (b) Caso 2

Figura 43 – Estimativa de irradiância – Dia 2



(a) Caso 1 (b) Caso 2

Figura 44 – Estimativa da tensão de saída do painel fotovoltaico – Dia 2



(a) Caso 1 (b) Caso 2

Figura 45 – Estimativa da corrente de saída do painel fotovoltaico – Dia 2

Os resultados mostram que, através da metodologia aplicada, as estimativas obtidas apresentaram valores de nRMSE compatíveis com métodos baseados em satélites e processamento de imagens, os quais representam o estado da arte em estimativa de irradiância. Além disso, verificou-se que o KFUI pode substituir capacitores utilizados como filtro de tensão na saída de painéis fotovoltaicos, reduzindo o custo desse tipo de sistema, principalmente os de grande porte.

Assim, devido à formulação espaço de estados empregada, esse trabalho sobre estimativa da irradiância apresenta novas perspectivas para controle de sistemas fotovoltaicos como, por exemplo, a aplicação dos reguladores propostos nos Capítulos 3 e 4. Maiores detalhes podem ser

encontrados em Madureira et al. (2019a).

6.2 Regulador de Máxima Potência em Painéis Fotovoltaicos com LQIED

Esta aplicação foi apresentada em Madureira et al. (2019b), publicado nos Anais da 14ª Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações sob o título de: *Regulador Linear Quadrático com Ação Integral para Sistemas Lineares com Rejeição de Distúrbios*.

Considere o painel fotovoltaico alimentando uma carga resistiva R através de um conversor *boost* conforme ilustrado na Figura 12. As Figuras 8 e 9 mostram como a potência de um painel fotovoltaico depende do valor de irradiância, da temperatura e da tensão na saída do mesmo.

A ideia básica dessa aplicação é regular a máxima potência do painel fotovoltaico a partir do controle realizado sobre a razão cíclica de chaveamento do semicondutor S do conversor. Alterando essa razão cíclica, a resistência equivalente conectada ao painel muda o seu valor e, consequentemente, ocorre uma variação na tensão e corrente de saída do painel. Dessa maneira, o controlador deve fazer com que em cada instante k a razão cíclica forneça uma resistência equivalente tal que o produto da tensão e corrente (potência elétrica) na saída do sistema fotovoltaico coincida com o ponto de máxima potência para a irradiância. A variação na tensão $v_{ph}(t)$ foi modelada como um distúrbio para o sistema, visto que essa variável depende diretamente da irradiância solar, uma grandeza de comportamento estocástico.

Um dos métodos mais comuns e de simples aplicação para esse rastreamento do ponto de máxima potência (MPPT, *Maximum Power Point Tracking*) consiste no algoritmo Perturba e Observa (P&O). Basicamente, o P&O altera a razão cíclica do conversor baseando-se na curva de potência e nas medidas de tensão e corrente da saída do painel fotovoltaico (SUMATHI et al., 2015).

Na simulação realizada foram comparados o LQIED, LQI clássico e um algoritmo P&O clássico obtido em Sumathi et al. (2015) a fim de verificar qual dos três faz o sistema operar da forma mais eficiente, ou seja, fornecendo maior potência durante o período analisado.

Os painéis fotovoltaicos utilizados são do modelo 1Soltech 1STH-215-P. As especificações do painel para uma referência de 1000 W/m^2 e do conversor utilizados na simulação são apresentadas nas Tabelas 13 e 14. O conversor foi modelado de acordo com (5.24) a partir dessas especificações e considerando a medida como sendo $\tilde{y}_k = \tilde{i}_{ph_k}$. Os detalhes sobre o modelo matemático e as características dos painéis fotovoltaicos e desse tipo de conversor podem ser consultados nas Seções 5.1 e 5.2.

Dois casos foram analisados: um com referências do tipo degrau e outro com medidas reais de irradiância obtidas em um dia de céu aberto com passagem de algumas nuvens. Os dados do segundo caso foram obtidos na base de dados do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE (2019). A saída considerada no modelo matemático é a potência fornecida pelo painel.

