



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ (UESC)
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS (DCET)**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL
EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA (PPGMC)**

MESSIAS GOMES NOVAES JÚNIOR

REGIÃO DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS DINÂMICOS FUZZY

ILHÉUS-BA

2018

MESSIAS GOMES NOVAES JÚNIOR

**REGIÃO DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS DINÂMICOS
FUZZY**

Dissertação apresentada ao Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia (PPGMC) da Universidade Estadual de Santa Cruz, como parte das exigências para obtenção do título de mestre.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Silva Palmeira

Coorientador: Prof. Dr. Fábio Moraes Amaral

ILHÉUS-BA
2018

MESSIAS GOMES NOVAES JÚNIOR

**REGIÃO DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS DINÂMICOS
FUZZY**

Ilhéus-BA, 17/08/2018

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Eduardo Silva Palmeira
IFBA-EUNÁPOLIS
(Orientador)

Prof. Dr. Fabíolo Moraes Amaral
IFBA-EUNÁPOLIS
(Coorientador)

Prof. Dr. Gildson Queiroz de Jesus
UESC-ILHÉUS

**Prof. Dr. Josaphat Ricardo Ribeiro
Gouveia Junior**
IFBA-EUNÁPOLIS

Dedico este trabalho aos meus pais, familiares, amigos e a minha esposa.

Agradecimentos

- A Deus, por ter me capacitado a conseguir realizar mais uma importante conquista em minha jornada, por ter me agraciado com saúde e por me prover de forças para superar todas as dificuldades.
- Aos meus pais, por não medirem esforços para me oferecer os melhores ensinamentos, por sempre acreditarem em mim e me apoiarem mesmo a distância. Também agradeço a todos os familiares pelo apoio e incentivo.
- A minha esposa, por ser companheira e estar ao meu lado em qualquer circunstância. Sou grato também aos seus familiares, por me ajudarem e oferecerem todo apoio necessário. Vocês foram fundamentais para o alcance dos meus objetivos.
- Ao professor Fabíolo e ao professor Eduardo, por contribuírem positivamente na orientação deste trabalho e a todos os professores que foram importantes para minha formação acadêmica.
- Aos membros da coordenação do PPGMC, que ofereceram boas condições para a realização deste projeto.
- Aos amigos, pelo apoio e companheirismos.
- A todos que contribuíram para minha formação, o meu muito obrigado!

“Consagre ao Senhor tudo o que você faz, e os seus planos serão bem-sucedidos.”

Provérbios 16, versículos 3.

Resumo

O objetivo desta pesquisa é desenvolver e estudar a região de estabilidade de sistemas dinâmicos sob a luz da teoria fuzzy para elaboração de algoritmos capazes de estimar essa região considerando as incertezas inerentes aos fenômenos naturais modelados através desses sistemas. Para alcançar tal objetivo, apresentamos inicialmente as principais definições e resultados a cerca da teoria clássica de sistemas dinâmicos e algumas definições e resultados concernentes a teoria dos subconjuntos fuzzy. Em seguida, apresentamos algumas propriedades e resultados das funções obtidas por meio do Princípio da Extensão de Zadeh aplicado em funções definidas sobre espaços de Hausdorff. De maneira mais rigorosa, consideramos neste momento uma classe específicas de fluxos fuzzy que são obtidos por meio do princípio da extensão de Zadeh de soluções determinísticas de equações diferenciais autônomas. Mostramos que a região de estabilidade de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável fuzzy é um conjunto invariante e aberto. Além disso, obtemos uma estimativa para região de estabilidade fuzzy.

Palavras-chave: Modelagem matemática. Sistemas dinâmicos. Ponto de equilíbrio. Região de estabilidade. Conjuntos fuzzy.

Abstract

This research's purpose is to develop and study the stability region of dynamics systems under the fuzzy theory's view to elaboration of algorithms able to estimate this region considering the uncertainties related to natural phenomena modelled through these systems. To reach this objective, is initially introduced the main definitions and results about classical theory the dynamics systems and some definitions and results concerned to the fuzzy sets theory. Next, is introduced some properties and results of functions obtained through the Zadeh's extension principle applied on defined functions at the Hausdorff's space. In a strict way, is considered on this moment a specific class of fuzzy flows that are obtained through the Zadeh's extension principle of deterministic solutions of stand-alone differential equations. Is proven that the stability region of a fuzzy's an asymptotically stable equilibrium point is an open and invariant set. Also, is obtained an estimative to fuzzy stability region.

Keywords: Mathematical modeling. Dynamics systems. Equilibrium point. Stability region. Fuzzy sets.

Lista de figuras

Figura 1 – $y \in \Omega$ é um ponto ω -limite e Ω é o conjunto ω -limite da solução $\varphi_t(x_0)$.	8
Figura 2 – Solução Estável	10
Figura 3 – Solução Assintoticamente Estável	10
Figura 4 – Solução Estável	11
Figura 5 – Ponto de equilíbrio atrativo	12
Figura 6 – Ponto de equilíbrio assintoticamente estável	12
Figura 7 – ponto de equilíbrio atrativo do Sistema (3.1)	16
Figura 8 – Ilustração da região de estabilidade de um conjunto atrativo.	17
Figura 9 – O retrato de fase do sistema (3.2). A região de estabilidade do ponto de equilíbrio assintoticamente estável $(-0, 2; 0)$ é representada pela área em cinza claro. A componente conexa $D(0, 39)$ do conjunto de nível $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : V(x; y) < 0, 39\}$ contendo o equilíbrio $(-0, 2; 0)$ representada pela área em cinza escuro é uma estimativa da região de estabilidade.	24
Figura 10 – O retrato de fase do sistema (3.2). A região de estabilidade do ponto de equilíbrio assintoticamente estável $(-0, 2; 0)$ é representada pela área em cinza claro. A componente conexa $D(0, 41)$ do conjunto de nível $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : V(x; y) < 0, 41\}$ contendo o equilíbrio $(-0, 2; 0)$ representada pela área em cinza escuro intercepta o complementar da região de estabilidade $A^c(-0, 2; 0)$	24
Figura 11 – Ponto de equilíbrio assintoticamente estável	29
Figura 12 – Ilustração do suporte de subconjuntos fuzzy e subconjuntos crisp	30
Figura 13 – Operações entre subconjuntos fuzzy	31
Figura 14 – Exemplo de classe dos números muito grandes	33
Figura 15 – Imagem de um subconjunto fuzzy a partir do princípio de extensão para uma função f	36
Figura 16 – $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)$ para diferentes valores de tempo	48

Lista de tabelas

Tabela 1 – Ilustração das operações entre subconjuntos fuzzy	32
--	----

Sumário

1 – Introdução	1
2 – Preliminares	5
2.1 Equações diferenciais autônomas	5
2.2 Conjuntos Invariantes	7
2.3 Pontos de equilíbrio e estabilidade local	8
2.4 Conclusão	13
3 – Região de estabilidade de sistemas dinâmicos autônomos não lineares . . .	14
3.1 Conjuntos atrativos e atratores	14
3.2 Caracterização topológica da região de estabilidade	16
3.3 Estimativa da região de estabilidade	18
3.4 Estimativa da região de estabilidade	20
3.5 Conclusão	25
4 – Lógica Fuzzy: conceitos básicos	26
4.1 Introdução	26
4.2 Subconjuntos Clássicos	27
4.3 Subconjuntos Fuzzy	27
4.4 Operações entre Subconjuntos Fuzzy	30
4.5 O α -nível de um Subconjunto Fuzzy	32
4.6 O Princípio de Extensão de Zadeh	34
4.7 O subespaço $\mathcal{E}(X)$	36
4.8 Conclusão	40
5 – Pontos de equilíbrio e estabilidade Fuzzy	42
5.1 Fluxos sobre o espaço $\mathcal{E}(U)$	42
5.2 Pontos de equilíbrio Fuzzy	44
5.3 Conclusão	53
6 – Região de Estabilidade Fuzzy	54
7 – Considerações finais	58
Referências	59

1 Introdução

Um *sistema* pode ser definido como um conjunto de instrumentos correlacionados por alguma interação ou interdependência, de modo que existam relações de causa e efeito nos fenômenos que ocorrem com os elementos deste conjunto. Alguns exemplos de sistemas são: o circuito elétrico de um eletrodoméstico, Saturno e seus satélites, o sistema nervoso humano, a situação financeira de uma família, o ecossistema de uma colônia de bactérias e etc. Um sistema é *dinâmico* quando algumas grandezas que caracterizam seus elementos constituintes variam no tempo. Leibniz foi o primeiro a utilizar a palavra *dinâmica* nesse contexto. Nos exemplos anteriores, variam no tempo: a tensão entre as placas de um capacitor, a posição do satélite Titã, a atividade dos neurônios, os gastos com alimentação e o número de bactérias existentes na colônia. Determinar, teoricamente, como ocorre a evolução temporal das grandezas que caracterizam um sistema, pode ser importante em diversas situações, como as citadas anteriormente.

Entretanto, devemos considerar que a modelagem matemática de fenômenos naturais, através de sistemas dinâmicos, pode estar sujeita a incertezas relativas aos parâmetros das equações que descrevem tais fenômenos. Como exemplo deste fato podemos considerar que em problemas de dinâmica populacional nem sempre é possível saber exatamente a quantidade de indivíduos ou a capacidade suporte em uma determinada região. Além disso, nem sempre é possível, por falta de dados ou por dificuldade técnica, inserir todas as leis necessárias para descrever o fenômeno. Desta forma, a subjetividade é um fator considerável que deve ser incorporado aos problemas estudados na modelagem matemática, principalmente os que utilizam sistemas dinâmicos para descrever os fenômenos estudados.

Assim, no estudo de sistemas dinâmicos é imprescindível conhecer o comportamento das soluções ou trajetórias ao longo do tempo. Mas, como em geral não é possível determinar a solução analítica de um sistema dinâmico não linear, uma excelente maneira de estudar o comportamento das soluções é através da análise qualitativa em torno das soluções de equilíbrio, que são soluções estacionárias do sistema geradas por pontos de equilíbrio. Portanto, a análise qualitativa se encarrega por estudar a estabilidade de soluções cuja condição inicial está próxima do ponto de equilíbrio como o objetivo de estimar o comportamento da trajetória destas soluções no entorno deste ponto ao longo do tempo.

Em geral, pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis de sistemas dinâmicos autônomos não lineares não são globalmente estáveis. Em grande parte dos casos, existe um subconjunto de condições iniciais do espaço de fases, chamado de região de estabilidade, cujas trajetórias iniciando dentro desse conjunto tendem para o conjunto

atrativo quando o tempo tende para o infinito. Na literatura, é comum denominar o conjunto de região de estabilidade por outras nomenclaturas, como por exemplo, domínio de atração, área de atração, região de atração e bacia de atração.

Em diversas aplicações, estimar a região de estabilidade é de fundamental importância, principalmente em engenharias e ciências. O conceito de região de estabilidade é largamente empregado nos estudos de estabilidade de sistemas elétricos de potência (CHIANG et al., 1987; CHIANG et al., 1988; CHIANG; THORP, 1989; CHIANG et al., 1992; SILVA et al., 2005). Esse conceito também é explorado no desenvolvimento de algoritmos em engenharia e ciências.

Vários métodos foram propostos por alguns autores com o propósito de estimar a região de estabilidade. Tais métodos começaram a ser amplamente estudados durante a década de 60, estimulados pelos estudos de estabilidade transitória em sistemas elétricos de potência, por exemplo (GLASS, 1966; EL-ABIAD; NAGAPPAN, 1966; WILLEMS, 1968).

Por outro lado, a modelagem de fenômenos reais por meio de sistema de equações diferenciais determinísticas quase sempre está incompleta ou incerta, pois os valores dos coeficientes das equações diferenciais ou das condições iniciais geralmente não são precisamente conhecidos. Considerando esses aspectos, uma teoria que vem ganhando força na busca de soluções dessas equações diferenciais tem sido a dos conjuntos fuzzy, por lidar bem com essas incertezas e imprecisões. Isso se dá devido ao fato de que na teoria fuzzy é possível estabelecer uma graduação às variáveis do problema que permite capturar de forma mais coerente as nuances dos modelos.

Dentro desse contexto, muitos esforços vem sendo empregados por diversos pesquisadores nas mais diversas áreas para traduzir para a matemática fuzzy conceitos ligados a equações diferenciais (BARROS, 1997; BARROS et al., 1998; MIZUKOSHI, 2004; CECCONELLO, 2006; MIZUKOSHI et al., 2007; CECCONELLO, 2010; MIZUKOSHI et al., 2012; BARROS et al., 2013; COIMBRA, 2016). Assim, uma teoria fortemente indicada para estimar a região de estabilidade é a Teoria de Conjuntos Fuzzy, pois, esta consegue atribuir um tratamento adequado a conceitos matemáticos que envolvem dados de natureza imprecisa, muitas vezes englobando a solução clássica ou apresentando vantagens em relação a teoria clássica.

Portanto, neste trabalho buscamos estudar sob quais condições analíticas e topológicas podemos estimar a região de estabilidade de um sistema dinâmico sob a luz da teoria dos conjuntos fuzzy e desenvolver algoritmos capazes de efetuar um diagnóstico das regiões de estabilidade encontradas a partir de dados reais.

No Capítulo 2 apresentamos algumas definições e resultados que são essenciais para descrever o comportamento das soluções de equações diferenciais autônomas

com evolução no tempo, definidas sobre algum subconjunto aberto U de \mathbb{R}^n . Também destacamos os principais conceitos a cerca da análise qualitativa, tais como pontos de equilíbrio, órbitas, conjunto ω -limite e conjuntos invariantes.

No Capítulo 3 definimos os conjuntos atratores e atrativos, apresentamos a definição de região de estabilidade do ponto de vista da teoria clássica de conjuntos e exploramos algumas propriedades e resultados topológicos importantes a cerca da região de estabilidade de um conjunto atrativo. Por fim, descamos alguns métodos utilizados na literatura para estimar a região de estabilidade de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

No Capítulo 4 estudamos as principais definições e resultados a cerca da teoria dos subconjuntos fuzzy. Apresentamos também algumas propriedades do conjunto $\mathcal{E}(X)$. Este conjunto é formado pelos subconjuntos fuzzy de um conjunto X cujos α -níveis são subconjuntos compactos e não vazios. Também definimos a métrica d_∞ para $\mathcal{E}(X)$, construindo assim uma estrutura de espaço métrico para conjuntos fuzzy. Ainda neste capítulo, mostramos que a extensão de Zadeh de uma função contínua é uma aplicação contínua quando X é um espaço métrico localmente compacto. Este resultado, como os demais apresentados no Capítulo 3, são fundamentais para a análise de soluções fuzzy.

No Capítulo 5 detacamos algumas ferramentas para análise qualitativa de fluxos fuzzy desenvolvidas por [Cecconello \(2010\)](#) e [Mizukoshi \(2004\)](#). Desta forma, generalizamos algumas condições propostas por [Mizukoshi \(2004\)](#) e indicamos ferramentas para melhor compreender o comportamento assintótico de tais fluxos fuzzy, assim como, estudamos condições para existência e estabilidade de pontos de equilíbrio não crisp conforme [Cecconello \(2010\)](#).

Utilizamos o Exemplo 5.8 para mostrar que o fluxo fuzzy gerado pelo modelo de epidemiologia SI ([Murray, 2002](#)) pode apresentar pontos de equilíbrio fuzzy cuja função de pertinência é sobrejetiva. Assim, as condições apresentadas por [Mizukoshi \(2004\)](#) podem ser generalizadas para tornar a análise qualitativa mais abrangente. Os processos utilizados para revelar a existência de tais pontos de equilíbrio para o Exemplo 5.8 podem ser aplicados em fluxos fuzzy gerados por equações autônomas quaisquer. Portanto, através do Teorema 5.9 é garantido a existência de pontos de equilíbrio fuzzy com função de pertinência sobrejetiva.

No Capítulo 6 expomos importantes resultados obtidos por meio desta pesquisa sobre a região de estabilidade de um ponto de equilíbrio fuzzy assintoticamente estável. Assim, destacamos três resultados inéditos:

1. A região de estabilidade de um ponto de equilíbrio fuzzy assintoticamente estável é um conjunto aberto;

2. A região de estabilidade de um ponto de equilíbrio fuzzy assintoticamente estável é um conjunto invariante;
3. Obtenção de uma estimativa para região de estabilidade fuzzy, isto é, foi encontrado um subconjunto da região de atração de um ponto de equilíbrio fuzzy assintoticamente estável.

2 Preliminares

Este capítulo tem o objetivo de apresentar os principais conceitos e resultados a cerca da análise qualitativa de sistemas dinâmicos não lineares modelados por equações diferenciais (EDO) autônomas e não lineares. A leitura deste capítulo pode ser dispensada ao leitor que estiver familiarizado com os conceitos de equações diferenciais ordinárias.

2.1 Equações diferenciais autônomas

Consideremos aqui o problema de valor inicial (PVI) determinado pela equação diferencial autônoma do tipo:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x(0) = x_0, \quad (2.1)$$

onde f é uma função definida sobre um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ com imagem em \mathbb{R}^n , isto é, $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ com condição inicial $x_0 \in U$. Em geral, o conjunto U é chamado de *espaço de fase* ou *espaço de estado*. A variável dependente x é chamada de *variável de estado*. A dimensão do *espaço de fase* corresponde ao número de equações necessárias para descrever o sistema.

O objetivo do exemplo a seguir é apenas ilustrar um sistema dinâmico autônomo não-linear, seu *espaço de fases*, sua *variável de estados* e condição inicial.

Exemplo 2.1 Considere o seguinte sistema autônomo dados pelas equações:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = ax_1 - rx_1x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -bx_2 + sx_1x_2, \end{cases} \quad x(0) = (a, -b) \quad (2.2)$$

onde os parâmetros a, r, b e s são reais positivos.

Então, a *variável de estado* é o vetor $x = (x_1, x_2)$, o *espaço de fase* equivale ao conjunto \mathbb{R}^2 e a condição inicial é o ponto $x(0) = (a, -b)$.

Para enfatizar a dependência com relação a condição inicial, denotaremos a solução da Equação 2.1 por $\varphi_t(x_0)$. Pois, se definirmos $x(t) = \varphi_t(x_0)$ então, $x'(t) = f(x(t))$ e $x(0) = x_0$.

Para que a equação autônoma 2.1 admita uma única solução, geralmente é preciso impor alguma restrição à função f . O Exemplo 2.2 exposto a seguir apresenta um caso particular em que a equação diferencial não admite uma única solução a partir da condição inicial dada.

Exemplo 2.2 *Comprove que a equação*

$$\frac{dx}{dt} = f(x) = 3x^{4/5}$$

não tem solução única a partir da condição inicial $x(0) = 0$.

A função $f(x)$ é contínua em todos os pontos. Entretanto, a derivada desta função $df/dx = 12/(5x^{1/5})$, não é finita em $x = 0$, de modo que não se pode saber o número de soluções que existem para esse problema de condição inicial. Por exemplo, $\varphi_t(x_0) = 0$ é uma solução válida para todo t . Outra solução igualmente válida para todo t é $\varphi_t(x_0) = (3t/5)^5$. Portanto, tem-se duas soluções para o mesmo problema de condição inicial. Na verdade, o número de soluções é infinito, pois pode-se permanecer em $x = 0$ e, após um tempo qualquer, passar a evoluir de acordo com $\varphi_t(x_0) = (3t/5)^5$.

O teorema da existência e unicidade exposto a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em [Hartman \(1964\)](#), [Birkhoff \(1966\)](#) ou [Sotomayor \(1979\)](#), estabelece condições suficientes sobre f para assegurar a existência e unicidade das soluções.

Teorema 2.3 (Existência e Unicidade) *Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e suponha que $f \in C^k(U)$ com ($k \geq 1$). Então, para cada $x_0 \in U$ existe um intervalo $I_{x_0} = (t_1, t_2)$, contendo $t = 0$, tal que a solução $\varphi_t(x_0)$ de 2.1 existe, é única e além disso é de classe C^k .*

Quando f depender de algum parâmetro $p_0 \in \mathbb{R}^m$ e $f : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^k , então a solução $\varphi_t(x_0, p_0)$ também é de classe C^k .

Afirmar que $\varphi_t(x_0)$ é solução da Equação 2.1 equivale a dizer que $\varphi_t(x_0)$ satisfaz:

$$\varphi_t(x_0) = x_0 + \int_0^t f(x(s))ds,$$

para todo $x_0 \in U$ e $t \in I_{x_0}$.

Nosso interesse aqui é analisar o comportamento da solução quando $t \rightarrow +\infty$, por isso, a partir de então, assumiremos que $\varphi_t(x_0)$ está definida para todo $x_0 \in U$ e $t \geq 0$. Sob algumas hipóteses, o intervalo de existência de solução garantido pelo Teorema 2.3, pode ser estendido e assim a solução passa a existir para todo $t \in \mathbb{R}$ ([HIRSCH; SMALE, 1974](#)). Especificamente, quando f está definida para todo o \mathbb{R}^n e é limitada, então a solução $\varphi_t(x_0)$ existe para todo $t \in \mathbb{R}_+$ ([ROBINSON, 1999](#)).

Pela unicidade com relação à condição inicial, a solução $\varphi_t(x_0)$ da equação autônoma 2.1 define uma aplicação φ que, para cada par $(t, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times U$, associa o valor $\varphi_t(x_0) \in U$, isto é:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_+ \times U &\longrightarrow U \\ (t, x_0) &\longrightarrow \varphi_t(x_0). \end{aligned}$$

Para todo $x_0 \in U$ e $t, s \in \mathbb{R}_+$, a aplicação φ assim definida satisfaz as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x_0) &= x_0 \\ \varphi_{t+s}(x_0) &= \varphi_t(\varphi_s(x_0)). \end{aligned}$$

Por esta razão, a família de aplicações $\varphi_t : U \longrightarrow U, t \in \mathbb{R}_+$, é frequentemente denominada na literatura como *semifluxo* ou *sistema dinâmico* gerado pela equação autônoma 2.1 (HIRSCH; SMALE, 1974; HALE, 1988; HALE et al., 1991; MILANI; KOKSCH, 2005).

2.2 Conjuntos Invariantes

Nesta seção definiremos a invariância de conjuntos, conceito este que é imprescindível para análise do comportamento das soluções de sistemas dinâmicos, pois sob determinadas circunstâncias é necessário determinar quando dada uma condição inicial, tomada em um conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$, a solução que passa por essa condição inicial permanece neste conjunto para todo t . Tais conjuntos que satisfazem essa propriedade são chamados de conjuntos invariantes.

A seguir definiremos os conceitos de *órbita* e de *conjunto ω -limite* que são importantes para o estudo qualitativo de sistemas dinâmicos.

Definição 2.4 Denominamos por *órbita* ou *trajetória* do ponto x_0 pela solução φ_t , o conjunto do espaço de fase definido por:

$$\gamma(x_0) = \{\varphi_t(x_0) \in U : t \geq 0\}.$$

Definição 2.5 Um ponto $y \in U$ é um ponto *ω -limite* da solução $\varphi_t(x_0)$ de 2.1 se existir uma sequência $\{t_n\}$, com $t_n \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow +\infty$ tal que $\varphi_{t_n}(x_0) \rightarrow y$ quando $t_n \rightarrow +\infty$. O conjunto de todos os pontos *ω -limite* de $\varphi_t(x_0)$ é chamado *conjunto ω -limite* da solução $\varphi_t(x_0)$, ou simplesmente, *ω -limite* de x_0 , e é denotado por $\omega(x_0)$. De outra maneira podemos escrever:

$$\omega(x_0) = \{y \in U : \varphi_{t_n}(x_0) \longrightarrow y \text{ quando } t_n \longrightarrow +\infty\}.$$

Exemplo 2.6 Seja um campo vetorial no plano com uma órbita fechada globalmente atrativa Ω , como ilustrado na Figura 1. Para cada ponto $y \in \Omega$ podemos encontrar uma sequência $\{t_n\}$

tal que $\varphi_{t_n}(x_0), x_0 \in U = \mathbb{R}^2$ se aproxima de y quando $n \rightarrow +\infty$. Portanto, $y \in \Omega$ é um ponto ω -limite da solução $\varphi_t(x_0)$.

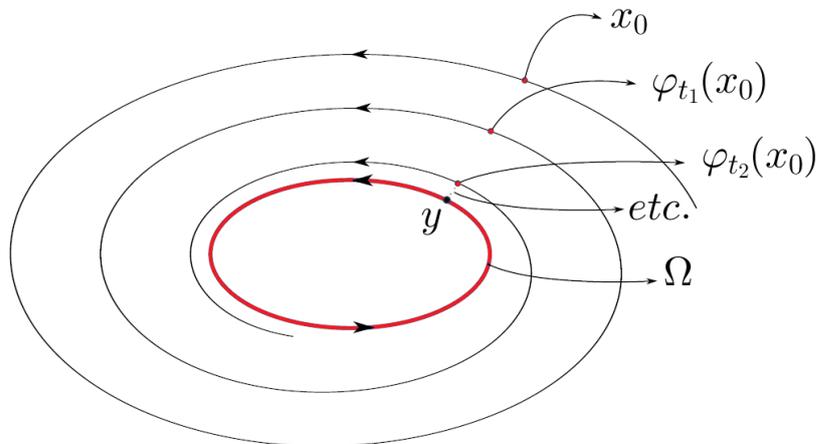


Figura 1 – $y \in \Omega$ é um ponto ω -limite e Ω é o conjunto ω -limite da solução $\varphi_t(x_0)$.

Fonte: adaptado de Amaral (2010)

Definição 2.7 Um conjunto $S \subset U$ é dito invariante pelo fluxo φ_t do sistema (2.1) se, dado $x_0 \in S$, a órbita γ está inteiramente contida em S , isto é, $\gamma(x_0) \subset S$ para todo $x_0 \in S$.

Um simples exemplo de conjunto invariante é a própria órbita de uma dada condição inicial x_0 do sistema (2.1). Além disso, é fácil verificar que a união de conjuntos invariantes também é um conjunto invariante.

2.3 Pontos de equilíbrio e estabilidade local

Suponha que um conjunto de equações diferenciais represente um determinado sistema. Para se encontrar uma solução para estas equações e, assim, determinar o comportamento dinâmico do sistema, é necessário especificar valores para as condições iniciais e para os parâmetros das equações. Em geral, tal solução só pode ser obtida numericamente. E essa solução tem uma utilidade bastante limitada, já que é válida apenas para a situação particular calculada. Considere, por exemplo, o problema de se determinar o comportamento dinâmico de uma aeronave em voo. Matematicamente, esse problema pode ser descrito em termos de equações baseadas em leis da Mecânica dos Fluidos. A partir dessas equações, pode-se calcular numericamente tal comportamento, escolhendo valores que reflitam um certo estado de conservação da aeronave, uma certa posição dos lemes e "flaps", uma certa velocidade da aeronave ou condição atmosférica etc. Essa solução numérica, obtida para uma situação particular de voo, dá uma ideia bastante incompleta sobre sua segurança. Na verdade, a questão que deve ser respondida possui um carácter qualitativo: para que conjunto de valores das condições iniciais e dos parâmetros, a aeronave permanece em voo? Tentar responder a

essa questão resolvendo as equações diferenciais para todas as combinações possíveis desses valores parece uma abordagem não muito esperta. Essa questão, porém pode ser formulada de forma mais convincente: em que condições o voo da aeronave constitui um comportamento dinâmico estável?

Estabilidade é uma palavra usada para caracterizar tanto uma solução, quanto uma equação diferencial (ou uma equação de diferença). A estabilidade de uma solução é determinada pelo comportamento das soluções cujas condições iniciais pertencem à sua vizinhança. A seguir, introduz-se a noção de estabilidade de uma solução estacionária, que é uma solução representada por um ponto de equilíbrio no espaço de fases.

Em geral não é possível determinar a solução analítica de um sistema dinâmico não-linear. Por esta razão, uma forma plausível de estudar o comportamento das soluções é através da análise qualitativa do sistema em torno das *soluções de equilíbrio*. Tais soluções podem ser facilmente encontradas, basta considerarmos os pontos $x_e \in U$ em que $dx/dt = 0$, assim $f(x_e) = 0$, e portanto, a função constante $\varphi_t(x_e) = x_e$ será uma solução estacionária para a equação (2.1) com condição inicial $x_0 = x_e$. Soluções constantes como essa desempenham um papel fundamental no estudo qualitativo das equações diferenciais. Os pontos x_e que determinam soluções de equilíbrio são denominados *pontos de equilíbrio* e definimos estes pontos formalmente da seguinte maneira:

Definição 2.8 Um ponto $x_e \in U$ é um ponto de equilíbrio para a Equação (2.1) se $f(x_e) = 0$. A solução constante $\varphi_t(x_e) = x_e$ é denominada *solução de equilíbrio*.

Qualquer ponto que não seja ponto de equilíbrio, é chamado de *ponto ordinário* ou *ponto regular*.

Mas, para que possa ser relevante em aplicações como modelos de fenômenos biológicos, físicos, químicos e etc, um *ponto de equilíbrio* deve satisfazer algum critério de estabilidade. A análise de estabilidade procura compreender o comportamento das soluções cuja condição inicial está próxima do *ponto de equilíbrio*.

Definição 2.9 (estabilidade) Seja φ_t uma solução de (2.1) definida para todo $t \geq 0$. Então, dizemos que φ_t é estável se para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que se ψ_t é solução de (2.1) e $\|\psi_0 - \varphi_0\| < \delta$ então ψ_t está definida para todo $t \geq 0$ e $\|\psi_t - \varphi_t\| < \epsilon$ para todo $t \geq 0$ (ver Figura 2). Se além disso, existir $\delta_1 > 0$ tal que $\|\psi_0 - \varphi_0\| < \delta_1$ implica que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\psi_t - \varphi_t\| = 0$, φ_t diz-se *assintoticamente estável* (ver Figura 3).

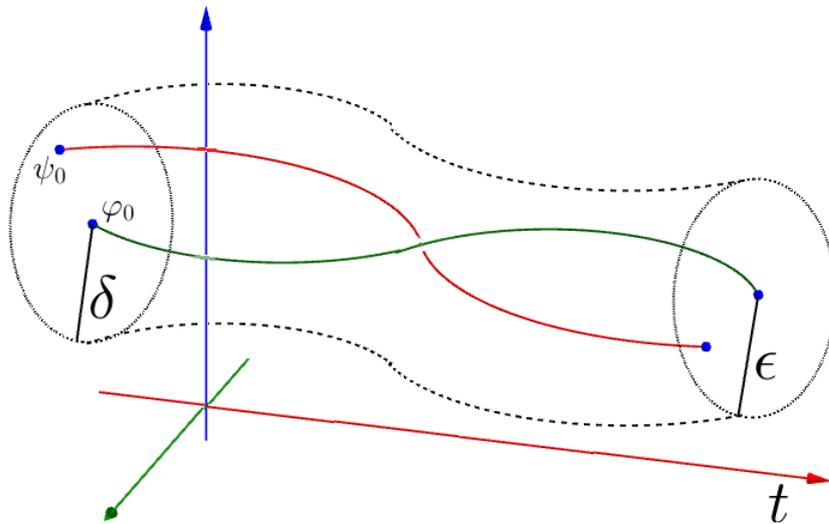


Figura 2 – Solução Estável

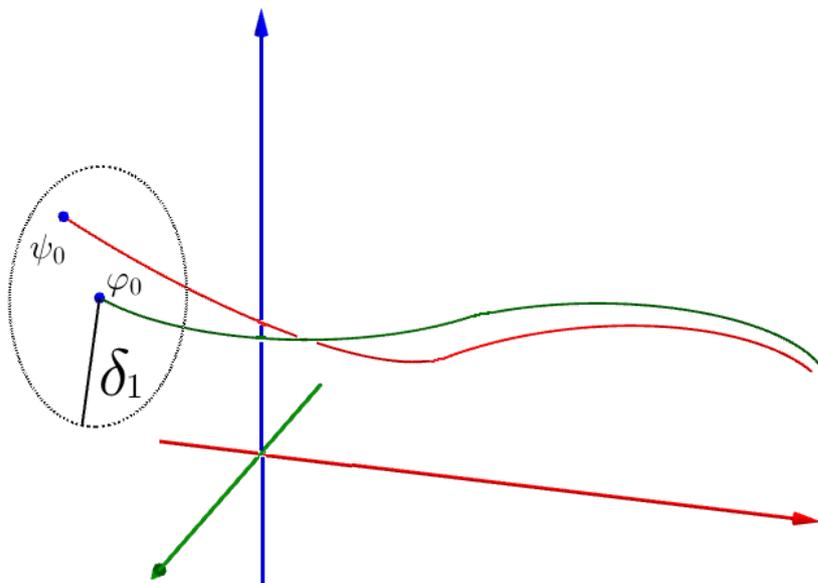


Figura 3 – Solução Assintoticamente Estável

Se $x_e \in U$ é um ponto de equilíbrio do sistema (2.1), então a solução φ de (2.1) iniciando em x_e no tempo $t = 0$, é uma função constante, isto é, $\varphi_t(x_e) = x_e$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Facilmente, pode-se verificar que um ponto de equilíbrio é um conjunto invariante de (2.1). A seguir, caracterizaremos a estabilidade de pontos de equilíbrio.

Definição 2.10 Um ponto de equilíbrio $x_e \in U \subset \mathbb{R}^n$ é estável se dado $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que para todo $\|x_0 - x_e\| < \delta$ temos $\|\varphi_t(x_0) - x_e\| < \epsilon$ para todo $t \geq 0$.

Em outras palavras, um ponto de equilíbrio x_e é estável se todas as soluções iniciando dentro da bola de raio δ centrada em x_e não saem da bola de raio ϵ centrada em x_e .

Observe que, neste caso, as soluções não necessariamente devem se aproximar do ponto de equilíbrio x_e quando $t \rightarrow +\infty$. Veja a Figura 4.

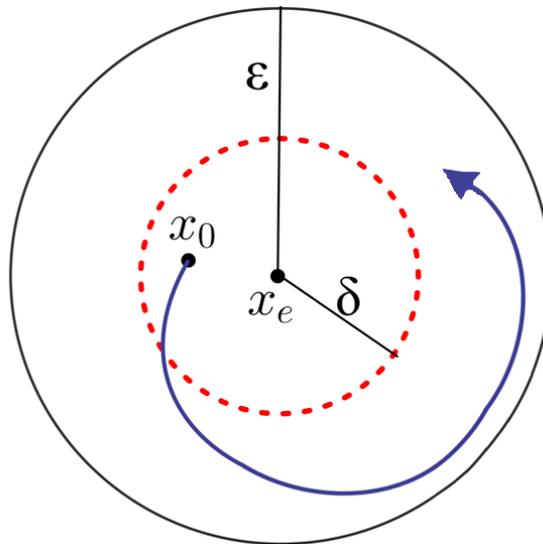


Figura 4 – Solução Estável

Qualquer ponto de equilíbrio que não é *estável*, é denominado *ponto de equilíbrio instável*.

Outro conceito importante relacionado aos pontos de equilíbrio é a atratividade. Um ponto de equilíbrio x_e é chamado de *atrator* quando todas as soluções iniciando dentro da bola de raio δ tendem para x_e quando $t \rightarrow +\infty$. Formalmente, temos a seguinte definição:

Definição 2.11 *Seja x_e um ponto de equilíbrio do sistema (2.1). Então, dizemos que x_e é atrativo se existir $\delta > 0$ tal que*

$$x_0 \in B(x_e; \delta) \Rightarrow \varphi_t(x_0) \rightarrow x_e \text{ quando } t \rightarrow +\infty.$$

Observe que as soluções iniciando dentro da bola de raio δ podem afastar-se do ponto de equilíbrio x_e na medida que o tempo cresce, podendo até sair de dentro da bola de raio δ , entretanto, sempre retornam e se aproximam do ponto de equilíbrio quando $t \rightarrow +\infty$ (Veja a Figura 5).

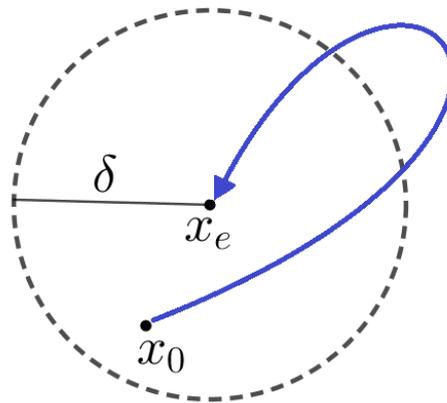


Figura 5 – Ponto de equilíbrio atrativo

Entretanto, é válido ressaltar que estabilidade não implica em atratividade e atratividade também não implica em estabilidade. Evidentemente, existem pontos de equilíbrio que são estáveis e atrativos. Estes pontos são denominados pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis.

Definição 2.12 Um ponto de equilíbrio $x_e \in U \subset \mathbb{R}^n$ é assintoticamente estável se é estável e atrativo, isto é, se dado $\epsilon > 0$ existir um $\delta > 0$ tal que para todo $\|x_0 - x_e\| < \delta$ temos $\|\varphi_t(x_0) - x_e\| < \epsilon$ para todo $t \geq 0$ e, além disso, existir $r > 0$ tal que para todo $x_0 \in U$ satisfazendo $\|x_0 - x_e\| < r$ temos que $\|\varphi_t(x_0) - x_e\| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$.

A Figura 6 a seguir esclarece a Definição 2.12. As soluções que iniciam dentro da bola de raio δ permanecem dentro da bola de raio ϵ e tendem para o ponto de equilíbrio x_e quando $t \rightarrow +\infty$. Em outras palavras, todas as soluções que originam-se suficientemente próximas ao ponto de equilíbrio x_e , permanecem próximas a ele e, obrigatoriamente, se aproximam dele quando o tempo tende ao infinito.

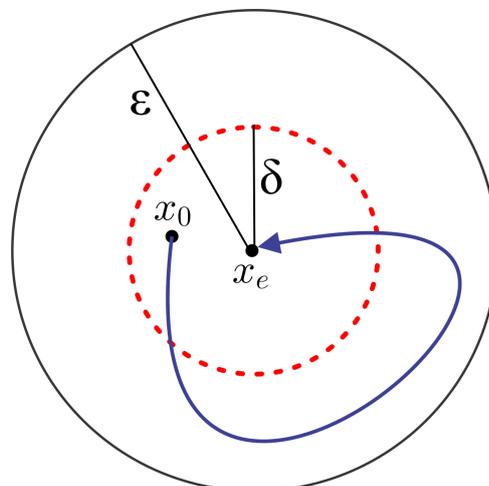


Figura 6 – Ponto de equilíbrio assintoticamente estável

2.4 Conclusão

Apresentamos neste capítulo as principais definições e resultados a cerca da teoria clássica de sistemas dinâmicos, que posteriormente serão utilizados neste trabalho.

Primeiramente, apresentamos os conceitos básicos sobre a teoria qualitativa de sistemas dinâmicos autônomos não lineares. Assim, exploramos o conceito de invariância de conjuntos que é de fundamental importância para análise do comportamento das soluções de sistemas dinâmicos.

Na seção 2.3 vimos que uma excelente maneira de estudar o comportamento das soluções é através da análise qualitativa em torno das soluções de equilíbrio, que são soluções estacionárias do sistema geradas por pontos de equilíbrio. Assim, apresentamos a estabilidade de soluções cuja condição inicial está próxima do ponto de equilíbrio como o objetivo de estimar o comportamento da trajetória destas soluções no entorno deste ponto.

3 Região de estabilidade de sistemas dinâmicos autônomos não lineares

Neste Capítulo estabelecemos a definição do conjunto denominado *região de estabilidade* e apresentaremos certas propriedades topológicas deste conjunto. Na literatura, a região de estabilidade também é chamado de domínio de atração, área de atração, região de atração e bacia de atração. A região de estabilidade é um subconjunto do espaço de fases cujas trajetórias iniciando dentro deste conjunto tendem para o conjunto atrativo (ou ponto de equilíbrio) quando o tempo tende para o infinito (AMARAL, 2010).

Primeiramente, vamos estabelecer o conceito de conjuntos atrativos e atratores, pois a definição de conjunto atrativo é essencial para caracterizarmos a região de estabilidade.

Posteriormente, apresentaremos a definição de região de estabilidade e discutiremos a caracterização da região de estabilidade de sistemas dinâmicos autônomos do ponto de vista topológico.