6.2.1 Caso 1

A Figura 46 mostra o resultado do primeiro caso, onde percebe-se que nos três métodos a saída converge para as referências de máxima potência. A Tabela 17 apresenta a potência final obtida por cada método no período analisado.

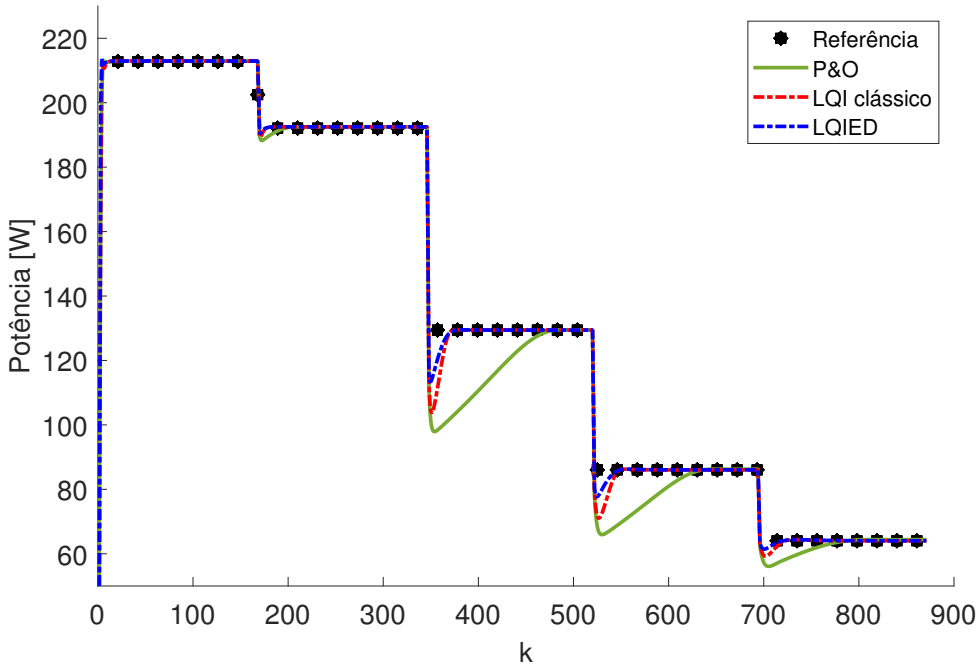


Figura 46 – Potência do sistema fotovoltaico para o Caso 1

Tabela 17 – Potência total do sistema fotovoltaico para o Caso 1

	Referência	**LQIED**	**LQI clássico**	**P&O**
Potência [MW]	118,951	118,281	117,947	115,095

Os resultados distintos se devem à resposta de cada método às variações dos pontos de máxima potência (referência), que provocam efeitos transitórios na resposta do sistema. Os tempos de acomodação em cada um desses transitórios são menores nas respostas do LQIED e do LQI clássico, permitindo que o sistema permaneça por mais tempo no ponto de máxima potência quando comparados com a saída do P&O. Além disso, o LQIED apresenta menor *overshoot* (diferença entre a referência e a saída em momentos transitórios) em relação aos outros métodos. Neste ponto, o LQIED é melhor que o LQI clássico devido ao seu ganho K_k^d, que fornece uma melhor rejeição do distúrbio causado pela variação no valor da referência.

6.2.2 Caso 2

As curvas de potência obtidas no segundo caso, onde foram utilizadas medidas reais de irradiância, são apresentadas na Figura 47 e observa-se novamente que através dos três métodos a potência do sistema converge para a referência estabelecida.