Ao final, apresentaremos em resumo alguns métodos utilizados na literatura clássica para estimar a região de estabilidade, ou seja, métodos para obter um subconjunto da região de atração de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

3.1 Conjuntos atrativos e atratores

Seja x_e um ponto de equilíbrio do Sistema (2.1). Vimos na seção anterior que x_e é um conjunto invariante e fechado. Pela Definição 2.11 existe uma bola aberta $B(x_e, r)$ tal que toda trajetória começando dentro dessa bola tende para x_e quando o tempo tende para o infinito. Generalizando a definição de ponto de equilíbrio atrativo, obtemos a definição de conjunto atrativo apresentada a seguir.

Definição 3.1 (ALBERTO, 2006) *Um conjunto H , fechado, invariante com relação ao sistema (2.1) é um conjunto atrativo se existir uma vizinhança U de H tal que, para toda condição inicial $x_0 \in U$, $\varphi_t(x_0) \rightarrow H$ quando $t \rightarrow +\infty$.*

Na Definição (3.1), a expressão $\varphi_t(x_0) \rightarrow H$ quando $t \rightarrow +\infty$ significa que $d(\varphi_t(x_0), H) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$, onde d é a distância entre um ponto e um conjunto. O conjunto U será chamada de *vizinhança atrativa* de H .

Vale observar que todo ponto de equilíbrio atrativo é um conjunto atrativo.

Vamos agora apresentar a definição de conjunto atrator, que é um conceito mais forte do que o de conjunto atrativo.

Definição 3.2 (WIGGINS, 2003) *Um conjunto $H \subset \mathbb{R}^n$ é um atrator se H é um conjunto atrativo e além disso*

- (i) $\varphi_t(U) \subset U$ para todo $t \geq 0$ e alguma vizinhança atrativa U de H ;
- (ii) Para quaisquer dois conjuntos abertos V e S em H

$$\exists t \in \mathbb{R} \text{ tal que } \varphi_t(V) \cap S \neq \emptyset.$$

No exemplo a seguir exploramos o conceito de conjunto atrativo e conjunto atrator.

Exemplo 3.3 (VINOGRAD, 1957) *Considere o seguinte sistemas de equações diferenciais*

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{x^2(y-x) + y^5}{(x^2 + y^2)[1 + (x^2 + y^2)^2]} \\ \dot{y} = \frac{y^2(y-2x)}{x^2 + y^2[1 + (x^2 + y^2)^2]} \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Neste exemplo o Sistema (3.1) possui a origem como ponto de equilíbrio atrativo, já que considerando qualquer bola de raio r as trajetórias iniciando dentro desta bola tendem para o ponto $(0; 0)$ quando o tempo tende ao infinito. Entretanto, apesar de $H = \{(0; 0)\}$ ser atrativo, este conjunto não é um atrator, pois considerando as mesmas bolas abertas de raio r , existem trajetórias que iniciam dentro da bola e saem dela em um certo tempo $T > 0$, conforme é ilustrado na Figura 7. Logo, não existe vizinhança U de H que satisfaça o item (i) da Definição (3.2).

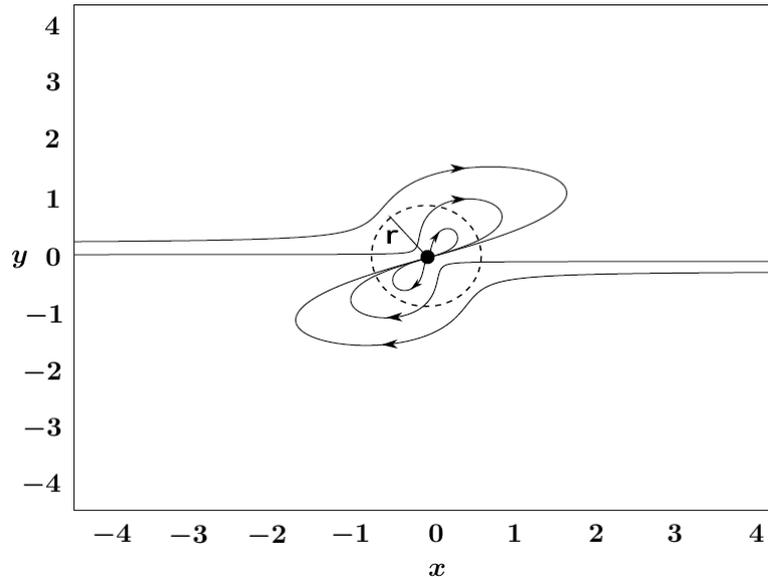


Figura 7 – ponto de equilíbrio atrativo do Sistema (3.1)

Fonte: Adaptado de [Amaral \(2010\)](#).

Embora o conceito de atrator seja mais forte que o de conjunto atrativo, a concepção de conjunto atrativo é suficiente para definir a região de estabilidade. Apesar das características negativas no que diz respeito aos conjuntos atrativos, definiremos a região de estabilidade para tais conjuntos. Como todo atrator é um conjunto atrativo, a definição de região de estabilidade se aplica ao conceito de atrator.

3.2 Caracterização topológica da região de estabilidade

Agora, vamos explorar algumas propriedades topológicas da região de estabilidade. É importante ressaltar que tais propriedades serão fundamentais para o capítulo 6, em que procuramos estender a definição de região de estabilidade para pontos de equilíbrio fuzzy, como por exemplo, a propriedade da região de estabilidade ser um conjunto aberto. Os resultados apresentados a seguir são contribuições de trabalhos já existentes na literatura (ver [Chiang et al. \(1988\)](#) e [Zaborszky et al. \(1988\)](#)).

Ao contrário dos sistemas dinâmicos lineares, um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de um sistema não linear raramente é globalmente estável. Conhecer o conjunto de pontos no espaço de estados cujas trajetórias, que começam nesses pontos, se aproximam de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável quando o tempo tende para o infinito possibilita analisar de uma maneira muito mais completa e global o comportamento dinâmico do sistema em estudo. ([AMARAL, 2010](#)). Sendo assim, apresentamos a seguir a definição formal de região de estabilidade.

Definição 3.4 *Seja H um conjunto atrativo de (2.1). A região de estabilidade de H é o conjunto*

$A(H)$ definido por

$$A(H) = \{x_0 \in U : \varphi_t(x_0) \rightarrow H \text{ quando } t \rightarrow +\infty\}$$

Observe que $A(H)$ é um conjunto não vazio e contém pontos que não estão em H , já que toda vizinhança atrativa V de H é tal que $V \subset A(H)$. Veja a Figura 8.

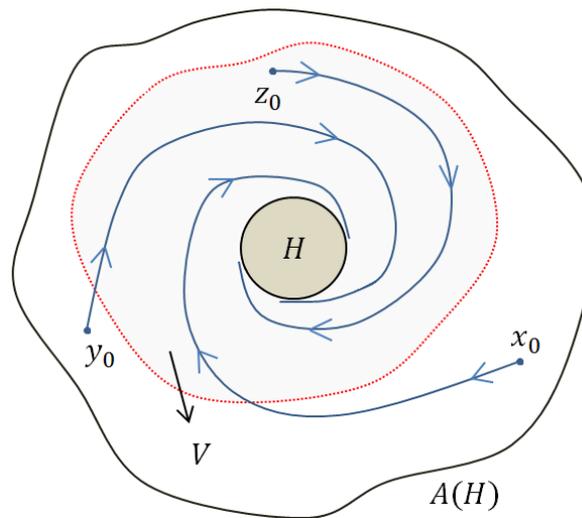


Figura 8 – Ilustração da região de estabilidade de um conjunto atrativo.

Vale ressaltar que como todo ponto de equilíbrio assintoticamente estável é um ponto atrativo, a sua de área de atração será determinada da mesma forma, isto é, se x_e é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável então sua região de atração será composta por todos os pontos $x_0 \in U$ tal que $\varphi_t(x_0) \rightarrow x_e$ quando $t \rightarrow +\infty$.

Apresentamos a seguir alguns importantes teoremas sobre a região de estabilidade. O primeiro deles garante que a região de estabilidade de um conjunto atrativo é invariante, isto é, se $x_0 \in A(H)$ então a órbita $\gamma(x_0)$ está inteiramente contida em $A(H)$.

Teorema 3.5 (CHIANG et al., 1988)¹ Seja $x_0 \in A(H)$ um conjunto atrativo de (2.1). Então $A(H)$ é um conjunto invariante.

Uma propriedade importante a cerca da região de atração é apresentada a seguir. O Teorema 3.6 garante que a região de estabilidade é conjunto aberto, isto é, para cada $y \in A(H)$ existe $\delta > 0$ tal que $B(y, \delta)$ está inteiramente contida em $A(H)$.

Teorema 3.6 (CHIANG et al., 1988)² Seja H um conjunto atrativo com relação ao sistema (2.1), então a região de atração $A(H)$ é um conjunto aberto.

¹A demonstração deste teorema pode ser encontrada no trabalho de Amaral (2010).

²A demonstração deste teorema pode ser encontrada no trabalho de Amaral (2010).

Exploraremos nos próximos resultados propriedades da fronteira da região de estabilidade. É importante ressaltar que algumas das propriedades como a invariância são fundamentais para o estudo da fronteira da região de estabilidade.

Teorema 3.7 *Seja H um conjunto invariante de (2.1). Então a fronteira ∂H^3 também é um conjunto invariante.*

Demonstração:⁴ Seja H um conjunto invariante e $x_0 \in \partial H$. Queremos mostrar que $\varphi_t(x_0) \in \partial H$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Como $x_0 \in \partial H$, então dado $\delta > 0$ arbitrariamente pequeno, existem $x_1 \in H$ e $x_2 \in U - H$ tal que $\|x_0 - x_1\| < \delta$ e $\|x_0 - x_2\| < \delta$. H garante que $\varphi_t(x_1) \in H$ e $\varphi_t(x_2) \in U - H$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Dado $T \in \mathbb{R}$ arbitrário e $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, tem-se, da continuidade das soluções com relação às condições iniciais, que existe $\delta > 0$ tal que $\|x_1 - x_0\| < \delta$ e $\|x_2 - x_0\| < \delta$ implica em $\|\varphi_t(x_1) - \varphi_t(x_0)\| < \epsilon$ e $\|\varphi_t(x_2) - \varphi_t(x_0)\| < \epsilon$ para todo $t \in [-T, T]$. Sendo assim, arbitrariamente próximo de $\varphi_T(x_0)$ existem pontos $\varphi_T(x_1) \in H$ e $\varphi_T(x_2) \in U - H$. Portanto, $\varphi_T(x_0) \in \overline{H}$ e $\varphi_T(x_0) \in \overline{U - H}$. Por definição, $\varphi_T(x_0) \in \partial H$. Como x_0 e T foram escolhidos de maneira arbitrária, tem-se, para todo $x_0 \in \partial H$ que $\varphi_T(x_0) \in \partial H$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo, ∂H é um conjunto invariante. ■

Corolário 3.8 *Seja H um conjunto atrativo de (2.1). Então a fronteira $\partial A(H)$ da região de estabilidade é um conjunto fechado e invariante.*

Demonstração:⁵ Por definição, a fronteira de qualquer conjunto é um conjunto fechado. logo, $\partial A(H)$ é um conjunto fechado. como a região de estabilidade é um conjunto invariante segue diretamente do Teorema 3.7 que $\partial A(H)$ é um conjunto fechado. ■

Evidentemente, os resultados apresentados nesta seção também são válidos para a região de estabilidade de pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis. No capítulo 6 expandiremos esses importantes conceitos apresentados nos Teoremas 3.5 e 3.6 para sistemas dinâmicos fuzzy, mas apenas para pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis dos fluxos fuzzy.

3.3 Estimativa da região de estabilidade

Nesta seção discutiremos sobre alguns métodos utilizados na literatura para estimar a região de estabilidade de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. Esses métodos começaram a ser largamente estudados na década de 60, motivados

³A fronteira de um conjunto H em U é o conjunto ∂H , formado pelos pontos $x \in U$ tais que toda bola aberta de centro x_0 contém pelo menos um ponto de H e um ponto do complementar $U - H$.

⁴A demonstração foi adaptada do trabalho de Amaral (2010).

⁵A demonstração foi adaptada do trabalho de Amaral (2010).

pelos estudos de estabilidade transitória em sistemas elétricos de potência, ver por exemplo (GLASS, 1966; EL-ABIAD; NAGAPPAN, 1966; WILLEMS, 1968). A maioria dos métodos usados na análise de estabilidade transitória em sistemas elétricos de potência, baseavam-se no Princípio de Invariância de LaSalle (LASALLE, 1960) e exploravam a estrutura qualitativa da fronteira da região de estabilidade. Além de serem bastantes conservadores, estes métodos eram heurísticos, e conseqüentemente sujeitos a erros.

Motivados em compreender a fronteira da região de estabilidade para obter estimativas ótimas da região de estabilidade na análise de estabilidade transitória em sistemas elétricos de potência, Tsolas et al. (1985) propõem na literatura uma primeira caracterização dinâmica da fronteira da região de estabilidade de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, para um sistema dinâmico autônomo não linear

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um campo vetorial de classe C^1

No trabalho de Tsolas et al. (1985), foi mostrado, sob algumas condições, que a fronteira da região de estabilidade é a união do fecho das variedades estáveis de todos os pontos de equilíbrio do tipo 1 que pertencem a fronteira da região de estabilidade.

Chiang et al. (1987) apresentavam uma fundamentação teórica de métodos diretos para efetuar a estimativa da região de estabilidade. Esta fundamentação tem por base uma nova caracterização dinâmica da fronteira da região de estabilidade de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável que generaliza a caracterização proposta por Tsolas et al. (1985). No trabalho de Chiang et al. (1987), mostrou-se sob as condições

- (A1) Todos pontos de equilíbrio na fronteira da região de estabilidade são hiperbólicos;
- (A2) As variedades estáveis e instáveis dos pontos de equilíbrio na fronteira da região de estabilidade satisfazem a condição de transversalidade;
- (A3) Toda trajetória na fronteira da região de estabilidade se aproxima de um ponto de equilíbrio quando $+\infty$,

que a fronteira da região de estabilidade é a união das variedades estáveis de todos os pontos de equilíbrio na fronteira. Além disso, foram dadas condições necessárias e suficientes para um ponto de equilíbrio hiperbólico pertencer à fronteira da região de estabilidade.

Um pouco mais tarde, no trabalho de Chiang et al. (1988) foi apresentada uma caracterização mais completa da fronteira da região de estabilidade de um ponto de

assintoticamente estável que generaliza a caracterização proposta por [Chiang et al. \(1987\)](#). Naquele trabalho, sob as condições

- (B1) Todos pontos de equilíbrio(e/ou órbitas fechada) na fronteira da região de estabilidade são hiperbólicos;
- (B2) As variedades estáveis e instáveis dos pontos de equilíbrio(e/ou orbitas fechada) na fronteira da região de estabilidade satisfazem a condição de transversalidade;
- (B3) Toda trajetória na fronteira da regioao de estabilidade se aproxima de um ponto de equilíbrio (e/ou órbitas fechada) quando $t \rightarrow +\infty$.

mostrou-se que a fronteira da região de estabilidade é a união das variedades estáveis de todos os pontos de equilíbrio (e/ou órbitas fechadas) na fronteira da região de estabilidade. Além disso, foram dadas condições necessárias e suficientes para um ponto de equilíbrio (e ou órbitas fechadas) pertencer à fronteira da região de estabilidade. [Chiang et al. \(1988\)](#) apresentaram uma caracterização da fronteira da região de estabilidade para duas classes de sistemas dinâmicos: sistemas gradientes generalizados e sistemas descritos por uma equação diferencial vetorial de segunda ordem. A caracterização para estas duas classes específicas de sistemas foi a mesma dada por [Chiang et al. \(1987\)](#) porém, para estes sistemas, apenas a hipótese (A2) foi utilizada para a caracterização da fronteira. Além disso, para estes sistemas particulares se que os pontos de equilíbrio hiperbólicos na fronteira da região de estabilidade persistem na fronteira sob pequenas perturbações do campo vetorial.

Mais tarde no trabalho de [Chiang \(1995\)](#), foram mostrados, sob as suposições (A1) e (A3), para sistemas dinâmicos autônomos mais gerais, que os pontos de equilíbrio hiperbólicos na fronteira da região de estabilidade de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável também persistem na fronteira sob pequenas perturbações do campo vetorial.

3.4 Estimativa da região de estabilidade

Nesta seção, apresentamos uma estimativa da região de estabilidade via conjunto de nível de uma dada função energia. Para isso, introduziremos o conceito de função energia existente na literatura, faremos uma breve revisão dos resultados relacionados a estimativas da região de estabilidade propostas por [Chiang et al. \(1987\)](#) e também trazemos resultados que permitem caracterizar a fronteira da região de estabilidade de sistemas dinâmicos autônomos não lineares que admitem uma função energia.

O conceito de função energia foi inicialmente proposto por [Chiang et al. \(1987\)](#). A existência de uma função energia possui consequências importantes a respeito dos

conjuntos limites, além disso, elas podem ser utilizadas para se obter estimativas da região de estabilidade (CHIANG et al., 1987; CHIANG et al., 1988).

Considere $E = \{x_e \in U : f(x_e) = 0\}$ o conjunto dos pontos de equilíbrio do Sistema (2.1).

Definição 3.9 (Função Energia)(CHIANG et al., 1987) função $V : U \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 , é uma função energia de (2.1) se as seguintes condições forem satisfeitas:

- (i) $\dot{V}(x) \leq 0$ para todo $x \in U$
- (ii) se $x_0 \notin E$ então o conjunto $\{t \in \mathbb{R} : \dot{V}(\varphi_t(x_0)) = 0\}$ possui medida nula em \mathbb{R} .
- (iii) se $V(\varphi_t(x_0))$ é limitada para $t \in \mathbb{R}$, então a trajetória $\varphi_t(x_0)$ também é limitada para $t \in \mathbb{R}$.

As condições (i) e (ii) implicam que a energia do sistema é não crescente ao longo de qualquer trajetória não trivial. A condição 3.9 garante a não existência de uma trajetória ilimitada cuja energia permaneça limitada ao longo da trajetória. Uma condição suficiente para que 3.9 seja satisfeita é que a função escalar $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função própria⁶ ou crescente. Por outro lado, podem existir funções escalares $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ onde a condição 3.9 é satisfeita embora elas não sejam própria e nem crescente, por exemplo as função energia proposta no Exemplo 3.13.

Para obter estimativas da região de estabilidade via conjunto de nível de uma dada função energia, apresentaremos a seguir resultados que exploram a caracterização da fronteira da região de estabilidade. Inicialmente trazemos um resultado que descreve a fronteira da região de estabilidade de sistemas dinâmicos autônomos não lineares que admitem uma função energia.

Teorema 3.10 (Caracterização da fronteira da região de estabilidade) (CHIANG et al., 1987) Seja x_s um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de (2.1) e $A(x_s)$ sua região de estabilidade. Se existe uma função energia para o Sistema (2.1) e a suposição (A1) está satisfeita, então:

$$\partial A(x^s) \subseteq \bigcup_i W^s(x^i)$$

onde $x^i, i = 1, 2, \dots$ são os pontos de equilíbrio em $\partial A(x^s)$. Se, adicionalmente a suposição (A2) está satisfeita, então

$$\partial A(x^s) = \bigcup_i W^s(x^i)$$

⁶Uma função contínua $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função própria se $\|x\| \rightarrow +\infty$ então $|V(x)| \rightarrow +\infty$.

O Teorema 3.11 estuda a localização do mínimo da função energia na fronteira da região de estabilidade através da análise da caracterização da fronteira da região de estabilidade do Teorema 3.10. Desta forma, o Teorema 3.11 mostra que o mínimo da função energia é atingido em um ponto de equilíbrio.

Teorema 3.11 (Função energia e pontos de equilíbrio) (CHIANG *et al.*, 1987) *Considere o sistema dinâmico não linear (2.1), que admite uma função energia V . Seja x_s um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de (2.1) e $A(x_s)$ sua região de estabilidade. Suponha que (A1) esteja satisfeita. Então, na fronteira da região de estabilidade $\partial A(x_s)$, o ponto em que função energia V assume o valor mínimo deve ser um ponto de equilíbrio.*

O ponto de mínimo da função energia na fronteira da região de estabilidade pode não ser único, mas como a propriedade que todos os pontos de equilíbrio do sistema (2.1) têm valores da função energia distintos é genérica (CHIANG; THORP, 1989), podemos afirmar que genericamente o ponto de mínimo da função energia na fronteira da região de estabilidade é único, em outras palavras, quase sempre a unicidade do ponto de mínimo é garantida.

A importância prática e computacional deste resultado está no fato de podermos obter estimativas da região de estabilidade calculando o valor da energia apenas nos pontos de equilíbrio, os quais por sua vez podem ser numericamente calculados. Explorando o fato de que o mínimo da função energia é atingido em um ponto de equilíbrio, o próximo teorema oferece entre outras coisas, um algoritmo para obter uma estimativa da região de estabilidade via conjunto de nível de uma dada função energia.

Teorema 3.12 (Estimativa da região de estabilidade via função energia) (CHIANG *et al.*, 1987) *Considere o sistema dinâmico não linear (2.1), que admite uma função energia V . Seja x_s um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de (2.1) e $A(x_s)$ sua região de estabilidade. Suponha que (A1) esteja satisfeita. Se $L = \min_{x_i \in \partial A(x_s) \cap E} V(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$ então:*

- (i) *a componente conexa $D(L)$ do conjunto de nível $\{x \in U : V(x) < L\}$ contendo o equilíbrio x^s está contida na região de estabilidade $A(x^s)$.*
- (ii) *a componente conexa $D(B)$ do conjunto de nível $\{x \in U : V(x) < B\}$ contendo o equilíbrio x^s tem interseção não vazia com o complementar da região de estabilidade $A^c(x^s)$ para qualquer número real $B > L$.*

O item (ii) do Teorema 3.12 afirma que a escolha $L = \min_{x_i \in \partial A(x_s) \cap E} V(x_i)$ é ótima no sentido de que $D(L)$ é o maior conjunto, na forma de conjunto de nível da função energia V , inteiramente contido na região de estabilidade $A(x_s)$. Na prática, o Teorema

3.12 assegura que calculando todos os pontos de equilíbrio na fronteira da região de estabilidade, podemos obter uma estimativa da região de estabilidade.

Exibiremos a seguir um exemplo que ilustra os resultados apresentados nesta seção.

Exemplo 3.13 ⁷ Considere o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y \\ \frac{dy}{dt} = \sin(x) - y + 0,2 \end{cases} \quad (3.2)$$

onde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

A função $V(x; y) = -\cos(x) + 0,2x + \frac{y^2}{2}$ é uma função energia para o Sistema (3.2). O Sistema (3.2) possui três pontos de equilíbrio; são eles $(-0, 2; 0)$, um ponto de equilíbrio hiperbólico assintoticamente estável, $(-2, 94; 0)$ e $(3, 34; 0)$ pontos de equilíbrio hiperbólicos instáveis. Ambos equilíbrios $(-2, 94; 0)$ e $(3, 34; 0)$ pertencem à fronteira da região de estabilidade $\partial A(-0, 2; 0)$, ver Figura 9. O ponto de mínimo da função energia na fronteira $\partial A(-0, 2; 0)$ é o ponto de equilíbrio $(-2, 94; 0)$, pois $V(-2, 94; 0) = 0,39 < 1,64 = V(3, 34; 0)$. A componente conexa $D(0, 391)$ do conjunto de nível $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : V(x; y) < 0,39\}$ contendo o equilíbrio $(-0, 2; 0)$ está inteiramente contida na região de estabilidade $A(-0, 2; 0)$, de acordo com o Teorema 3.12. (ver Figura 9). Tomando $B = 0,41 > 0,39$, a componente conexa $D(0, 41)$ do conjunto de nível $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : V(x; y) < 0,41\}$ contendo o ponto de equilíbrio $(-0, 2; 0)$ intercepta o complementar da região de estabilidade $A^c(-0, 2; 0)$, de acordo como item (ii) do Teorema 3.12. (ver Figura 10).

⁷Exemplo retirado do trabalho de Amaral (2010)

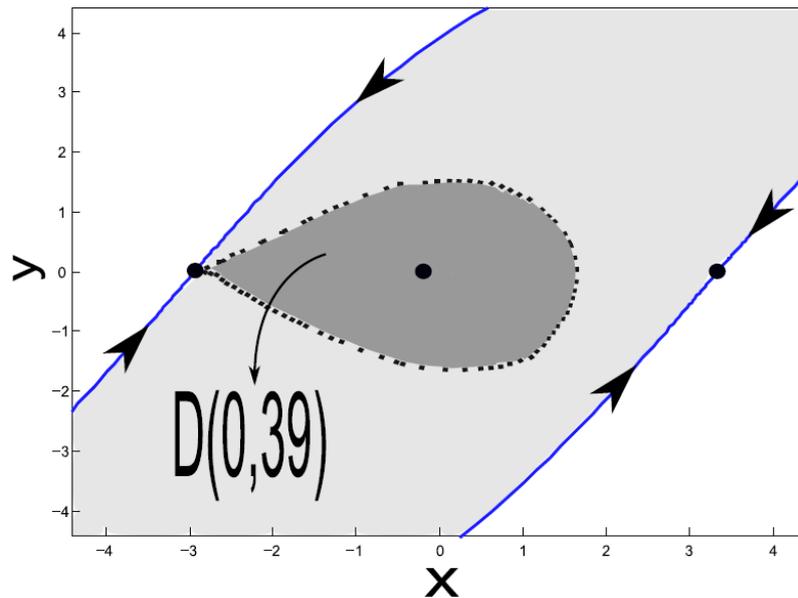


Figura 9 – O retrato de fase do sistema (3.2). A região de estabilidade do ponto de equilíbrio assintoticamente estável $(-0, 2; 0)$ é representada pela área em cinza claro. A componente conexa $D(0, 39)$ do conjunto de nível $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : V(x; y) < 0, 39\}$ contendo o equilíbrio $(-0, 2; 0)$ representada pela área em cinza escuro é uma estimativa da região de estabilidade.

Fonte: Amaral (2010)

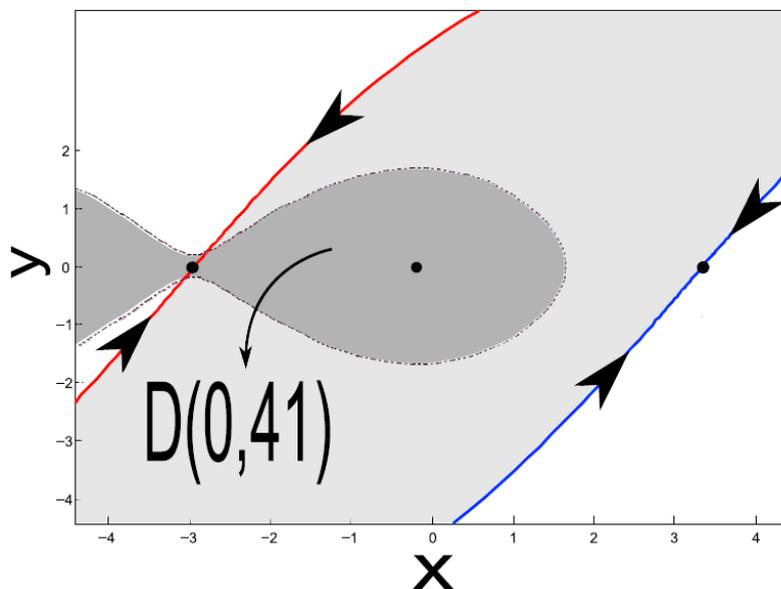


Figura 10 – O retrato de fase do sistema (3.2). A região de estabilidade do ponto de equilíbrio assintoticamente estável $(-0, 2; 0)$ é representada pela área em cinza claro. A componente conexa $D(0, 41)$ do conjunto de nível $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : V(x; y) < 0, 41\}$ contendo o equilíbrio $(-0, 2; 0)$ representada pela área em cinza escuro intercepta o complementar da região de estabilidade $A^c(-0, 2; 0)$.

Fonte: Amaral (2010)

3.5 Conclusão

Na seção 3.1 apresentamos a definição de conjunto atrativo através da generalização do conceito de ponto de equilíbrio atrativo e também mostramos uma ideia topologicamente mais forte do que o de conjunto atrativo através da definição de conjunto atrator.

Na seção 3.2 definimos a região de atração e exploramos algumas propriedades topológicas da região de estabilidade que serão fundamentais para os capítulos subsequentes desta pesquisa. Em especial, apresentamos os Teoremas 3.5 e 3.6 que terão uma versão para fluxos fuzzy apresentada no Capítulo 6.

Na seção 3.3 discutiremos sobre alguns métodos propostos na literatura para estimar a região de estabilidade de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

Na seção 3.4 apresentamos resultados que possibilitam caracterizar a fronteira da região de estabilidade de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para sistemas que admitem função energia e apresentamos um exemplo de uma estimativa da região de estabilidade de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

4 Lógica Fuzzy: conceitos básicos

Neste capítulo apresentamos resultados importantes sobre a teoria dos subconjuntos fuzzy¹, visto que, tais conceitos são primordiais para a construção dos demais capítulos deste trabalho.

4.1 Introdução

A Teoria dos Subconjuntos Fuzzy tem se desenvolvido e está progressivamente sendo utilizada nos diversos campos da ciência como instrumento para construção de modelos em diferentes áreas de aplicações com a principal finalidade de atribuir um tratamento matemático para informações e fenômenos de natureza vaga ou imprecisa, como por exemplo, o conceito de pequeno, alto, inteligente, jovem, etc. (BARROS; BASSANEZI, 2010, p. 3). A primeira publicação sobre essa teoria ocorreu em 1965 pelo matemático e professor de ciência da computação da Universidade da Califórnia *Lotfali Askar-Zadeh* através da publicação do artigo *Fuzzy Sets*. Em seu trabalho, *Zadeh (1965)* se dedicou ao estudo de certos conjuntos que não possuem fronteiras bem definidas, isto é, a passagem entre conjuntos é suave e não brusca (ORTEGA, 2001, p. 4-5). A finalidade da criação de tal conceito consistiu em programar e armazenar conceitos imprecisos em computadores, possibilitando a produção de cálculos com informações incertas, do mesmo modo como fazem os seres humanos (BARROS; BASSANEZI, 2010, p. 12). Desde então, as áreas de aplicações da teoria dos subconjuntos fuzzy vem se tornando cada vez mais amplas, englobando estudos estritamente matemáticos (DIAMOND; KLOEDEN, 1994; NGUYEN; WALKER, 2000) e também trabalhos em matemática aplicada e engenharia (KLIR; YUAN, 1995; BARROS; BASSANEZI, 2006).

Nas próximas seções, descreveremos os Subconjuntos Clássicos e Subconjuntos Fuzzy e veremos que o caso clássico trata-se de um caso particular de subconjuntos fuzzy. Além disso, definiremos as operações com subconjuntos fuzzy e o conceito de α -nível.

Ressaltamos que quando nos referimos a um conjunto A , na verdade estamos considerando A como sendo um subconjunto de algum conjunto universo X . No caso fuzzy o mesmo acontece, e utilizaremos ambos os termos neste trabalho.

¹palavra inglesa que significa incerto, impreciso, subjetivo, nebuloso, etc.

4.2 Subconjuntos Clássicos

Os subconjuntos clássicos são caracterizados por uma *função característica*. Essa função tem o papel de definir quais elementos pertencem ou não ao subconjunto e sua definição é apresentada a seguir.

Definição 4.1 *Seja $\mathcal{P}(X)$ o conjunto formado pelos subconjuntos de um conjunto X . Para cada $A \in \mathcal{P}(X)$ a função característica de A é definida por*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Assim, a função $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$ indica que um elemento $x \in A$ quando $\chi_A(x) = 1$ e que $x \notin A$ quando $\chi_A(x) = 0$. Portanto, a *função característica* de A descreve totalmente o conjunto A , pois expressa quais os elementos do conjunto universo X estão também contidos em A .

Exemplo 4.2 *Seja $A = \mathbb{N}$ e $X = \mathbb{R}$. Então a pertinência de 2 ao subconjuntos dos números naturais é igual a 1, isto é, $\chi_{\mathbb{N}}(2) = 1$, pois $2 \in \mathbb{N}$ e $\chi_{\mathbb{N}}(-2) = 0$, pois $-2 \notin \mathbb{N}$. Assim, para todo $x \in \mathbb{R}$ é possível verificar, através da função característica de \mathbb{N} , se x pertence ou não ao conjunto dos naturais.*

Todavia, existem casos em que nem sempre é possível afirmar com clareza se um elemento pertence ou não a um conjunto. Para exemplificar, consideremos o conjunto G dos números reais não-negativos considerados *grandes*.

$$G = \{x \in \mathbb{R}_+ : x \text{ é grande}\}.$$

O número 1 pertence a este conjunto? E o número 1000?

Não é possível responder com certeza a estas questões, pois não sabemos até que ponto um determinado número pode ser considerado grande. A única afirmação plausível é que o número 1000 possui maior grandeza do que o número 1.

Apresentaremos a seguir os *Subconjuntos Fuzzy* para formalizar matematicamente questões como a mencionada acima.

4.3 Subconjuntos Fuzzy

Vimos que os *Subconjuntos Clássicos* são caracterizados por uma *função característica*. Já os *Subconjuntos Fuzzy* são determinados através de uma *função de pertinência*

que determina o grau com que um elemento do conjunto universo X pertence ao subconjunto fuzzy.

Para estabelecer os conjuntos fuzzy, Zadeh “estendeu” a imagem das funções características para todo o intervalo $[0, 1]$. Assim, cada subconjunto fuzzy F de X é caracterizado por uma função $\mu_F : X \rightarrow [0, 1]$, denominada *função de pertinência*, que para cada $x \in X$ associa ao valor $\mu_F(x) \in [0, 1]$, denominado *grau de pertinência de x ao conjunto fuzzy F* .

Matematicamente, temos a seguinte definição:

Definição 4.3 *Seja X um conjunto (clássico) não vazio e F um Subconjunto Fuzzy de X . A função de pertinência de F é dada por*

$$\mu_F : X \longrightarrow [0, 1].$$

O valor $\mu_F(x) \in [0, 1]$ estabelece o grau com que o elemento $x \in X$ está contido no subconjunto fuzzy F . Assim, $\mu_F(x) = 1$ indica a pertinência completa de x a F e $\mu_F(x) = 0$ aponta a não pertinência de x a F .

Definição 4.4 *Seja F um subconjunto fuzzy compostos por elementos x de um conjunto X , munidos de um valor de pertinência a F , dado por $\mu_F(x)$. O subconjunto fuzzy F de X pode ser caracterizado por meio de um conjunto clássico de pares ordenados:*

$$F = \{(x, \mu_F(x)) : x \in X\}.$$

Exemplo 4.5 *Considere o subconjunto fuzzy G dos números reais positivos considerados grandes.*

$$G = \{x \in \mathbb{R}_+ : x \text{ é grande}\}.$$

Podemos determinar uma função $\varphi_G : \mathbb{R}_+ \longrightarrow [0, 1]$, que associa cada x real não-negativo ao valor que representa o quão grande esse número pode ser considerado. Tomemos essa função como sendo

$$\mu_G(x) = \frac{x}{x + 1000}.$$

Desta forma, o subconjunto fuzzy G dos números naturais considerados grandes, caracterizado por μ_G , é de tal modo que $\mu_G(0) = 0$, $\mu_G(1) = 1 \times 10^{-3}$, $\mu_G(1000) = 0,5$ e $\mu_G(1.000.000) = 0,999$. Nestas condições, dizemos que o grau de grandeza de 1 é, aproximadamente, 1×10^{-3} o de 1.000.000 é 0,999 e que 0 não é grande.

Portanto, uma resposta plausível para as perguntas lançada no final da seção anterior é dizer ambos os elementos (1 e 1000) pertencem ao conjunto G dos números grandes, porém com diferentes graus de pertinência (ver Figura 11).

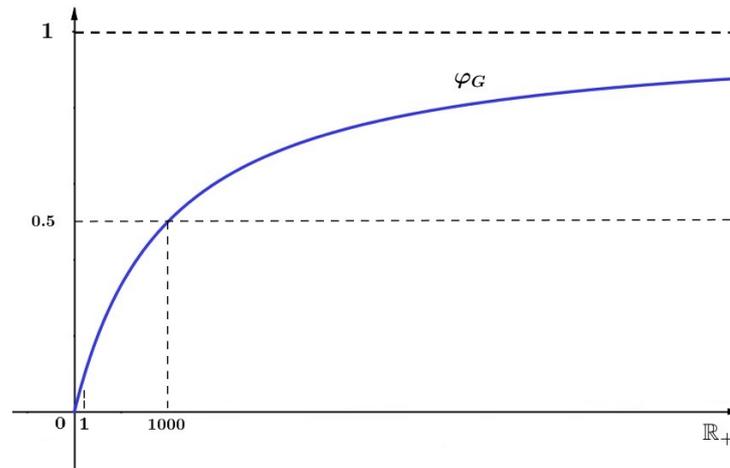


Figura 11 – Ponto de equilíbrio assintoticamente estável

É claro que poderíamos definir a função de pertinência de G de várias outras maneiras distintas. A escolha de qual função adotar dependerá das circunstâncias em que se pretende considerar a grandeza de um número.

Denotaremos o conjunto formado por todos os subconjuntos fuzzy de X por $\mathcal{F}(X)$. Embora seja mais apropriado dizer que F é um subconjunto fuzzy de X , recorrentemente, dizemos apenas que F é um conjunto fuzzy, deixando implícita a existência de um conjunto X onde a função de pertinência de F esta definida.

Note que um subconjunto clássico é um caso particular de um subconjunto fuzzy cuja função de pertinência μ_F é a sua função característica χ_F . Neste sentido, a definição formal de subconjunto fuzzy foi adquirida estendendo-se a imagem da função característica, que é o conjunto $\{1, 0\}$, para o intervalo $[0, 1]$.

Se $A \in \mathcal{P}(X)$, ou seja, $A \subset X$, então $\{(x, \mu_A(x)) : x \in X\}$ é um subconjunto não vazio de $X \times [0, 1]$. Pela Definição 4.4, o subconjunto A determina um subconjunto fuzzy de X que será mencionado neste trabalho, com abuso de notação, por χ_A . Denotaremos os subconjuntos clássicos por *subconjuntos crisp*, pois esta nomenclatura é a mais utilizada na linguagem fuzzy.

A próxima definição diz respeito ao *suporte de conjuntos fuzzy*. Esse conjunto é extremamente importante na articulação entre as teorias clássica e fuzzy.

Definição 4.6 O subconjunto (clássico) de X definido por

$$\text{Supp } F = \{x \in X : \mu_F(x) > 0\}.$$

é chamado de suporte do conjunto fuzzy F

Observe que o suporte de um *subconjunto crisp* sempre coincide com o próprio conjunto, o que não acontece com o suporte de um *subconjunto fuzzy*, conforme podemos observar através da Figura 12 abaixo.

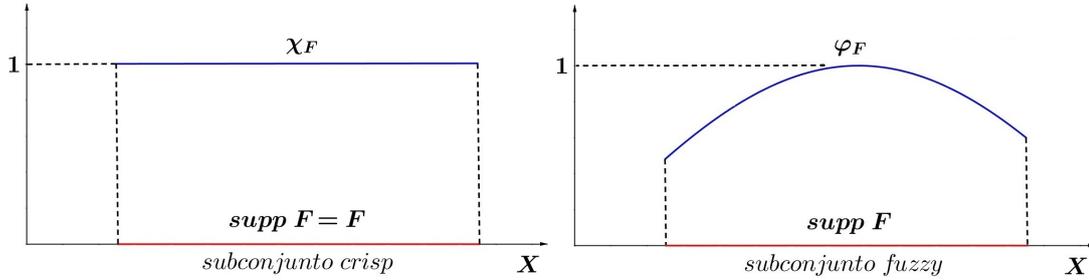


Figura 12 – Ilustração do suporte de subconjuntos fuzzy e subconjuntos crisp

4.4 Operações entre Subconjuntos Fuzzy

Apresentaremos nesta seção as operações características de conjuntos fuzzy, como união, interseção e complemento. Seguimos aqui as mesmas definições publicadas por Zadeh (1965), entretanto, é válido ressaltar que essas operações podem ser generalizadas de diversas formas diferentes, através dos conceitos de *t - normas* e *t - conormas* (NGUYEN; WALKER, 2000).

Definição 4.7 *Sejam A e B subconjuntos fuzzy e, μ_A e μ_B , suas respectivas funções de pertinência. Então, B é dito subconjunto fuzzy de A , isto é, $B \subset A$, se para todo $x \in U$ tem-se*

$$\mu_B(x) \leq \mu_A(x).$$

Verifica-se facilmente que $\emptyset \subset A \subset X$ para todo subconjunto fuzzy A . Basta notar $\mu_\emptyset(x) = 0$ e que $\mu_X(x) = 1$ para todo $x \in X$. Portanto, $\mu_\emptyset(x) \leq \mu_A(x) \leq \mu_X(x)$. Consequentemente, $\emptyset \subset A$ e $A \subset X, \forall A$.