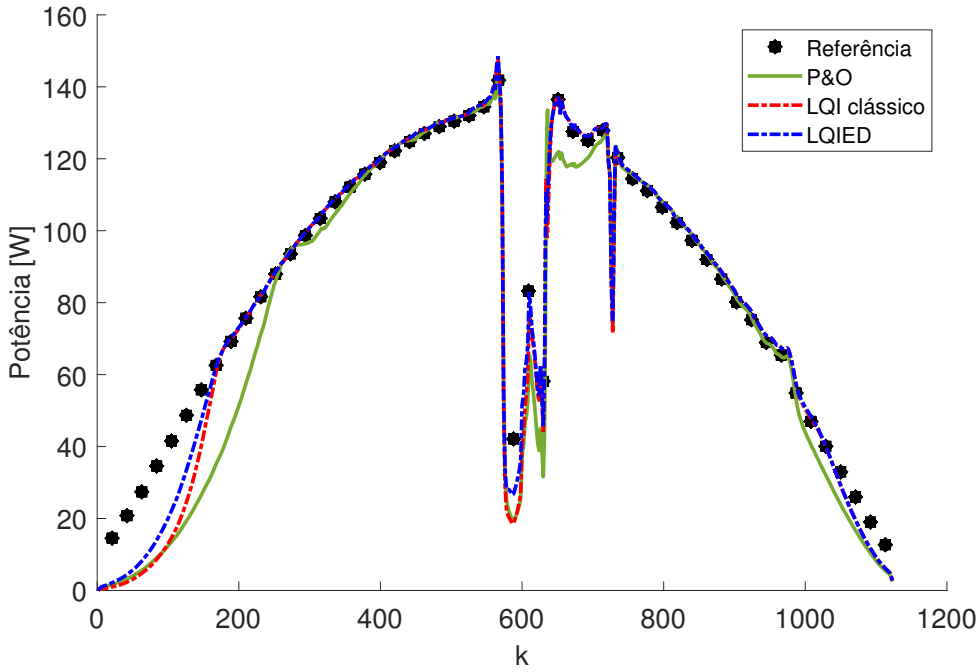


Figura 47 – Potência do sistema fotovoltaico para o Caso 2

A Tabela 18 apresenta a potência final obtida por cada método no período analisado. O LQIED apresenta o melhor desempenho, sendo válidos os mesmos pontos discutidos no Caso 1 a respeito da resposta transitória do sistema.

Tabela 18 – Potência total do sistema fotovoltaico para o Caso 2

	Referência	**LQIED**	**LQI clássico**	**P&O**
Potência [MW]	93,656	90,861	89,636	85,353

7 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentada uma metodologia para o projeto de controladores ótimos baseados em funcional quadrático para sistemas lineares sujeitos a entradas desconhecidas (distúrbios/entradas externas não mensuráveis). Na teoria de sistemas de controle, a proposta apresentada tem a importância de fornecer esforços de controle que resultem em uma resposta mais adequada para um sistema linear influenciado pela ação de distúrbios, mesmo que eles não possam ser medidos. Para isso, primeiramente foi proposto um Regulador Linear Quadrático para sistemas sujeitos a distúrbios/entradas externas (LQRED) baseado na técnica de sistemas aumentados e na solução clássica do Regulador Linear Quadrático (LQR). Combinando o LQRED com o Filtro de Kalman para sistemas sujeitos a entradas desconhecidas (KFUI), obteve-se o Regulador Gaussiano para sistemas sujeitos a entradas desconhecidas (LQGUI), que pode ser aplicado em situações em que as variáveis de estado e/ou distúrbios externos não são mensuráveis.

Investigou-se também a inclusão de ação integral nos controladores desenvolvidos, visto que esse é o método clássico para a rejeição de distúrbios através da redução do erro em regime permanente e por se tratar de uma técnica comumente utilizada nos conversores chaveados utilizados em sistemas fotovoltaicos, que também foi objeto de estudo dessa pesquisa. Além disso, essa análise acerca da ação integral não foi realizada em propostas de controladores semelhantes encontradas na literatura. Como consequência, obteve-se dois novos controladores que consistem no LQRED e LQGUI com ação integral, LQIED e LQGUI-I, respectivamente.