Definição 4.8 *Sejam A e B subconjuntos fuzzy. A união entre A e B , ou seja, $A \cup B$, é o subconjunto fuzzy de X cuja função de pertinência $\varphi_{A \cup B}$ é dada por*

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max [\mu_A(x), \mu_B(x)], \forall x \in X.$$

Definição 4.9 *A intersecção entre os subconjuntos fuzzy A e B , isto é, $A \cap B$, é o subconjunto fuzzy de X cuja função de pertinência $\varphi_{A \cap B}$ é dada por*

$$\varphi_{A \cap B}(x) = \min [\mu_A(x), \mu_B(x)], \forall x \in X.$$

Estas definições são amplificações do caso clássico. Ilustraremos apenas a intersecção na situação em que A e B são subconjuntos clássicos de X , pois a união pode ser verificada de maneira análoga. De fato,

$$\begin{aligned} \min [\chi_A(x), \chi_B(x)] &= \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \text{ e } x \in B \\ 0 & \text{se } x \notin A \text{ ou } x \notin B \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \cap B \\ 0 & \text{se } x \notin A \cap B \end{cases} \\ &= \chi_{A \cap B}, \quad x \in X. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\chi_{A \cap B} = \min [\chi_A(x), \chi_B(x)], \forall x \in X.$$

Definição 4.10 Se A é um subconjunto fuzzy, o complementar de A é o subconjunto fuzzy A' contido em X que possui a seguinte função de pertinência:

$$\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x), \forall x \in X.$$

Assim, temos que $X' = \emptyset$ e $\emptyset' = X$.

A Figura 13 ilustra as operações entre subconjunto fuzzy.

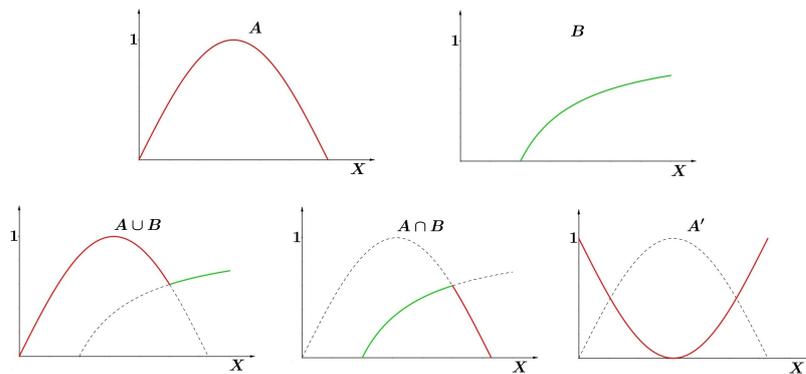


Figura 13 – Operações entre subconjuntos fuzzy

Fonte: Elaborada pelo autor

Exemplo 4.11² Suponhamos que o conjunto universo X seja composto por 5 modelos de carros modernos de uma determinada marca, identificados por C_1, C_2, \dots, C_5 . Sejam S e D subconjuntos fuzzy que representam o grau de segurança e de design moderno, indicados por φ_S e φ_D , respectivamente. A Tabela 1 ilustra as operações união, intersecção e complemento entre S e D .

²Exemplo adaptado de Barros e Bassanezi (2010, p. 27).

Carro	Segurança: μ_S	Design: μ_D	$\mu_{S \cup D}$	$\mu_{S \cap D}$	$\mu_{S'}$	$\mu_{S \cup S'}$	$\mu_{S \cap S'}$
C_1	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	1,0	0,0
C_2	0,8	0,9	0,9	0,8	0,2	0,8	0,2
C_3	0,3	0,6	0,6	0,3	0,7	0,7	0,3
C_4	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
C_5	0,4	0,4	0,4	0,4	0,6	0,6	0,4

Tabela 1 – Ilustração das operações entre subconjuntos fuzzy.

Fonte: Editada pelo autor

Os valores das colunas, exceto os da primeira, indicam os graus com que cada veículo pertence aos conjuntos fuzzy S , D , $S \cup D$, $S \cap D$, S' , $S \cup S'$ e $S \cap S'$, respectivamente. Observe que o valor 0,2 da coluna $S \cap S'$ indica que o carro C_2 está tanto no grupo dos automóveis seguros como no dos não seguros, o que é inaceitável na teoria de conjuntos clássicos. Também é possível perceber que nem sempre a união entre um conjunto fuzzy e o seu complementar é igual ao conjunto universo.

Definição 4.12 *Os subconjuntos fuzzy A e B de U são ditos iguais, e escrevemos $A = B$, se suas funções de pertinência são coincidentes, ou seja*

$$\mu_A(x) = \mu_B(x), \quad \forall x \in X.$$

Definição 4.13 *Sejam A e B subconjuntos fuzzy de X . Se $A \subseteq B$, então o complemento de A em B é o subconjunto fuzzy A'_B que possui a seguinte função de pertinência:*

$$\mu_{A'_B}(x) = \mu_B(x) - \mu_A(x), \quad x \in X.$$

Verifique que o complementar de A em X é um caso particular desta definição, já que $\mu_X(x) = 1$ para todo $x \in X$.

Faremos agora o estudo de uma classe específica de conjuntos crisp que estabelece uma importante conexão entre as funções de pertinência de um subconjunto fuzzy e as funções características de cada classe.

4.5 O α -nível de um Subconjunto Fuzzy

Considerando um subconjunto fuzzy F de X , podemos ordenar os elementos de X que possuem pertinência a F através de uma classificação por graus, que estabelece uma hierarquia entre esses elementos. Assim, dizemos que um elemento x de X pertence a uma determinada classe se seu grau de pertinência a F é maior que um certo valor

$\alpha \in [0, 1]$. O conjunto crisp constituído por esses elementos é denominado α -nível (ou α -corte) de F e denotamos tal conjunto por $[F]^\alpha$.

Definição 4.14 *Seja F um subconjunto fuzzy contido em X e $\alpha \in [0, 1]$. É definido por α -nível (ou α -corte) de F o subconjunto clássico de X dado por*

$$[F]^\alpha = \{x \in X : \mu_F \geq \alpha\}, \text{ para } 0 < \alpha \leq 1.$$

Exemplo 4.15 *Tomemos como exemplo, novamente o conjunto fuzzy G dos números reais positivos considerados grandes, com a seguinte função de pertinência*

$$\mu_G(x) = \frac{x}{x + 1000}.$$

Podemos determinar uma classe em G para os números considerados muito grandes. Tomemos 0,5 como sendo o nível desta classe, então, os elementos de \mathbb{R}_+^* que possuírem grau pertinência a G maior ou igual a 0,5 pertencem a classe dos números muito grandes, isto é, pertencem ao 0,5-nível de G . Neste caso escrevemos

$$[G]^{0,5} = \{x \in \mathbb{R}_+^* : \mu_G(x) \geq 0,5\}.$$

Nestas condições, todo número maior ou igual a 1000 será considerado muito grande. Veja a Figura 14.

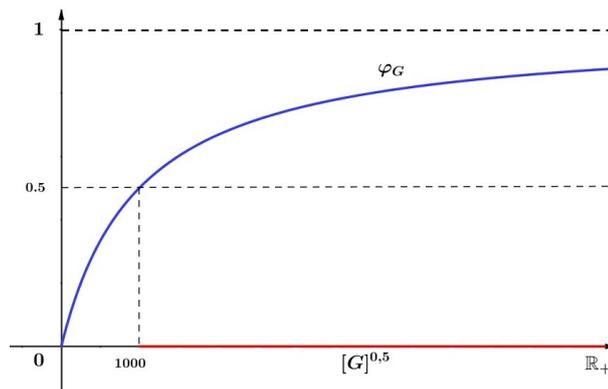


Figura 14 – Exemplo de classe dos números muito grandes

A existência do nível zero é fundamental para se atender certos conceitos estabelecidos na teoria de conjuntos fuzzy. Assim, trazemos a seguir a definição de tal conjunto.

Definição 4.16 *O nível zero $[F]^0$ de um subconjunto fuzzy F é definido como sendo o fecho do suporte de F , isto é*

$$[F]^0 = \overline{\text{supp } A}$$

Em outras palavras, o nível zero de um subconjunto fuzzy F é o menor subconjunto crisp fechado de X que contém o conjunto suporte de F .

A igualdade entre conjuntos fuzzy pode também ser caracterizada por meio dos seus α - níveis. Neste caso, os conjuntos são iguais quando os α - níveis coincidem para todo $\alpha \in (0, 1]$ (BARROS; BASSANEZI, 2006).

Na próxima seção estudaremos o *Princípio da Extensão de Zadeh*, um conceito fundamental da *Teoria dos Conjuntos Fuzzy* que estabelece a extensão de expressões matemáticas do domínio clássico ao domínio fuzzy. Este conceito é fundamental para a modelagem de fenômenos que envolvem grandes níveis de incerteza.

4.6 O Princípio de Extensão de Zadeh

O *Princípio de Extensão* proposto por Zadeh é utilizado para se obter a imagem de conjuntos fuzzy através de uma função clássica. Este conceito é crucial para promover a ampliação de conceitos matemáticos clássicos em fuzzy através de uma aplicação que estabelece uma associação entre dois conjuntos fuzzy. Desta forma, o *Princípio de Extensão* tem a finalidade de determinar a imagem de um subconjunto A de X por meio de uma função $f : X \rightarrow Z$. Neste caso, a imagem de A deverá ser um subconjunto fuzzy de Z .

Definição 4.17 *Sejam $f : X \rightarrow Z$ uma função e A um subconjunto fuzzy de X . A extensão de Zadeh de f é a função \hat{f} que, aplicada a A , fornece o subconjunto fuzzy $\hat{f}(A)$ de Z , que possui a seguinte função de pertinência:*

$$\mu_{\hat{f}(A)}(z) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(z)} \mu_A(x) & \text{se } f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } f^{-1}(z) = \emptyset \end{cases}.$$

onde $f^{-1}(z) = \{x : f(x) = z\}$ é chamado pré-imagem de z .

Note que, no caso em que f é uma função bijetora, a seguinte igualdade será válida:

$$\{x : f(x) = z\} = \{f^{-1}(z)\}$$

em que f^{-1} é a função inversa de f . Conseqüentemente, a função de pertinência de $\hat{f}(A)$ será dada por

$$\mu_{\hat{f}(A)}(z) = \sup_{\{x:f(x)=z\}} \mu_A(x) = \sup_{\{x \in f^{-1}(z)\}} \mu_A(x) = \mu_A(f^{-1}(z)).$$

Além disso, se f for injetora, então $z = f(x)$ pertencerá ao subconjunto fuzzy $\hat{f}(A)$ com o mesmo grau de pertinência α com que $x \in A$, de fato, da definição de α -nível podemos afirmar que

$$x \in A \Leftrightarrow \mu_A(x) \geq \alpha, \quad \alpha \in [0, 1]$$

Assim, teremos

$$\mu_A(f^{-1}(z)) \geq \alpha \Rightarrow \mu_{\hat{f}(A)}(z) \geq \alpha \Rightarrow z \in [\hat{f}(A)]^\alpha.$$

Exemplo 4.18 *Sejam $f(x) = (x - 2)^3 + 3$ e A um subconjunto fuzzy que possui a seguinte função de pertinência:*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \\ 3 - x & \text{se } 2 < x \leq 3 \\ 0 & \text{se } x \notin [1, 3] \end{cases}.$$

Podemos utilizar o princípio da extensão para obter o conjunto fuzzy imagem de A , dado por $\varphi_{\hat{f}(A)}$, pois este princípio assegura que

$$\mu_{\hat{f}(A)}(f(x)) = \mu_A(x) \Rightarrow \mu_{\hat{f}(A)}(z) = \mu_A(x).$$

Além disso, sabemos que

$$f^{-1}(z) = \sqrt[3]{-3 + z} + 2.$$

Desta forma, para $x \in [1, 2]$ obteremos

$$\mu_{\hat{f}(A)}(z) = f^{-1}(z) - 1 \Rightarrow \mu_{\hat{f}(A)}(z) = 1 + \sqrt[3]{-3 + z}, \quad z \in [f(1), f(2)] = [2, 3]$$

e para $x \in (2, 3]$

$$\mu_{\hat{f}(A)}(z) = 3 - f^{-1}(z) \Rightarrow \mu_{\hat{f}(A)}(z) = 1 - \sqrt[3]{-3 + z}, \quad z \in (f(2), f(3)] = (3, 4].$$

Portanto, a função de pertinência do conjunto fuzzy imagem de A por f é dada por

$$\mu_{\hat{f}(A)}(z) = \begin{cases} 1 + \sqrt[3]{-3 + z} & \text{se } 2 \leq z \leq 3 \\ 1 - \sqrt[3]{-3 + z} & \text{se } 3 < z \leq 4 \\ 0 & \text{se } z \notin [2, 4] \end{cases}.$$

A Figura 15 a seguir ilustra a imagem do subconjunto fuzzy A a partir do princípio da extensão para uma função f .

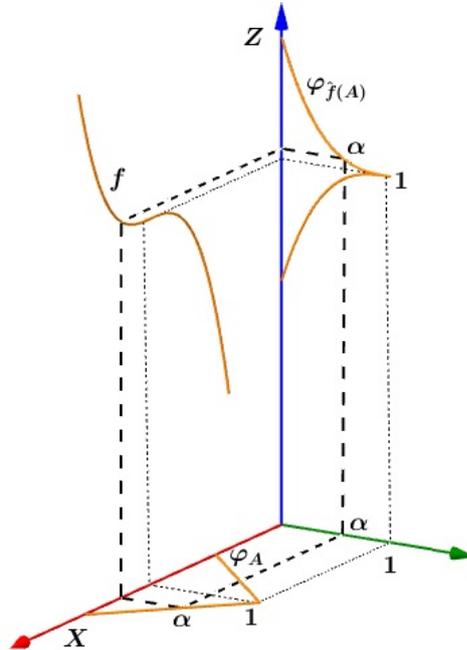


Figura 15 – Imagem de um subconjunto fuzzy a partir do princípio de extensão para uma função f

Como vimos anteriormente, um subconjunto $A \subset X$ determina o conjunto fuzzy χ_A de X cuja função de pertinência é a função característica de A . A imagem de χ_A através da extensão \hat{f} de uma função f coincide com o conjunto fuzzy $\chi_{f(A)}$ definido por $f(A)$. Isto é, $\hat{f}(\chi_A) = \chi_{f(A)}$. De fato, a definição acima garante que $\hat{f}(\chi_A)$ tem a seguinte função de pertinência

$$\mu_{\hat{f}(\chi_A)}(z) = \begin{cases} 1 & \text{se } z \in f(A) \\ 0 & \text{se } z \notin f(A) \end{cases} .$$

que é a função característica de $f(A)$. Logo, $\hat{f}(\chi_A) = \chi_{f(A)}$. Em específico, para todo $x \in X$ é válido $\hat{f}(\chi_{\{x\}}) = \chi_{\{f(x)\}}$.

4.7 O subespaço $\mathcal{E}(X)$

Para estudar a estabilidade de sistemas dinâmicos fuzzy [Cecconello \(2010\)](#) restringe sua análise apenas aos subconjuntos fuzzy de um conjunto X cujos α -níveis são subconjuntos compactos e não vazios em X , isto é,

$$\mathcal{E}(X) = \{A \in \mathcal{F}(X) : \forall \alpha \in [0, 1], [A]^\alpha \text{ é compacto e não vazio}\}.$$

Os subconjuntos fuzzy que estão em $\mathcal{E}(X)$ serão denotados por letras minúsculas em **negrito** para diferenciar dos elementos de X .

Dado $\mathbf{u} \in \mathcal{E}(Y)$, $Y \subset X$, podemos definir $\bar{\mathbf{u}} \in \mathcal{E}(X)$ através da seguinte função de pertinência

$$\mu_{\bar{\mathbf{u}}}(x) = \begin{cases} \mu_{\mathbf{u}}(x) & \text{se } x \in Y \\ 0 & \text{se } x \notin Y. \end{cases} \quad (4.1)$$

Decorre diretamente da definição acima que $[\bar{\mathbf{u}}]^\alpha = [\mathbf{u}]^\alpha$ para todo $\alpha \in [0, 1]$, de maneira que podemos identificar $\mathcal{E}(Y)$ como um subconjunto de $\mathcal{E}(X)$. Com abuso de notação, podemos dizer então que $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$.

Por outro lado, dado $\mathbf{u} \in \mathcal{E}(X)$ com $[\bar{\mathbf{u}}]^\alpha \subset Y \subset X$, podemos definir $\bar{\mathbf{u}} \in \mathcal{E}(X)$ com função de pertinência $\mu_{\bar{\mathbf{u}}} = \mu_{\mathbf{u}}$ para todo $x \in Y$. Como anteriormente, vamos ter $[\bar{\mathbf{u}}]^\alpha = [\mathbf{u}]^\alpha$ e novamente podemos dizer que $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$.

Representaremos os subconjuntos clássicos do conjunto $\mathcal{E}(X)$ por letras maiúsculas em negrito. Por exemplo, dado $Y \subset X$, denotaremos por $\mathbf{Y} \subset \mathcal{E}(X)$ o subconjunto composto pelos elementos de $\mathcal{E}(X)$ cujos α -níveis são subconjuntos de Y . Ou seja,

$$\mathbf{Y} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{E}(X) : [\mathbf{u}]^\alpha \subset Y \subset X \text{ para todo } \alpha \in [0, 1]\}.$$

Para as aplicações de conjuntos fuzzy que apresentamos nas seções subsequentes é necessário estabelecermos uma estrutura de espaços métricos em $\mathcal{E}(X)$. Neste sentido, [Cecconello \(2010\)](#) define uma métrica sobre $\mathcal{E}(X)$ através da *métrica de Hausdorff* para subconjuntos compactos de X . Em [Diamond e Kloeden \(1994\)](#) são discutidas algumas propriedades dos espaços $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ para distintas métricas, em particular, para métricas definidas a partir da *métrica de Hausdorff*. Assim, utilizaremos tais conceitos para definir a métrica que denominamos por d_∞ que será utilizada para determinar os conceitos de estabilidade fuzzy a partir das definições de estabilidade clássica.

Seja $\mathcal{K}(X)$ o conjunto formado pelos subconjuntos compactos não vazios do espaço métrico (X, d) . Dados dois conjuntos A, B em $\mathcal{K}(X)$ a distância entre eles pode ser definida por:

$$\text{dist}(A, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b)$$

Do modo como foi definida, a distância entre conjuntos acima é uma *pseudométrica* ([KREYSZIG, 1978](#)) para $\mathcal{K}(X)$, visto que $\text{dist}(A, B) = 0$ se, e somente se, $A \subseteq B$, sendo que, a igualdade não necessariamente é válida. Entretanto, a *distância de Hausdorff* entre $A, B \in \mathcal{K}(X)$ definida por

$$\begin{aligned} d_H(A, B) &= \max\{\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} d(a, b)\} \\ &= \max\{\text{dist}(A, B), \text{dist}(B, A)\} \end{aligned}$$

é uma métrica para o conjunto $\mathcal{K}(X)$, de maneira que $(\mathcal{K}(X), d_H)$ é um espaço métrico. Vale ainda que se (X, d) é um espaço métrico completo, então $(\mathcal{K}(X), d_H)$ é também um espaço métrico completo (ALIPRANTIS; BORDER, 2005).

A partir da *métrica de Hausdorff* d_H , podemos definir uma métrica para o conjunto $\mathcal{E}(X)$, que será denotada por d_∞ . Dados dois pontos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{E}(X)$ a distância entre \mathbf{u} e \mathbf{v} é definida por

$$d_\infty(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sup_{\alpha \in [0,1]} d_H([\mathbf{u}]^\alpha, [\mathbf{v}]^\alpha).$$

Fácilmente é possível verificar que a distância definida acima satisfaz as propriedades de uma métrica e conseqüentemente, $(\mathcal{E}(X), d_\infty)$ é um espaço métrico.