Os métodos propostos foram testados em simulações numéricas e comparados com as formulações clássicas e outras propostas de reguladores com rejeição de distúrbios encontrados na literatura, o ELQR (SINGH; PAL, 2017) e o DALQR (OSTERTAG; GOYENA, 2011). As simulações contemplaram tanto situações envolvendo distúrbios mensuráveis e entradas desconhecidas e constatou-se em todos os casos analisados que as soluções clássicas (LQR, LQI e LQG) apresentam, em comparação com os outros métodos, maior valor final para a função custo quadrática. Isso se deve ao fato de que os métodos com rejeição de distúrbio têm uma lei de controle que é função não só do estado do sistema mas também do distúrbio/entrada desconhecida.

Entre os métodos de rejeição de distúrbios/entradas desconhecidas, o melhor valor final para a função custo depende da situação analisada. Nos casos com ação integral, o valor da função custo distúrbio foram muito semelhantes. Já nos outros casos, observou-se que o desempenho dos métodos está associado com os pesos Q e R utilizados, ressaltando-se que o ELQR apresentou os menores valores de função custo de uma maneira geral.

Analisando-se o esforço de controle, observou-se que a rejeição de distúrbio/entradas desconhecidas pode exigir mais do atuador com relação ao método clássico, sendo necessária uma análise criteriosa dessa variável por parte do projetista para que não sejam excedidos limites físicos do sistema. O ELQR apresentou esforços de controle mais elevados nos instantes em

que ocorrem variações instantâneas no valor do distúrbio. Além disso, o LQRED apresentou resultados com melhor limitação no esforço de controle, pois em sua solução o ganho associado ao distúrbio depende diretamente do peso R, enquanto nas formulações do ELQR e do DALQR a influência de R se dá apenas no ganho associado ao estado.

Ainda com relação ao esforço de controle ocorre um outro problema nos controladores gaussianos, pois existe um atraso de tempo entre a medição da saída do sistema e a estimativa da entrada desconhecida, o que gera um esforço de controle elevado quando o valor do distúrbio varia instantaneamente. Para solucionar este problema é necessário um estimador que forneça a entrada desconhecida no mesmo instante da medida, solução não encontrada na revisão bibliográfica realizada durante esta pesquisa.

Algumas aplicações práticas da metodologia proposta foram desenvolvidas para sistemas fotovoltaicos, onde a variação da irradiância solar pode ser considerada um distúrbio externo/entrada desconhecida que se relaciona diretamente com a tensão de entrada em conversores chaveados, dispositivos normalmente conectados nas saídas dos painéis fotovoltaicos. Para isso, o primeiro passo foi obter a modelagem desse sistema em espaço de estados sujeito a distúrbios externos/entradas desconhecidas. Com esse modelo foi possível utilizar o KFUI para estimar irradiância solar de maneira adequada e aplicar o LQIED para regular a máxima potência de um sistema fotovoltaico. A importância deste trabalho para essas aplicações consiste em realizar um rastreamento de máxima potência mais eficiente se comparado com o LQI clássico e o método Perturba e Observa (que é o mais empregado), resultando em maior produção de energia pelo sistema fotovoltaico e diminuição da quantidade de painéis necessários para os empreendimentos. E mesmo que não seja possível medir a irradiância ou a tensão de entrada do conversor, a aplicação é garantida pelo LQGUI-I, embora ocorra uma perda de desempenho devido ao atraso entre medida e estimativa por parte do KFUI.

Dessa maneira, este trabalho contribui com novas metodologias para tratar adequadamente do problema de sistemas sujeitos a distúrbios externos/entradas desconhecidas, destacando-se os controladores com ação integral e suas aplicações em sistemas fotovoltaicos.

Trabalhos futuros envolvem a prova de convergência e estabilidade dos controladores LQRED e LQIED, bem como sua aplicação em sistemas sujeitos a incertezas paramétricas. Além disso, as aplicações em sistemas fotovoltaicos devem seguir com a utilização do LQGUI com ação integral em simulações e, posteriormente, com implementações em experimentos reais.

REFERÊNCIAS

AGUIRRE, L. A. **Introdução à Identificação de Sistemas**. 4. ed. Belo Horizonte, Minas Gerais: Editora UFMG, 2015. ISBN 978-85-423-0079-6.

ARMGHAN, H.; YANG, M.; WANG, M. Q.; ALI, N.; ARMGHAN, A. Nonlinear integral backstepping based control of a DC microgrid with renewable generation and energy storage systems. **International Journal of Electrical Power and Energy Systems**, v. 117, p. 105613, may 2020. ISSN 01420615. Disponível em: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0142061519324457>.

BENRABAH, A.; KHOUCHA, F.; RAZA, A.; XU, D. A new robust control for grid connected photovoltaic systems based on active disturbance rejection control. **Journal of Electrical Systems**, v. 15, n. 1, p. 81–95, 2019. ISSN 11125209.

BRISILLA, R. M.; Jnaneswara Venkata Ramana, K.; RAO, M. M. Output Voltage Regulation of DC to DC Buck Converter using Integral SMC. In: **2019 Innovations in Power and Advanced Computing Technologies (i-PACT)**. IEEE, 2019. p. 1–5. ISBN 978-1-5386-8190-9. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/document/8960057/>.

CERRI, J. P. **Regulador robusto recursivo para sistemas lineares de tempo discreto no espaço de estado**. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009. Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/18/18153/tde-02072009-141628/>.

CERRI, J. P.; TERRA, M. H.; SIQUEIRA, A. A. G.; PAZELLI, T. F. P. A. T. Measurement-feedback control for discrete-time state-space systems. **Anais do Simpósio Brasileiro de Automaçao Inteligente, 2009, Brasília-DF, Brasil**, 2009.

CHENG, Y.; YE, H.; WANG, Y.; ZHOU, D. Unbiased minimum-variance state estimation for linear systems with unknown input. **Automatica**, Elsevier Ltd, v. 45, n. 2, p. 485–491, 2009. ISSN 00051098. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.automatica.2008.08.009>.

DAROUACH, M.; ZASADZINSKI, M.; BOUTAYEB, M. Extension of minimum variance estimation for systems with unknown inputs. **Automatica**, v. 39, n. 5, p. 867–876, 2003. ISSN 00051098.

DAROUACH, M.; ZASADZINSKI, M.; ONANA, A. B.; NOWAKOWSKI, S.; BASSONG, O. A.; NOWAKOWSKI, S. Kalman filtering with unknown inputs via optimal state estimation of singular systems. **International Journal of Systems Science**, v. 26, n. 10, p. 2015–2028, 1995. ISSN 0020-7721. Disponível em: <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00207729508929152>.

ERICKSON, R. W.; MAKSIMOVIĆ, D. **Fundamentals of Power Electronics**. Boston, MA: Springer US, 2001. ISBN 978-1-4757-0559-1. Disponível em: <http://link.springer.com/10.1007/b100747>.

FENG, Z.-p. P.; ZHU, J. M. J.; ROBERT, A.; ALLEN, R. Design of Continuous and Discrete LQI Control Systems with Stable Inner Loops. **Journal of Shanghai Jiaotong University (Science)**, E-12, n. 6, p. 787–792, 2007. ISSN 10071172.

FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; WORKMAN, M. L. **Digital Control of Dynamic Systems**. Half Moon Bay, CA: Ellis-Kagle Press, 1998. ISBN 9780979122613.

FURUTANI, E.; ARAKI, M.; HAGIWARA, T. Optimal observers for disturbance rejection in two-degree-of-freedom LQI servo systems. **IEE Proceedings - Control Theory and Applications**, v. 144, n. 6, p. 575–581, nov 1997. ISSN 1350-2379. Disponível em: <https://digital-library.theiet.org/content/journals/10.1049/ip-cta{_}19971>.

GILLIJNS, S.; De Moor, B. Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems with direct feedthrough. **Automatica**, v. 43, n. 5, p. 934–937, 2007. ISSN 00051098.

GOLNARAGHI, F.; KUO, B. C. **Automatic Control Systems**. 9. ed. [S.l.]: Wiley, 2009.

HAGIWARA, T.; FURUTANI, E.; ARAKI, M. Two-degree-of-freedom design method of state-predictive LQI servo systems. **IEE Proceedings - Control Theory and Applications**, v. 149, n. 5, p. 365–378, 2002. ISSN 1350-2379.