Dado um conjunto $Y \subset X$, consideremos os conjuntos

$$\mathbf{Y} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(X) : [\mathbf{x}]^0 \subset Y\}$$

e $\mathcal{E}(Y)$. Basicamente, os elementos de \mathbf{Y} e $\mathcal{E}(Y)$ se diferenciam apenas pelo domínio da função de pertinência. Sejam d_∞^1 a restrição da métrica d_∞ ao conjunto $\mathbf{Y} \subset \mathcal{E}(X)$ e d_∞^2 definida como acima para o $\mathcal{E}(Y)$. [Cecconello \(2010\)](#) demonstra que os espaços métricos (\mathbf{Y}, d_∞^1) e $(\mathcal{E}(Y), d_\infty^2)$ são isométricos. Além disso, mostra que o espaço métrico $(\mathcal{E}(X), d_\infty)$ apresenta a importante propriedade de ser completo quando (X, d) é completo.

Para finalizar esta seção, apresentamos algumas propriedades das funções obtidas por meio do Princípio da Extensão de Zadeh aplicado em funções definidas sobre espaços de *Hausdorff*. Como veremos, as extensões sobre esses espaços compartilham propriedades similares às extensões de funções definidas sobre \mathbb{R}^n . Os resultados aqui expostos foram apresentadas por [Cecconello \(2010\)](#) e serão úteis para verificarmos sob que circunstâncias a continuidade da aplicação $\hat{\varphi}_t$ é garantida. Ressaltamos que suas demonstrações serão omitidas neste trabalho, mas podem ser encontradas em [Cecconello \(2010\)](#).

Teorema 4.19 ([CECCONELLO, 2010](#)) *Sejam X e Y espaços de Hausdorff. Se $f : X \rightarrow Y$ é contínua, então a extensão de Zadeh $\hat{f} : \mathcal{E}(X) \rightarrow \mathcal{E}(Y)$ está bem definida e vale*

$$[\hat{f}(\mathbf{u})]^\alpha = f([\mathbf{u}]^\alpha)$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$ e $\mathbf{u} \in \mathcal{E}(X)$.

Em vários casos não podemos garantir que a aplicação $f : X \rightarrow Y$ seja contínua em todo o domínio X , mas apenas em um subconjunto $A \subset X$. Para estes casos, apresentamos o seguinte resultado:

Proposição 4.20 (CECCONELLO, 2010) *Suponha que $f : X \rightarrow Y$ seja contínua em $A \subset X$. Se $\mathbf{u} \in \mathcal{E}(X)$ é tal que $[\mathbf{u}]^\alpha \subset A$, então $[\hat{f}(\mathbf{u})]^\alpha = f([\mathbf{u}]^\alpha)$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.*

Barros et al. (1997) mostra que algumas propriedades da aplicação $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ são preservadas pelo princípio da extensão de Zadeh. Uma das mais importantes propriedades mantida após a extensão é a continuidade. Ou seja, se f é uma função contínua então a aplicação \hat{f} consequentemente também é contínua. Como veremos mais a frente, a extensão de Zadeh \hat{f} de uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ também é contínua quando X é um espaço métrico localmente compacto. Os próximos lemas (4.21 e 4.22) serão úteis na demonstração desta afirmação apresentada na Proposição 4.23.

Lema 4.21 (CECCONELLO, 2010) *Sejam $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua e $C \in \mathcal{K}(X)$. A aplicação $\tilde{f} : \mathcal{K}(C) \rightarrow \mathcal{K}(Y)$ definida por $\tilde{f}(A) = \{f(a) : a \in A, A \in \mathcal{K}(C)\}$ é uniformemente contínua na métrica de Hausdorff.*

Lema 4.22 (CECCONELLO, 2010) *Seja X um espaço métrico localmente compacto. Se $\{\mathbf{u}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência convergente em $\mathcal{E}(X)$ então existe $K \in \mathcal{K}(X)$ tal que*

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\mathbf{u}_n]^0 \subseteq K$$

para algum $N \in \mathbb{N}$.

A seguir, apresentamos um resultado de grande relevância que garante a continuidade da extensão de zadeh $\hat{f} : \mathcal{E}(X) \rightarrow \mathcal{E}(Y)$ dado que a aplicação $f : X \rightarrow Y$ é contínua, sendo que a recíproca também é verdadeira.

Proposição 4.23 (CECCONELLO, 2010) *Sejam (X, d) e (Y, \tilde{d}) espaços métricos e X localmente compacto. Então $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação contínua, se e somente se a extensão de Zadeh $\hat{f} : \mathcal{E}(X) \rightarrow \mathcal{E}(Y)$ também é contínua.*

Demonstração: (\Rightarrow) Seja $\{\mathbf{u}_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}(X)$ uma sequência convergente para \mathbf{u} . Mostraremos que $\hat{f}(\mathbf{u}_k) \rightarrow \hat{f}(\mathbf{u})$ quando $k \rightarrow +\infty$.

Pelo Lema (4.22) podemos escolher um compacto $C \subset X$ tal que

$$\bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\mathbf{u}_p] \subseteq C.$$

Agora, o lema (4.21) garante que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta_\epsilon > 0$ tal que para $A, B \in \mathcal{K}(C)$ temos

$$d_H(A, B) < \delta_\epsilon \Rightarrow \tilde{d}_H(f(A), f(B)) < \epsilon. \quad (4.2)$$

Desde que \mathbf{u}_k converge para \mathbf{u} na métrica d_∞ , então existe $K_\delta \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k > K_\delta$ vale

$$d_\infty(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}) = \sup_{\alpha \in [0,1]} d_H([\mathbf{u}_k]^\alpha, [\mathbf{u}]^\alpha) < \delta_\epsilon.$$

Portanto, para todo $\alpha \in [0, 1]$ e $k > K_\delta$, temos por (4.2) que

$$d_H([\mathbf{u}_k]^\alpha, [\mathbf{u}]^\alpha) < \delta_\epsilon \Rightarrow \tilde{d}_H(f([\mathbf{u}_k]^\alpha), f([\mathbf{u}]^\alpha)) < \epsilon,$$

Como $[\mathbf{u}_k]$ e $[\mathbf{u}]$ estão contidos em $\mathcal{K}(C)$ pelo Lema (4.22). Logo pela Proposição 2.7

$$\begin{aligned} \tilde{d}_\infty(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}) &= \sup_{\alpha \in [0,1]} \tilde{d}_H([f(\mathbf{u}_k)]^\alpha, [f(\mathbf{u})]^\alpha) \\ &= \sup_{\alpha \in [0,1]} \tilde{d}_H(f([\mathbf{u}_k]^\alpha), f([\mathbf{u}]^\alpha)) \leq \epsilon, \end{aligned}$$

de onde podemos concluir que \hat{f} é contínua.

(\Leftarrow) Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{E}(X)$ temos

$$d_\infty(\mathbf{u}, \mathbf{v}) < \delta \Rightarrow \tilde{d}_\infty(\hat{f}(\mathbf{u}), \hat{f}(\mathbf{v})) < \epsilon.$$

Tomemos $x, y \in X$ tal que $d(x, y) < \delta$. Então $\chi_{\{x\}}, \chi_{\{y\}} \in \mathcal{E}(X)$ e portanto

$$d_\infty(\chi_{\{x\}}, \chi_{\{y\}}) = d(x, y) < \delta.$$

Logo, podemos concluir que

$$\tilde{d}(f(x), f(y)) = \tilde{d}_\infty(\hat{f}(\chi_{\{x\}}), \hat{f}(\chi_{\{y\}})) < \epsilon,$$

O que prova a continuidade de f . ■

4.8 Conclusão

Foi apresentado neste capítulo as principais definições e resultados a cerca da teoria dos subconjuntos fuzzy, que posteriormente serão utilizados neste trabalho.

Primeiramente, apresentamos os conceitos básicos sobre subconjuntos fuzzy com destaque para o α -nível de um conjunto fuzzy e o princípio de extensão de Zadeh que são fundamentais para efetuar a transição entre conceitos da teoria clássica de conjuntos e a teoria de conjuntos fuzzy.

Posteriormente, analisamos apenas os subconjuntos fuzzy de um conjunto X cujos α -níveis são subconjuntos compactos e não vazios em X , através do subespaço $\mathcal{E}(X)$. Além disso, definimos a métrica d_∞ a partir da *métrica de Hausdorff*, construindo uma estrutura de espaço métrico sobre $\mathcal{E}(X)$.

Ao final, apresentamos algumas propriedades das funções obtidas por meio do Princípio da Extensão de Zadeh aplicado em funções definidas sobre espaços de Hausdorff e vários resultados que serão de extrema importância para os próximos capítulos.

5 Pontos de equilíbrio e estabilidade Fuzzy

Neste capítulo, buscamos desenvolver ferramentas de análise qualitativa para o fluxo fuzzy, obtido por meio de extensão de Zadeh aplicada sobre a condição inicial do fluxo determinístico, gerado por uma equação diferencial autônoma.

Além disso, trazemos importantes resultados desenvolvidos por Mizukoshi (2004), que em seu trabalho, investigou algumas propriedades do fluxo fuzzy gerado por uma solução determinística. Mizukoshi (2004) mostrou que os pontos de equilíbrio determinísticos determinam pontos de equilíbrio crisp para o fluxo fuzzy e também que a estabilidade de um ponto de equilíbrio determinístico coincide com a estabilidade de um ponto de equilíbrio crisp.

5.1 Fluxos sobre o espaço $\mathcal{E}(U)$

Conforme apresentado no Capítulo 2, uma família de aplicações $\varphi_t : X \rightarrow X$, $t \in \mathbb{R}_+$, definida sobre um espaço métrico X onde φ_0 é a identidade e $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$, para todo $t, s \in \mathbb{R}_+$, é denominado um *sistema dinâmico (fluxo ou semifluxo)* sobre o espaço métrico X .

Já no Capítulo 4, definimos o conjunto $\mathcal{E}(X)$, formado pelos subconjuntos fuzzy de X com suporte compacto, e vimos que este conjunto juntamente com a métrica d_∞ induzida através da métrica de Hausdorff sobre os conjuntos compactos de X , define um espaço métrico. Denominaremos por *sistema dinâmico fuzzy*, ou *fluxo fuzzy*, os sistemas dinâmicos definidos sobre o espaço $\mathcal{E}(U)$.

Definição 5.1 Seja $\hat{\varphi}_t : \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{E}(U)$, $t \in \mathbb{R}_+$, uma família de aplicações contínuas. Se

$$a) \hat{\varphi}_0 = I_0;$$

$$b) \hat{\varphi}_t \circ \hat{\varphi}_s = \hat{\varphi}_{t+s}, \text{ para todo } t, s \in \mathbb{R}_+,$$

então dizemos que a família de aplicações $\hat{\varphi}_t$ é um sistema dinâmico fuzzy (ou fluxo fuzzy).

Desenvolvemos neste capítulo métodos de análise qualitativa para os fluxos fuzzy definidos sobre o espaço $\mathcal{E}(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$. De maneira mais rigorosa, consideramos neste momento uma classe específicas de fluxos fuzzy que são obtidos por meio do princípio da extensão de Zadeh de soluções determinísticas de equações diferenciais autônomas.

Considere o problema de valor inicial determinístico autônomo apresentado no Capítulo 2

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (5.1)$$

onde $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua e $x_0 \in U$.

Agora, considerando incerteza na condição inicial da Equação (5.2), temos o Problema de Valor Inicial Fuzzy (PVIF) dado por

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) \\ x(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (5.2)$$

onde $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}(U)$.

Definição 5.2 *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $x_0 \in U$. Dizemos que $\hat{\varphi}_t : \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{E}(U)$, $t \in \mathbb{R}_+$, é uma solução fuzzy para a Equação (5.2) quando $\hat{\varphi}_t(\chi_{\{x_0\}}) = \chi_{\{\varphi_t(x_0)\}}$, onde $\varphi_t : U \rightarrow U$ é a solução da Equação 5.1.*

Seja então $\varphi_t : U \rightarrow U$ o fluxo gerado pela Equação (5.2) e consideremos a aplicação $\hat{\varphi}_t : \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{E}(U)$, obtida pela extensão de Zadeh de φ_t . Pretendemos desenvolver uma análise assintótica da solução fuzzy e por isso, consideramos aqui apenas as equações cujas soluções $\varphi_t : U \rightarrow U$ estejam definidas para todo $t \geq 0$ (ou $t \in \mathbb{R}$). A continuidade da aplicação $\hat{\varphi}_t : \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{E}(U)$, com relação a condição inicial \mathbf{x}_0 , é garantida pela Proposição 4.23.

Mizukoshi (2004) e Mizukoshi et al. (2009) determinam algumas propriedades da extensão de Zadeh do fluxo determinístico, gerado por uma equação autônoma. Em um desses importantes resultados, Mizukoshi (2004) demonstra que a família de aplicações $\hat{\varphi}_t : \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{E}(U)$, $t \in \mathbb{R}_+$, é um sistema dinâmico sobre $\mathcal{E}(U)$, através da seguinte proposição:

Proposição 5.3 *Seja $\varphi_t : U \rightarrow U$ o fluxo determinístico gerado pela Equação (5.2). Então a aplicação $\hat{\varphi}_t : \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{E}(U)$ satisfaz as seguintes propriedades:*

- a) $\hat{\varphi}_0(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$;
- b) $\hat{\varphi}_t \circ \hat{\varphi}_s(\mathbf{x}_0) = \hat{\varphi}_{t+s}(\mathbf{x}_0)$, para todo $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}(U)$ e $t, s \in \mathbb{R}_+$.

Conforme a Definição (5.2), por satisfazer tais condições, a extensão de Zadeh $\hat{\varphi}_t : \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{E}(U)$ de um fluxo determinístico $\varphi_t : U \rightarrow U$ é uma *solução fuzzy*.

Deste ponto em diante, quando nos referirmos aos termos *solução fuzzy* ou *fluxo fuzzy*, subentende-se a existência de uma solução (ou fluxo) determinística(o), gerado por uma equação diferencial autônoma determinística, em que foi aplicada a extensão de Zadeh.

5.2 Pontos de equilíbrio Fuzzy

De maneira análoga ao estabelecido na teoria clássica, podemos caracterizar um ponto de equilíbrio para $\hat{\varphi}_t$ como sendo um *ponto invariante pelo fluxo fuzzy*. Denominaremos os pontos de equilíbrio para o fluxo fuzzy por *pontos de equilíbrio fuzzy*.

Definição 5.4 Dizemos que $x_e \in \mathcal{E}(U)$ é um ponto de equilíbrio fuzzy $\hat{\varphi}_t$ quando

$$\hat{\varphi}_t(x_e) = x_e$$

para todo $t \geq 0$.

É possível caracterizar um *ponto de equilíbrio fuzzy* através dos seus α -níveis. Se x_e é um ponto de equilíbrio fuzzy então é válida a seguinte igualdade

$$[\hat{\varphi}_t(x_e)]^\alpha = \varphi_t([x_e]^\alpha) = [x_e]^\alpha$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$ e $t \in \mathbb{R}_+$.

Mizukoshi (2004) ao tentar caracterizar pontos de equilíbrio fuzzy, encontrou a seguinte equivalência:

Proposição 5.5¹ Seja $x_e \in U$. Então x_e é um ponto de equilíbrio para φ_t se, e somente se, $\chi_{\{x_e\}}$ é um ponto de equilíbrio para $\hat{\varphi}_t$.

Demonstração: Sejam $\hat{\varphi}_t : \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{E}(U)$ a extensão de Zadeh de $\varphi_t : U \rightarrow U$ do fluxo associado ao Sistema (5.2) e x_e ponto de equilíbrio de φ_t . Temos que,

$$\hat{\varphi}_t(\chi_{\{x_e\}})(y) = \sup_{\tau \in \varphi_t^{-1}(y)} \chi_{\{x_e\}} = \chi_{\{\varphi_t(x_e)\}} = \chi_{\{x_e\}},$$

isto é, $\chi_{\{x_e\}}$ é ponto de equilíbrio para $\hat{\varphi}_t$.

Reciprocamente, se $\chi_{\{x_e\}}$ é ponto de equilíbrio fuzzy para o fluxo $\hat{\varphi}_t$, então temos que

¹Demonstração adaptada de Mizukoshi (2004)

$$\varphi_t(\chi_{\{x_e\}}) = \chi_{\{x_e\}},$$

ou equivalentemente,

$$[\varphi_t(\chi_{\{x_e\}})]^\alpha = [\chi_{\{x_e\}}]^\alpha \Leftrightarrow \varphi_t([\chi_{\{x_e\}}]^\alpha) = x_e, \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Logo,

$$\varphi_t(x_e) = x_e.$$

Portanto, x_e é ponto de equilíbrio para o fluxo φ_t . ■

Do mesmo modo ao caso determinístico, nos interessamos por estudar o comportamento do *fluxo fuzzy* quando a condição inicial está próxima de um ponto de equilíbrio. Entretanto, para realizarmos tal estudo, precisamos estabelecer a definição do conceito de estabilidade para pontos de equilíbrio em $\mathcal{E}(U)$.

Definição 5.6 *Um ponto de equilíbrio $x_e \in \mathcal{E}(U)$ é estável se dado $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que para todo $x_0 \in \mathcal{E}(U)$ com $d_\infty(x_0, x_e) < \delta$ temos $d_\infty(\hat{\varphi}_t(x_0), x_e) < \epsilon$, para todo $t \geq 0$. Se além disso existe $r > 0$ tal que para todo $x_0 \in \mathcal{E}(U)$ satisfazendo $d_\infty(x_0, x_e) < r$ temos que $d_\infty(\hat{\varphi}_t(x_0), x_e) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$, então x_e é assintoticamente estável.*

O ponto de equilíbrio fuzzy é instável quando não é estável fuzzy.

A estabilidade dos pontos de equilíbrio para o fluxo fuzzy cuja função de pertinência são funções características dos pontos de equilíbrio de (5.2), como caracterizados na proposição anterior, também foram estabelecidos por Mizukoshi (2004).

Proposição 5.7 *Sejam $x_e \in U$ um ponto de equilíbrio para (5.2) e $\hat{\varphi}_t$ o fluxo fuzzy associado ao fluxo determinístico φ_t . Então são válidas as seguintes afirmações:*

- (a) x_e é estável para φ_t se, e somente se, $\chi_{\{x_e\}}$ é estável para $\hat{\varphi}_t$;
- (b) x_e é assintoticamente estável para φ_t se, e somente se, $\chi_{\{x_e\}}$ é estável para $\hat{\varphi}_t$.

Como explanado no Capítulo 1, a extensão de Zadeh de um fluxo determinístico pode apresentar pontos de equilíbrio com função de pertinência assumindo valores em todo intervalo $[0, 1]$, ao invés de apenas funções características como garantidas pela Proposição 5.7.

No Exemplo 5.8 abaixo analisamos um modelo para transmissão de doenças infecciosas para evidenciar a ocorrência de tais pontos de equilíbrio.

Exemplo 5.8 (Modelo SI)². O mais simples modelo que explica o comportamento de doenças infecciosas causadas por vírus ou bactérias é dado pelo seguinte sistema de equações (Bassanezi e Ferreira Jr, 1988):

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -rSI, & S(0) = S_0 > 0, \\ \frac{dI}{dt} = rSI, & I(0) = I_0 > 0. \end{cases} \quad (5.3)$$

Na Equação (5.3) acima, r é uma constante positiva, $S(t)$ é a variável que representa a quantidade de indivíduos suscetíveis à doença e $I(t)$ é a quantidade de indivíduos infecciosos. Desde que

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} = 0,$$

então não há variação da população e, conseqüentemente, temos que $I(t) + S(t) = I_0 + S_0 = N_0$.

O fluxo determinístico $\varphi_t = (\varphi_t^{(1)}, \varphi_t^{(2)})$ gerado por este modelo é dado pelas funções:

$$\begin{cases} S(t) = \varphi_t^{(1)}(S_0, I_0) = N_0 \left(1 - \frac{I_0}{I_0 + S_0 e^{N_0 r t}} \right); \\ I(t) = \varphi_t^{(2)}(S_0, I_0) = \frac{N_0 I_0}{I_0 + S_0 e^{N_0 r t}}. \end{cases}$$

O Sistema (5.3) está em equilíbrio quando $I = 0$ ou $S = 0$. Como estamos supondo condições iniciais não nulas e $S(t)$ decrescente, então o fluxo determinístico $\varphi_t(S_0, I_0)$ gerado pela solução de (5.3) converge para o ponto de equilíbrio $x_e = (0, I_0 + S_0)$ quando $t \rightarrow +\infty$. Vale ressaltar que o ponto de equilíbrio depende da escolha das condições iniciais para infecciosos e suscetíveis. Isto é, o ponto de equilíbrio pode ser visto como uma função das condições iniciais $x_e : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$, que para cada $(S_0, I_0) \in \mathbb{R}_+^2$ associa o valor

$$x_e(S_0, I_0) = (0, I_0 + S_0)$$

Como $S(t)$ e $I(t)$ são monótonas, a Proposição 1.19 apresentada por [Cecconello \(2010\)](#) garante que dado $\epsilon > 0$, existe $T > 0$ tal que

$$\|\varphi_t(S_0, I_0) - x_e(S_0, I_0)\| < \epsilon,$$

²Exemplo retirado do trabalho de [Cecconello \(2010\)](#).

para todo $t > T$ e (S_0, I_0) em um conjunto compacto K .

Supondo que a condição inicial (S_0, I_0) é fuzzy, então devemos considerar o fluxo fuzzy $\varphi_t : \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^2) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^2)$ determinado a partir da solução determinística $\varphi_t(S_0, I_0)$. Dada uma condição inicial $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^2)$, os α -níveis de $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)$ são os conjuntos

$$[\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)]^\alpha = \hat{\varphi}_t([\mathbf{x}_0]^\alpha) = \{\varphi_t(S_0, I_0) : (S_0, I_0) \in [\mathbf{x}_0]^\alpha\}$$

.

Como $[\mathbf{x}_0]^0$ é um conjunto compacto, dado $\epsilon > 0$ podemos escolher $T > 0$ tal que

$$\|\varphi_t(S_0, I_0) - x_e(S_0, I_0)\| < \epsilon,$$

para todo $t > T$ e $(S_0, I_0) \in [\mathbf{x}_0]^0$. Assim, definindo o conjunto

$$A_\alpha = \{x_e(S_0, I_0) : (S_0, I_0) \in [\mathbf{x}_0]^\alpha\}$$

e escrevendo $y = (S, I)$, temos que:

$$\begin{aligned} \text{dist}(\hat{\varphi}_t([\mathbf{x}_0]^\alpha), A_\alpha) &= \sup_{y_1 \in [\mathbf{x}_0]^\alpha} \inf_{y_2 \in [\mathbf{x}_0]^\alpha} \|\varphi_t(y_1) - x_e(y_2)\| \\ &= \leq \sup_{y_1 \in [\mathbf{x}_0]^\alpha} \|\varphi_t(y_1) - x_e(y_1)\| \leq \epsilon, \end{aligned}$$

para todo $t > T$. De modo análogo podemos mostrar que $\text{dist}(A_\alpha, \hat{\varphi}_t([\mathbf{x}_0]^\alpha)) \leq \epsilon$ de modo que $d_H(\hat{\varphi}_t([\mathbf{x}_0]^\alpha), A_\alpha) \leq \epsilon$ para todo $\alpha \in [0, 1]$ e $t > T$. Desde que $x_e(S_0, I_0)$ é uma função contínua, então a imagem $\mathbf{x}_e = \hat{x}_e(\mathbf{x}_0)$ pela extensão de Zadeh $\hat{x}_e : \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^2) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^2)$ é tal que

$$[\mathbf{x}_e]^\alpha = x_e([\mathbf{x}_0]^\alpha) = \{x_e(S_0, I_0) : (S_0, I_0) \in [\mathbf{x}_0]^\alpha\} = A_\alpha,$$

de onde podemos concluir que

$$d_\infty(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_e) = \sup_{\alpha \in [0, 1]} d_H([\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)]^\alpha, [\mathbf{x}_e]^\alpha) \leq \epsilon,$$

para todo $t > T$. Logo, uma vez que $\hat{\varphi}_t$ é um fluxo sobre o espaço métrico $(\mathcal{E}(\mathbb{R}_+^2), d_\infty)$, a Proposição 1.23 apresentada por [Cecconello \(2010\)](#) garante que \mathbf{x}_e é invariante. Portanto, $\mathbf{x}_e = \hat{x}_e(\mathbf{x}_0)$ é um ponto de equilíbrio para $\hat{\varphi}_t$.

Para um ponto qualquer $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^2)$ o ponto de equilíbrio fuzzy $\mathbf{x}_e = \hat{x}_e(\mathbf{x}_0)$ tem função de pertinência dada por:

$$\mu_{\mathbf{x}_e}(S, I) = \begin{cases} \sup_{S_0} \mu_{\mathbf{x}_0}(S_0, I - S_0), & \text{se } S = 0, \\ 0, & \text{se } S \neq 0. \end{cases}$$

Na Figura 16 temos a representação gráfica da solução $\varphi_t(x_0)$ para alguns valores de t . A condição inicial para esta figura é dada pela função de pertinência:

$$\mu_{x_0}(S_0, I_0) = \max\{1 - 0.01(S_0 - 80)^2 - 0.25(I_0 - 5)^2, 0\}.$$

Para esta condição inicial, o ponto de equilíbrio fuzzy tem função de pertinência:

$$\begin{aligned} \mu_{x_e}(S, I) &= \min\{\chi_{\{0\}}(S), \sup_{S_0} \mu_{x_0}(S_0, I - S_0)\} \\ &= \min\{\chi_{\{0\}}(S), \mu_{x_0}(\bar{S}, I - \bar{S})\}, \end{aligned}$$

com

$$\bar{S} = \frac{I - 4.68}{1.004}.$$

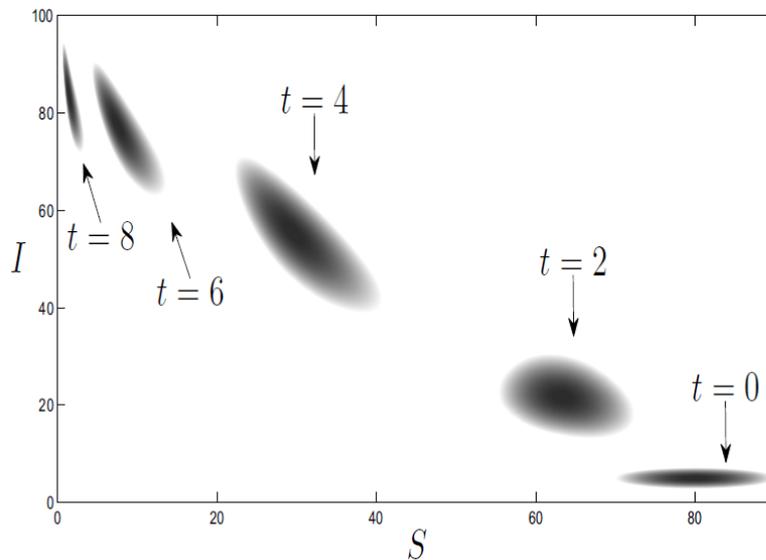


Figura 16 – $\hat{\varphi}_t(x_0)$ para diferentes valores de tempo

Fonte: [Cecconello \(2010\)](#)

Neste exemplo, vimos a convergência da solução para um ponto de equilíbrio fuzzy que não é função característica de nenhum subconjunto de \mathbb{R}^2 . Como podemos então caracterizar tais pontos de equilíbrio de modo que a análise qualitativa se torne mais abrangente, incluindo pontos de equilíbrio fuzzy cuja função de pertinência não é a função característica de subconjuntos do espaço de fase? A resposta para tal questão é dada pelo Teorema 5.9 a seguir.

Destacamos aqui três importantes características do exemplo anterior. Primeiramente, é possível observar que o ponto de equilíbrio para o qual a solução do Sistema de Equações (5.2) converge, depende da condição inicial escolhida. Para evidenciar este aspecto, definimos o ponto de equilíbrio através de uma função que possui como entradas os valores S_0 e I_0 . Isto é, $x_e : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ é uma função que para cada $(S_0, I_0) \in \mathbb{R}_+^2$ associa

o ponto de equilíbrio $x_e(S_0, I_0)$. Outra importante característica a se destacar, é que o fluxo determinístico $\varphi_t : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ converge de maneira uniforme para $x_e : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ em subconjuntos compactos contido em \mathbb{R}_+ . Por fim, o último aspecto relevante é que como $x_e(S_0, I_0)$ é uma função contínua, então o ponto de equilíbrio fuzzy para o qual o fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t : \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^2) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^2)$ converge, é determinado pela extensão de Zadeh $\hat{x}_e : \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^2) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^2)$ da aplicação $x_e(S_0, I_0)$.

De modo geral, se o fluxo determinístico apresentar as três características descritas acima então podemos mostrar a existência de pontos de equilíbrio fuzzy não crisp. No Teorema 5.9 seguinte, por convergência uniforme queremos dizer que: o fluxo determinístico $\varphi_t : U \rightarrow U$ converge uniformemente, em $K \subset A$, para $x_e : A \rightarrow U$ quando, para todo $\epsilon > 0$, existe $T > 0$ tal que

$$\|\varphi_t(x_0) - x_e(x_0)\| < \epsilon,$$

para todo $t > T$ e $x_0 \in K$.

O próximo resultado apresentado por [Cecconello \(2010\)](#) será extremamente importante para encontrarmos uma estimativa para região de estabilidade fuzzy no capítulo seguinte.

Teorema 5.9 *Sejam $x_e : A \rightarrow U$ contínua, $A \subseteq U$, $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}(U)$ com $[\mathbf{x}_0]^0 \subset A$ e $\mathbf{x}_e = \hat{x}_e(\mathbf{x}_0)$. Sob essas condições temos:*

- (a) *Se $\varphi_t(x_e(x)) = x_e(x)$ para todo $x \in A$ então $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_e) = \mathbf{x}_e$ para todo $t \geq 0$;*
- (b) *Se $\varphi_t : U \rightarrow U$ converge uniformemente, em $[\mathbf{x}_0]^0 \subset A$, para $x_e : A \rightarrow U$ quando $t \rightarrow +\infty$, então $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)$ converge para \mathbf{x}_e e $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_e) = \mathbf{x}_e$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$.*

Demonstração:

- (a) Desde que $x_e : A \rightarrow U$, a extensão de Zadeh \hat{x}_e tem como domínio o conjunto $\mathcal{E}(A)$. Portanto, estamos cometendo um abuso de notação ao definirmos $\mathbf{x}_e = \hat{x}_e(\mathbf{x}_0)$. Na verdade, $\mathbf{x}_e = \hat{x}_e(\mathbf{y}_0)$ onde $\mathbf{y}_0 \in \mathcal{E}(A)$ com $[\mathbf{y}_0]^\alpha = [\mathbf{x}_0]^\alpha$, para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Desde que x_e é contínua em A e temos $[\mathbf{x}_0]^0 \subset A$ então vale que:

$$[\mathbf{x}_e]^\alpha = [\hat{x}_e(\mathbf{y}_0)]^\alpha = x_e([\mathbf{y}_0]^\alpha) = x_e([\mathbf{x}_0]^\alpha).$$

O primeiro item é imediato, uma vez que

$$[\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_e)]^\alpha = \varphi_t([\mathbf{x}_e]^\alpha) = \{\varphi_t(x_e(x)) : x \in [\mathbf{x}_0]^\alpha\}.$$

Por hipótese, temos que $\varphi_t(x_e(x)) = x_e(x)$ para todo $x \in A$. Assim,

$$[\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_e)]^\alpha = \{x_e(x) : x \in [\mathbf{x}_0]^\alpha\} = x_e([\mathbf{x}_0]) = [\mathbf{x}_e]^\alpha,$$

o que prova a afirmação.

- (b) Para provar o segundo item, precisamos mostrar que $d_\infty(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_e) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$.

Seja $\alpha \in [0, 1]$. Sob a hipótese da convergência uniforme, dado $\epsilon > 0$ existe $T > 0$ tal que $\|\varphi_t(x) - x_e(x)\| \leq \epsilon$ para todo $t > T$ e $x \in A$. Desta forma temos,

$$\begin{aligned} \text{dist}([\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)]^\alpha, [\mathbf{x}_e]^\alpha) &= \sup_{a \in [\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)]^\alpha} \inf_{b \in [\hat{x}_e(\mathbf{x}_0)]^\alpha} \|a - b\| \\ &= \sup_{a \in \varphi_t([\mathbf{x}_0]^\alpha)} \inf_{b \in x_e([\mathbf{x}_0]^\alpha)} \|a - b\| \\ &= \sup_{x \in [\mathbf{x}_0]^\alpha} \inf_{y \in [\mathbf{x}_0]^\alpha} \|\varphi_t(x) - x_e(y)\| \\ &\leq \sup_{x \in [\mathbf{x}_0]^\alpha} \|\varphi_t(x) - x_e(x)\| \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

Por outro lado, vale também que

$$\begin{aligned} \text{dist}([\mathbf{x}_e]^\alpha, [\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)]^\alpha) &= \sup_{a \in [\hat{x}_e(\mathbf{x}_0)]^\alpha} \inf_{b \in [\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)]^\alpha} \|a - b\| \\ &= \sup_{x \in [\mathbf{x}_0]^\alpha} \inf_{y \in [\mathbf{x}_0]^\alpha} \|\varphi_t(y) - x_e(x)\| \\ &\leq \sup_{x \in [\mathbf{x}_0]^\alpha} \|\varphi_t(x) - x_e(x)\| \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

Portanto, $d_H([\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)]^\alpha, [\mathbf{x}_e]^\alpha) \leq \epsilon$, e assim concluímos que $d_\infty(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_e) \leq \epsilon$ para todo $t > T$.

Logo, $d_\infty(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_e) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$, o que garante que $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)$ converge para \mathbf{x}_e . Como $\hat{\varphi}_t$ é um fluxo definido sobre o espaço métrico $\mathcal{E}(U)$, a Proposição 1.23 apresentada por [Cecconello \(2010\)](#) garante que \mathbf{x}_e é um ponto de equilíbrio. ■

Em outras palavras, o teorema que acabamos de demonstrar afirma que se a solução determinística $\varphi_t(x_0)$ converge uniformemente para a função $x_e(x_0)$, então a extensão de Zadeh $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)$ converge para a extensão de Zadeh $\hat{x}_e(\mathbf{x}_0)$. Isto é,

$$\varphi_t(x_0) \xrightarrow{u} x_e(x_0), \quad x_0 \in A \Rightarrow \hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0) \rightarrow \hat{x}_e(\mathbf{x}_0), \quad [\mathbf{x}_0]^0 \subset A,$$

onde a notação \xrightarrow{u} indica a convergência uniforme em A de $\varphi_t : U \rightarrow U$ para $x_e : A \rightarrow U$.

Exemplo 5.10 ³ Consideramos novamente o modelo *SI* apresentado no Exemplo 5.8.

Podemos supor que a quantidade total de indivíduos seja conhecida. Seja N esta quantidade de indivíduos. Neste caso, a condição inicial fuzzy não pode ser tomada arbitrariamente, pois existe uma restrição do número total de indivíduos. Assim, devemos tomar apenas condições iniciais fuzzy cuja soma de suscetíveis e infectados seja N . Equivalentemente, as condições fuzzy devem estar sobre o segmento de reta que liga os pontos $(0, N)$ e $(N, 0)$.

Uma vez que a solução determinística $\varphi_t(S_0, I_0)$ converge uniformemente para o ponto de equilíbrio $x_e(S_0, I_0) = (0, S_0 + I_0)$, então, de acordo com o item (b) do teorema anterior, a solução fuzzy converge para a extensão de Zadeh de $x_e(S_0, I_0)$. Se a condição inicial fuzzy $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^2)$ é correlacionada, então $S_0 + I_0 = N$ para todo $(S_0, I_0) \in [\mathbf{x}_0]^\alpha$ de modo que

$$\mathbf{x}_e = \hat{x}_e(\mathbf{x}_0) = \chi_{\{(0, N)\}}$$

é o ponto de equilíbrio fuzzy para o qual a solução fuzzy $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)$ converge quando $t \rightarrow +\infty$.

Em certas aplicações, a função $x_e : A \rightarrow U$ pode não ser contínua em todos os pontos de A . Neste caso, de acordo com a Proposição 4.20, a afirmação acima continua válida quando $[\mathbf{x}_0]^\alpha$ está contido em algum subconjunto em que x_e seja contínua. No caso de x_e não ser contínua em algum ponto de $[\mathbf{x}_0]^0$, então a convergência uniforme exigida no item (b) do Teorema 5.9 não ocorre, e portanto a convergência do fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t$ para o ponto de equilíbrio pode não ocorrer. O Exemplo apresentado a seguir tem o objetivo de ilustrar a ocorrência deste fato.

Exemplo 5.11 ⁴

$$\frac{dx}{dt} = rx(k - x)$$

determina o fluxo unidimensional $\varphi_t : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ dado por

$$\varphi_t(x_0) = \frac{kx_0}{x_0 + (k - x_0)e^{-rt}},$$

cujos pontos de equilíbrio são $x_e = k > 0$ e $y_e = 0$.

Consideremos a função $x_e : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, onde $x_e(z) = k$ se $z > 0$ e $x_e(0) = 0$. Evidentemente, x_e não é contínua em $z = 0$ e temos $\varphi_t(x_e(z)) = x_e(z)$ para todo $z \in \mathbb{R}_+$. O item (a) do Teorema 5.9 garante que se $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+)$ é tal que $[\mathbf{x}_0]^0 \subset \mathbb{R}_+^*$, então $\chi_{\{k\}} = \hat{x}_e(\mathbf{x}_0)$ é um ponto de equilíbrio para $\hat{\varphi}_t$ e além disso $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)$ converge para $\chi_{\{k\}}$ quando $t \rightarrow +\infty$.

³Exemplo retirado do trabalho de [Cecconello \(2010\)](#)

⁴Exemplo retirado do trabalho de [Cecconello \(2010\)](#)

Seja $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+)$ com função de pertinência

$$\mu_{\mathbf{x}_0}(z) = \max\{1 - (3/k)z, 0\}.$$

Neste caso, $\mathbf{x}_e = \hat{x}_e(\mathbf{x}_0)$ tem função de pertinência

$$\mu_{\mathbf{x}_e}(z) = \max\{\chi_{\{0\}}(z), \chi_{\{k\}}(z)\}.$$

Como $[\mathbf{x}_e]^\alpha = \{0, k\}$ então,

$$[\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_e)]^\alpha = \varphi_t([\mathbf{x}_e]^\alpha) = \{\varphi_t(x_0) : x_0 \in [\mathbf{x}_e]^\alpha\} = [\mathbf{x}_e]^\alpha,$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$ e portanto, \mathbf{x}_e é um ponto de equilíbrio para $\hat{\varphi}_t$. Agora, $[\mathbf{x}_e]^1 = \{0, k\}$ enquanto que $[\mathbf{x}_0]^1 = 0$, de onde temos que $[\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)]^1 = 0$ para todo $t > 0$. Logo, $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)$ não converge para \mathbf{x}_e .

Até o momento estabelecemos condições para que o fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t$ admita pontos de equilíbrio fuzzy. Como mostramos, os pontos de equilíbrio fuzzy são conjuntos invariantes para o fluxo fuzzy. Desta forma, os conjuntos invariantes desempenham papel fundamental no estudo do comportamento assintótico dos sistemas dinâmicos (MILANI; KOKSCH, 2005).

Na Proposição 5.12 apresentado a seguir estamos interessados em caracterizar os conjuntos invariantes para o fluxo fuzzy a partir de conjuntos invariantes clássicos.

Proposição 5.12 (CECCONELLO, 2010) *Seja $S \subset U$ e consideremos $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}(U)$ definido por*

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(U) : [x_0]^0 \subset S\}.$$

O conjunto S é invariante por φ_t se, e somente se, o conjunto \mathcal{S} é invariante pelo fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t$.

Demonstração: (\Rightarrow) Vamos supor que $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{S}$. Devemos mostrar que $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{S}$, ou seja, $\varphi_t([\mathbf{x}_0]^\alpha) \subset S$, para todo $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{S}$ e $t \in \mathbb{R}$. Por hipótese, S é invariante e então $\varphi_t(x_0) \in S$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$ e $x_0 \in S$. Agora, desde que $[\mathbf{x}_0]^\alpha \subset S$ então

$$\varphi_t([\mathbf{x}_0]^\alpha) = \varphi_t(x_0) : x_0 \in [\mathbf{x}_0]^\alpha \subset S,$$

para todo $t \in \mathbb{R}_+$ e $\alpha \in [0, 1]$. Logo, $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{S}$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$, o que prova a primeira parte.