HE, G. Z.; JUANG, Y. T.; TSAI, J. S. H.; LIN, Y. Y.; GUO, S. M.; SHIEH, L. S.; TSAI, T. J. An effective optimal linear quadratic analog tracker for the system with unknown disturbances. In: **IEEE International Symposium on Industrial Electronics**. IEEE, 2017. v. 0267, p. 412–417. ISBN 9781509014125. Disponível em: <http://ieeexplore.ieee.org/document/8001282/>.

HOSHU, A. A.; FISHER, A.; WANG, L. Cascaded Attitude Control For Heterogeneous Multirotor UAS For Enhanced Disturbance Rejection. In: **2019 Australian & New Zealand Control Conference (ANZCC)**. IEEE, 2019. p. 110–115. ISBN 978-1-7281-1786-7. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/document/8945696/>.

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE. **Sistema de Organização Nacional de Dados Ambientais– SONDA**. 2019. Disponível em: <http://sonda.ccst.inpe.br/>.

KAILATH, T.; SAYED, S. H.; HASSIBI, B. **Thomas Kailath, Ali H. Sayed, Babak Hassibi-Linear Estimation-Prentice Hall (2000)**. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 2000. ISBN 0-13-022464-2.

KALMAN, R. E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. **Journal of Basic Engineering**, v. 82, n. 1, p. 35, 1960. ISSN 00219223. Disponível em: <http://fluidsengineering.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1430402>.

KALMAN, R. E. Contributions to the theory of optimal control. **Bol. soc. mat. mexicana**, v. 5, n. 2, p. 102–119, 1960. Disponível em: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.26.4070{&}rep=rep1{&}ty>.

LEWIS, F. L.; VRABIE, D. L.; SYRMOS, V. L. **Optimal Control**. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, Inc., 2012.

LEWIS, F. L.; XIE, L.; POPA, D. **Optimal and Robust Estimation: With an Introduction to Stochastic Control Theory**. 2. ed. Boca Raton, FL: CRC Press, 2007.

MADUREIRA, V. S.; CHAGAS, T. P. das; JESUS, G. Q. de. Irradiance estimation using Kalman filter for state-space systems with unknown inputs. In: **Anais do 14º Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente**. Galoa, 2019. Disponível em: <https://proceedings.science/proceedings/100113/{_}papers/111>.

MADUREIRA, V. S.; CHAGAS, T. P. das; JESUS, G. Q. de. Regulador linear quadrático com ação integral para sistemas lineares com rejeição de distúrbios. In: **Anais da 14ª Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações**. Equipe do Portal de Eventos Científicos da EESC-USP, 2019. Disponível em: <http://biblioteca.eesc.usp.br/images/soac/dincon/dincon2020anais.pdf>.

MATEESCU, R.; PINTEA, A.; STEFANOIU, D.; CHRISTOV, N. Discrete-time LQG control with disturbance rejection for variable speed wind turbines. In: **2012 1st International Conference on Systems and Computer Science (ICSCS)**. IEEE, 2012. p. 1–6. ISBN 978-1-4673-0674-4. Disponível em: <http://ieeexplore.ieee.org/document/6502460/>.

MATHWORKS. **Control System Toolbox: User's Guide (R2012a)**. 2019. Disponível em: <https://www.mathworks.com/help/pdf{_}doc/control/usingcontrol.>

MOLINA, M. G. Modelling and Control of Grid-connected Solar Photovoltaic Systems. In: **Renewable Energy - Utilisation and System Integration**. InTech, 2016. Disponível em: <http://www.intechopen.com/books/renewable-energy-utilisation-and-system-integration/modelling-and-control-of-grid-connected-solar-photovoltaic-systems>.

MORENO-VALENZUELA, J. A Class of Proportional-Integral with Anti-Windup Controllers for DC–DC Buck Power Converters with Saturating Input. **IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), p. 1–1, apr 2019. ISSN 1549-7747.

MOUDGALYA, K. M. **Digital Control**. Chichester, UK: John Wiley & Sons, Ltd, 2007.

NGUYEN, X. H.; NGUYEN, M. P. Mathematical modeling of photovoltaic cell/module/arrays with tags in Matlab/Simulink. **Environmental Systems Research**, Springer Berlin Heidelberg, v. 4, n. 1, p. 24, 2015. ISSN 2193-2697. Disponível em: <http://www.environmentalsystemsresearch.com/content/4/1/24>.

NISE, N. S. **Engenharia de sistemas de controle**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

OGATA, K. **Discrete-time Control Systems**. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall International, 1995. (Prentice Hall International editions). ISBN 9780133286427.

OSTERTAG, E.; GOYENA, R. **Mono- and Multivariable Control and Estimation**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2011. v. 8. 1689–1699 p. ISSN 00092479. ISBN 978-3-642-13733-4. Disponível em: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-642-13734-1>.

PADMANABAN, S.; KABALCI, E.; IQBAL, A.; ABU-RUB, H.; OJO, O. Control strategy and hardware implementation for DC–DC boost power circuit based on proportional–integral compensator for high voltage application. **Engineering Science and Technology, an International Journal**, Elsevier B.V., v. 18, n. 2, p. 163–170, jun 2015. ISSN 22150986.

PAN, S.; DU, P.; LI, Y.; CHEN, Z.; WANG, H. The study on an General Kalman filter with unknown inputs. **Proceedings of the World Congress on Intelligent Control and Automation (WCICA)**, v. 2015-March, n. March, p. 3562–3567, 2015.

PAN, S.; SU, H.; WANG, H.; CHU, J. The study of joint input and state estimation with Kalman filtering. **Transactions of the Institute of Measurement and Control**, v. 33, n. 8, p. 901–918, 2011. ISSN 14770369.

SCOLARI, E.; SOSSAN, F.; HAURE-TOUZÉ, M.; PAOLONE, M. Local estimation of the global horizontal irradiance using an all-sky camera. **Solar Energy**, Elsevier, v. 173, p. 1225–1235, 2018. ISSN 0038092X. Disponível em: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0038092X18308119>.

SCOLARI, E.; SOSSAN, F.; PAOLONE, M. Photovoltaic-Model-Based Solar Irradiance Estimators: Performance Comparison and Application to Maximum Power Forecasting. **IEEE Transactions on Sustainable Energy**, v. 9, n. 1, p. 35–44, jan 2018. ISSN 1949-3029. Disponível em: <http://ieeexplore.ieee.org/document/7946197/>.

SINGH, A. K.; PAL, B. C. An extended linear quadratic regulator for LTI systems with exogenous inputs. **Automatica**, Elsevier Ltd, v. 76, p. 10–16, 2017. ISSN 00051098. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.automatica.2016.10.014>.

SINGH, B.; CHISHTI, F.; MURSHID, S. Disturbance Rejection through Adaptive Frequency Estimation Observer for Wind-Solar Integrated AC Microgrid. **IEEE Transactions on Industrial Informatics**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), p. 1–1, jun 2019. ISSN 1551-3203.

SMITH, J.; SU, J.; LIU, C.; CHEN, W. H. Disturbance Observer Based Control with Anti-Windup Applied to a Small Fixed Wing UAV for Disturbance Rejection. **Journal of Intelligent and Robotic Systems: Theory and Applications**, Journal of Intelligent & Robotic Systems, v. 88, n. 2-4, p. 329–346, 2017. ISSN 15730409.

SUMATHI, S.; Ashok Kumar, L.; SUREKHA, P. **Solar PV and Wind Energy Conversion Systems**. Cham: Springer International Publishing, 2015. (Green Energy and Technology). ISBN 978-3-319-14940-0. Disponível em: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-14941-7>.

TAN, R. H. G.; TAI, P. L. J.; MOK, V. H. Solar Irradiance Estimation Based on Photovoltaic Module Short Circuit Current Measurement. **IEEE International Conference on Smart Instrumentation, Measurement and Applications (ICSIMA)**, n. November, p. 26–27, 2013.

TIAN, H.; MANCILLA-DAVID, F.; ELLIS, K.; MULJADI, E.; JENKINS, P. A cell-to-module-to-array detailed model for photovoltaic panels. **Solar Energy**, Elsevier Ltd, v. 86, n. 9, p. 2695–2706, 2012. ISSN 0038092X. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.solener.2012.06.004>.

WANG, X.; CHEN, X.; WEN, L. The LQR baseline with adaptive augmentation rejection of unmatched input disturbance. **International Journal of Control, Automation and Systems**, Institute of Control, Robotics and Systems, v. 15, n. 3, p. 1302–1313, jun 2017. ISSN 20054092.

XIONG, H.; YUAN, R.; YI, J.; FAN, G.; JING, F. Disturbance Rejection in UAV's velocity and attitude control: Problems and solutions. In: **Proceedings of the 30th Chinese Control Conference, CCC 2011**. [s.n.], 2011. p. 6293–6298. ISBN 9789881725592. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/document/6000830>.

YU, Y.; HU, X. Active Disturbance Rejection Control Strategy for Grid-Connected Photovoltaic Inverter Based on Virtual Synchronous Generator. **IEEE Access**, Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., v. 7, p. 17328–17336, 2019. ISSN 21693536.

Apêndices

APÊNDICE A – OUTROS MÉTODOS BASEADOS EM LQR PARA REJEIÇÃO DE DISTÚRBIOS

Os dois métodos apresentados a seguir têm a proposta de atenuar o efeito dos distúrbios sobre o sistema utilizando leis de controle que apresentem um ganho adicional sobre o distúrbio externo, desde que este faça parte do modelo do sistema em espaço de estados.

A.1 *Disturbance Acomodating Linear Quadratic Regulator*

Teorema A.1.1. *(OSTERTAG; GOYENA, 2011) Seja um sistema linear invariante no tempo dado por (1.4) o Regulador Linear Quadrático com Acomodação de Distúrbio (DALQR, Disturbance Acomodating Linear Quadratic Regulator) fornece a seguinte lei de controle u_k que minimiza o efeito de distúrbios sobre o sistema*

$$u_k = -\left(K^x x_k + K^d d_k\right) \tag{A.1}$$

onde

$$K^d = G^\dagger E \tag{A.2}$$

$$G^\dagger = \left(G^T G\right)^{-1} G^T \tag{A.3}$$

Na formulação apresentada no Teorema A.1.1 o ganho K^x é calculado de acordo com a formulação clássica do LQR, ou seja, Equações (2.5) e (2.6) (SINGH; PAL, 2017).

A.2 *Extended Linear Quadratic Regulator*

Teorema A.2.1. *(SINGH; PAL, 2017) Seja um sistema linear invariante no tempo dado por (1.4) em que $d_k = 0 \forall k \geq N$, o Regulador Linear Quadrático Estendido (ELQR, Extended Linear Quadratic Regulator) apresenta a lei de controle ótima dada por*

$$u_k^* = -\left(K^x x_k + K^d d_k + K'^d\right) \tag{A.4}$$

$$K^d = K^x (P_k - Q)^{-1} D_k \tag{A.5}$$

$$K'^d = K^x (P_k - Q)^{-1} D'_k \tag{A.6}$$

$$D_k = (F - GK^x)^T \left(P_{k+1} E + D_{k+1}\right) \tag{A.7}$$

$$D'_k = (F - GK^x)^T \left(D_{k+1}\left(d_{k+1} - d_k\right) + D'_{k+1}\right) \tag{A.8}$$

onde $D_k, D'_k \in \mathbb{R}^{n\times q}$ *e* K_k^x *e* P_k *são calculado de acordo com a formulação clássica do LQR, ou seja, Equações (2.5) e (2.6).*

Observação A.2.1. *Note que* K'^d *depende do conhecimento prévio da sequência* $\{d_k\}_{k=0}^N$*, entretanto como o objetivo deste trabalho é propor controladores para sistemas sujeitos a entradas desconhecidas (distúrbios não mensuráveis), as simulações foram realizadas com* $K'^d = 0$*.*