(\Leftarrow) Seja $x_0 \in S$. Desde que \mathcal{S} é invariante e $\chi\{x_0\} \in \mathcal{S}$ então, $\hat{\varphi}_t(\chi\{x_0\}) \in \mathcal{S}$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$. Logo, $\varphi_t(\{x_0\}) \subset S$ e portanto S é invariante. ■

5.3 Conclusão

Mostramos neste capítulo alguns resultados que asseguram a existência de pontos de equilíbrio para o fluxo fuzzy. No Teorema 5.9 mostramos que, sob certas hipóteses, o fluxo fuzzy pode convergir para um ponto de equilíbrio fuzzy não crisp. O mesmo teorema também fornece uma maneira prática de determinar o ponto de equilíbrio para o qual a solução fuzzy converge quando $t \rightarrow +\infty$. De outro modo, o Teorema 5.9 garante que se a solução determinística converge para uma função, que para cada condição inicial associa o ponto de equilíbrio, então a solução fuzzy converge para a extensão de Zadeh desta função.

6 Região de Estabilidade Fuzzy

No capítulo 3 vimos que, classicamente, a região de atração ou área de atração de um ponto de equilíbrio x_e é o conjunto $A(x_e)$ formados pelos pontos pertencentes ao conjunto universo U que tendem para x_e quando $t \rightarrow +\infty$. Além disso, apresentamos resultados importantes a cerca do conceito de região de estabilidade clássica.

No capítulo 4 estabelecemos o espaço $\mathcal{E}(X)$ cujos elementos são subconjuntos fuzzy de um conjunto X que possuem α -níveis compactos e não vazios em X . A necessidade desses α -níveis serem compactos ocorreu para que fosse possível estabelecermos uma estrutura de espaços métricos em $\mathcal{E}(X)$. Portanto, utilizamos a métrica de *Hausdorff* para definimos a métrica d_∞ para o conjunto $\mathcal{E}(X)$ de modo que $(\mathcal{E}(X), d_\infty)$ constituí um espaço métrico.

Tendo assegurado que o conjunto $(\mathcal{E}(X), d_\infty)$ juntamente com a métrica d_∞ define um espaço métrico. Foi plausível definir fluxos sobre o espaço $\mathcal{E}(U)$, isto é, *fluxos fuzzy* ou *sistemas dinâmicos* gerados pela aplicação $\hat{\varphi}_t$ obtidos por meio da utilização do princípio da extensão de Zadeh de soluções determinísticas de equações diferenciais autônomas geradas pelo *semifluxo* φ_t .

Assim, de maneira análoga ao obtido na teoria clássica, no Capítulo 5 foi possível caracterizar um ponto de equilíbrio para o fluxo $\hat{\varphi}_t$, assim como estudar a estabilidade de pontos de equilíbrio em $\mathcal{E}(U)$, isto é, o comportamento do fluxo fuzzy quando a condição inicial está próxima de um ponto de equilíbrio.

Desta forma, tendo assegurado a existência de pontos de equilíbrio fuzzy assintoticamente estáveis, faz total sentido caracterizar e explorar sua região de atração. Assim, o objetivo deste capítulo é definir e apresentar alguns importantes resultados obtidos por meio desta pesquisa sobre a região de estabilidade de um ponto de equilíbrio fuzzy assintoticamente estável, dentre eles o mais importante diz respeito a obtenção de uma estimativa para região de estabilidade fuzzy, apresentada no Teorema 6.4.

A seguir, apresentamos a definição formal de região de estabilidade de um ponto de equilíbrio fuzzy assintoticamente estável. Esta definição foi conceituada a partir da extensão do conceito clássico de região de estabilidade exposto na Definição 3.4.

Definição 6.1 *Seja $x_e \in \mathcal{E}(U)$ um ponto de equilíbrio fuzzy assintoticamente estável para o fluxo $\hat{\varphi}_t$, então a região de atração de x_e é o conjunto $\mathbf{A}(x_e) \subset \mathcal{E}(U)$ definido por*

$$\mathbf{A}(x_e) = \{x_0 \in \mathcal{E}(U) : \hat{\varphi}_t(x_0) \rightarrow x_e \text{ quando } t \rightarrow +\infty\}.$$

O Teorema a seguir, é um resultado significativo desta pesquisa que apresenta uma propriedade topológica importante. Nele é garantido que a região de atração $A(x_e)$ de um ponto de equilíbrio fuzzy assintoticamente estável x_e é um conjunto aberto.¹

Teorema 6.2 *Seja x_e um ponto de equilíbrio fuzzy assintoticamente estável para o fluxo $\hat{\varphi}_t$, então a região de atração $A(x_e)$ é um conjunto aberto.*

Demonstração: Como x_e é um ponto de equilíbrio fuzzy assintoticamente estável, então existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $x_0 \in \mathcal{E}(U)$ satisfazendo $d_\infty(x_0, x_e) < \epsilon$, implica que $d_\infty(\hat{\varphi}_t(x_0), x_e) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$. Seja $y \in A(x_e)$. Então, $d_\infty(\hat{\varphi}_t(y), x_e) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$. Desta forma, existe tempo $T > 0$ tal que $d_\infty(\hat{\varphi}_T(y), x_e) < \epsilon/2$. Pela proposição (??), temos que a continuidade da aplicação $\hat{\varphi}_t : \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{E}(U)$, com relação a condição inicial x_0 é assegurada, portanto, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d_\infty(\hat{\varphi}_T(x), \hat{\varphi}_T(y)) < \epsilon/2$ sempre que $d_\infty(x, y) < \delta$, para todo $x \in \mathcal{E}(U)$. Mas $d_\infty(\hat{\varphi}_T(x), x_e) \leq d_\infty(\hat{\varphi}_T(x), y) + d_\infty(\hat{\varphi}_T(y), x_e) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$. Logo, $d_\infty(\hat{\varphi}_s(\hat{\varphi}_T(y)), x_e) \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow +\infty$. Utilizando a propriedade $\hat{\varphi}_{t_1+t_2}(z) = \hat{\varphi}_{t_1} \circ \hat{\varphi}_{t_2}(z)$ para todo $z \in \mathcal{E}(U)$ e $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$ temos que $\hat{\varphi}_t(x) = \hat{\varphi}_{(t-T)+T}(x) = \hat{\varphi}_{t-T} \circ \hat{\varphi}_T(x)$. Assumindo $s = t - T$ temos que $s \rightarrow +\infty$ quando $t \rightarrow +\infty$. Daí, $\hat{\varphi}_t(x) = \hat{\varphi}_s \circ \hat{\varphi}_T(x) = \hat{\varphi}_s(\hat{\varphi}_T(x))$. Consequentemente,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d_\infty(\hat{\varphi}_t(x), x_e) = \lim_{s \rightarrow +\infty} d_\infty(\hat{\varphi}_s(\hat{\varphi}_T(x)), x_e) = 0.$$

Desta forma, concluímos que $d_\infty(\hat{\varphi}_t(x), x_e) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$, sempre que $d_\infty(x, y) < \delta$. Logo, existe $\delta > 0$ tal que todo ponto x satisfazendo $d_\infty(x, y) < \delta$ pertence a $A(x_e)$, ou seja, a bola aberta centrada em y e raio δ , $B(y, \delta)$ está inteiramente contida na Região de Atração $A(x_e)$. Portanto, $A(x_e)$ é um conjunto aberto. ■

No Capítulo 2 vimos que o conceito de invariância de conjuntos é imprescindível para análise do comportamento das soluções de sistemas dinâmicos, pois quando um dado conjunto é invariante a órbita de qualquer condição inicial que pertença a ele permanece neste conjunto para todo $t \geq 0$. No caso fuzzy não é diferente. Portanto, apresentamos no Teorema 6.3 outro resultado desta pesquisa que garante que a região de atração $A(x_e)$ de um ponto de equilíbrio fuzzy assintoticamente estável x_e é um conjunto invariante.

Teorema 6.3 *Seja x_e um ponto de equilíbrio fuzzy assintoticamente estável para o fluxo $\hat{\varphi}_t$, então a região de atração $A(x_e)$ é um conjunto invariante.*

¹Um subconjunto do espaço métrico $\mathcal{E}(X)$ é dito aberto se, para cada ponto $x_0 \in \mathcal{E}(X)$, existe $\epsilon > 0$ tal que a bola aberta $B(x_0, \epsilon)$ está inteiramente contida em $\mathcal{E}(X)$.

Demonstração: Seja $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{A}(\mathbf{x}_e)$ então $d_\infty(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_e) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$. Tomemos $\mathbf{x} = \hat{\varphi}_s(\mathbf{x}_0)$ para algum $s \in \mathbb{R}_+$ arbitrário. Então, da propriedade da solução $\hat{\varphi}$, tem-se que $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}) = \hat{\varphi}_t(\hat{\varphi}_s(\mathbf{x}_0)) = \hat{\varphi}_{t+s}(\mathbf{x}_0)$. Portanto, para s fixo

$$d_\infty(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}), \mathbf{x}_e) = d_\infty(\hat{\varphi}_{t+s}(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_e) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow +\infty.$$

Logo, $\mathbf{x} \in \mathbf{A}(\mathbf{x}_e)$ e conseqüentemente $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0) \in \mathbf{A}(\mathbf{x}_e)$. Da arbitrariedade da escolha de \mathbf{x}_0 podemos afirmar que $\mathbf{A}(\mathbf{x}_e)$ é um conjunto invariante. ■

Na Seção 3.3 vimos que muitos métodos usados na análise de estabilidade transitória em sistemas elétricos de potência, baseavam-se no Princípio de Invariância de LaSalle (LASALLE, 1960) e exploravam a estrutura qualitativa da fronteira da região de estabilidade. Em seu trabalho, Coimbra (2016) desenvolve uma extensão do princípio da invariância, obtendo resultados úteis para estimar atratores e região de estabilidade de sistemas dinâmicos periódicos para a classe de sistemas periódicos.

Para a classe de sistemas dinâmicos fuzzy Coimbra (2016) utiliza conceitos fundamentais desenvolvidos por Ceconello Ceconello (2010), Ceconello et al. (2015), Mizukoshi (2004) para desenvolver resultados sobre sistemas dinâmicos fuzzy tais como o princípio da invariância fuzzy e sua versão global com o objetivo de estimar atratores e região de estabilidade para classes de sistemas dinâmicos fuzzy, com incertezas apenas na condição inicial de um PVIF.

Entretanto, neste trabalho adotamos um método diferente para estimar a região de estabilidade de um sistema dinâmico fuzzy. Consideramos aqui a região de atração $\mathbf{A}(x_e)$ de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável x_e , então o item (a) do Teorema 5.9 garante que x_e é ponto de equilíbrio fuzzy para o fluxo estendido $\hat{\varphi}_t$, portanto podemos considerar sua região de estabilidade fuzzy $\mathbf{A}(x_e)$. Então, consideramos aqui o conjunto $\mathbf{A}(x_e)$ formado pelo elementos \mathbf{x}_0 pertencentes a $\mathcal{E}(U)$ tal que o $[\mathbf{x}_0]^0$ está contido na região de atração de x_e . O Teorema 6.4 prova que $\mathbf{A}(x_e) \subset \mathbf{A}(x_e)$, isto é, $\mathbf{A}(x_e)$ é uma estimativa para a região de atração fuzzy de x_e .

Teorema 6.4 *Seja x_e um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para o fluxo φ_t e $\mathbf{A}(x_e)$ sua região de estabilidade. Consideremos o conjunto*

$$\mathbf{A}(x_e) = \{\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}(U) : [\mathbf{x}_0]^0 \subset \mathbf{A}(x_e)\}$$

Então

$$\mathbf{A}(x_e) \subset \mathbf{A}(x_e)$$

onde $\mathbf{A}(x_e)$ é a região de estabilidade fuzzy do ponto de equilíbrio fuzzy assintoticamente estável x_e .

Demonstração: Seja $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{A}(x_e)$ então $[\mathbf{x}_0]^0 \subset A(x_e)$. Devemos mostrar que $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{A}(x_e)$, isto é, que $d_\infty(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_e) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$. Pela Proposição 5.12 temos que o conjunto $\mathbf{A}(x_e)$ é invariante para o fluxo $\hat{\varphi}_t$, portanto $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0) \in \mathbf{A}(x_e)$, isto é, $[\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)]^0 \subset A(x_e)$ e, conseqüentemente, $\varphi_t([\mathbf{x}_0]^0) \subset A(x_e)$. Desta forma, temos que $d(\varphi_t([\mathbf{x}_0]^0), x_e) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$. Portanto, para todo $\epsilon > 0$ existe $T > 0$ tal que $\|\varphi_t(x_0) - x_e\| < \epsilon$, para todo $t > T$ e $x_0 \in [\mathbf{x}_0]^0$. Assim, temos que $\varphi_t : U \rightarrow U$ converge uniformemente, em $[\mathbf{x}_0]^0 \subset A(x_e)$, para x_e quando $t \rightarrow +\infty$ e sob as hipóteses do item (b) do Teorema (5.9) $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)$ converge para \mathbf{x}_e quando $t \rightarrow +\infty$ e $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_e) = \mathbf{x}_e$ para todo $t \geq 0$. Logo, $d_\infty(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_e) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$ e portanto $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{A}(x_e)$. ■

7 Considerações finais

Neste trabalho apresentamos um estudo da região de estabilidade de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável fuzzy. Para isso, destacamos alguns conceitos sobre a teoria qualitativa de sistemas dinâmicos autônomos não lineares com o objetivo de estimar o comportamento da trajetória das soluções no entorno de um ponto de equilíbrio.

Um dos nossos importantes resultados foi estabelecer uma ligação entre a teoria de estabilidade clássica, mais especificamente em relação a região de estabilidade, e a teoria de conjuntos fuzzy. Assim, definimos e exploramos algumas propriedades topológicas da região de atração e apresentamos resultados importantes sobre a teoria de estabilidade fuzzy, através de conceitos fundamentais desenvolvidos por [Cecconello \(2010\)](#) e [Mizukoshi \(2004\)](#).

Destacamos aqui três resultados inéditos sobre a região de estabilidade de um ponto de equilíbrio fuzzy assintoticamente estável obtidos através desta pesquisa: foi provado que a região de atração fuzzy é um conjunto aberto e invariante. Além disso, propomos um método para estimar a região de estabilidade de um sistema dinâmico fuzzy a partir de um subconjunto dessa região caracterizado por meio do Teorema [6.4](#).

Um dos nossos objetivos é elaborar algoritmos capazes de modelar matematicamente o subconjunto da região de estabilidade para estimar essa região computacionalmente através de modelos SI como o apresentado no Exemplo [5.8](#). Pretendemos apresentar tais resultados na entrega da versão final deste trabalho.

Para trabalhos futuros propomos um estudo das diversas propriedades da região de estabilidade fuzzy, como a caracterização da fronteira, conexidade e outras características topológicas que podem ser investigadas a partir de resultados obtidos na literatura sobre a região de estabilidade clássica.

Referências

- ALBERTO, L. F. C. **Caracterização e Estimativas da Área de Atração de Sistemas Dinâmicos Não-Lineares**. Tese de Livre Docência — EESC-USP, São Carlos, 2006.
- ALIPRANTIS, C. D.; BORDER, K. C. **Infinite Dimensional Analysis**. 3rd. ed. New York: Springer, 2005.
- AMARAL, F. M. **Caracterização, Estimativas e Bifurcações da Região de Estabilidade de Sistemas Dinâmicos Não Lineares**. Doutorado — Universidade de São Paulo, São Carlos, 2010.
- BARROS, L. C. **Sobre Sistemas Dinâmicos Fuzzy: teoria e aplicações**. Doutorado — Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, Campinas, 1997.
- BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. **Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática**. 1. ed. Campinas, SP: UNICAMP/IMECC, 2006.
- BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. **Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática**. 2. ed. Campinas, SP: UNICAMP/IMECC, 2010.
- BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C.; TONELLI, P. A. On the continuity of the zadeh's extension. **Seventh IFSA World Congress**, Praga, II, 1997.
- BARROS, L. C.; GOMES, L. T.; TONELLI, P. A. Fuzzy differential equations: An approach via fuzzification of the derivative operator. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 230, p. 39–52, 2013.
- BARROS, L. C.; TONELLI, P. A.; BASSANEZI, R. C. Modelagem com condição inicial fuzzy. **Biomatemática**, VIII, 1998.
- BIRKHOFF, G. D. **Dynamical Systems**. Providence: American Mathematical Society, 1966.
- CECCONELLO, M. dos S. **Sistemas Dinâmicos em Espaços Métricos Fuzzy - Aplicações em Biomatemática**. Doutorado — Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, Campinas, 2010.
- CECCONELLO, M. S. **Modelagem alternativa para dinâmica populacional: Sistemas dinâmicos fuzzy**. Dissertação (Mestrado) — IMECC - UNICAMP, 2006.
- CECCONELLO, M. S.; LEITE, J.; BASSANEZI, R. C.; BRANDÃO, A. Invariant and attractor sets for fuzzy dynamical systems. **Fuzzy Sets and Systems**, USA, v. 265, n. 11, p. 99–109, 2015.
- CHIANG, C. C. H. D. Theoretical foundation of the bcu method for direct stability analysis of network-reduction power system models with small transfer conductances. **IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications**, v. 42, n. 5, p. 252–265, May 1995.
- CHIANG, H. D.; HIRSCH, M. W.; WU, F. F. Stability regions of nonlinear autonomous dynamical systems. **IEEE Trans. Automat. Control**, v. 33, n. 1, p. 16–27, January 1988.

- CHIANG, H. D.; THORP, J. S. Stability regions of nonlinear dynamical systems: a constructive methodology. **IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications**, v. 34, n. 12, p. 1229–1241, December 1989.
- CHIANG, H. D.; WU, F. F.; VARAIYA, P. P. Foundations of direct methods for power system transient stability analysis. **IEEE Transactions on Circuits and Systems-I**, v. 34, n. 2, p. 160–173, February 1987.
- CHIANG, H. D.; WU, F. F.; VARAIYA, P. P. A bcu method for direct analysis of power system transient stability. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 9, n. 3, p. 1194–1208, Ago 1992.
- COIMBRA, W. R. **Extensão do Princípio da Invariância de LaSalle para Sistemas Periódicos e Sistemas Fuzzy**. Doutorado — Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.
- DIAMOND, P.; KLOEDEN, P. Metric spaces of fuzzy sets: Theory and applications. **World Scientific**, Singapore, 1994.
- EL-ABIAD, A. H.; NAGAPPAN, K. Transient stability regions of multimachine power systems. **IEEE Trans. Power Apparatus and Systems**, v. 85, p. 169–179, February 1966.
- GLASS, G. E. Direct method of lyapunov applied to transient power system stability. **IEEE Trans. PAS**, v. 85, p. 159–168, Feb. 1966.
- HALE, J. **Asymptotic Behavior of Dissipative System**. Providence: American Mathematical Society, 1988.
- HALE, J.; MAGALHÃES, L. T.; OLIVA, W. M. **Dynamics and Bifurcation**. New York: Springer - Verlag, 1991.
- HARTMAN, P. **Ordinary Differential Equations**. New York: John Wiley & Sons, 1964.
- HIRSCH, M. W.; SMALE, S. **Differential, Dynamical Systems and Linear Algebra**. San Diego: Academic Press, 1974.
- KLIR, G. J.; YUAN, B. **Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and applications**. New Jersey: Prentice Hall PTR, 1995.
- KREYSZIG, E. **Introductory Functional Analysis With Applications**. New York: John Wiley & Sons, 1978.
- LASALLE, J. P. Some extensions of liapunov's second method. v. 7, p. 520–527, 1960.
- MILANI, A. J.; KOKSCH, N. J. **An Introduction to Semiflows: Monographs and surveys in pure and applied mathematics**. New York: Chapman & Hall-CRC, 2005.
- MIZUKOSHI, M.; BARROS, T. L. C.; BASSANEZI, R. C. Stability of fuzzy dynamic systems. **International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems**, p. 69–83, 2009.
- MIZUKOSHI, M. T. **Estabilidade de Sistemas Dinâmicos Fuzzy**. Doutorado — Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, Campinas, 2004.

- MIZUKOSHI, M. T.; BARROS, L. C.; CHALCO-CANO, Y.; ROMÁN-FLORES, H.; BASSANEZI, R. C. Fuzzy differential equations and the extension principle. **ScienceDirect**, v. 177, p. 3627–3635, February 2007.
- MIZUKOSHI, M. T.; BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C.; BRANDÃO, A. J. V. On the topological equivalence of some fuzzy flows near hyperbolic equilibria. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 189, p. 92–100, 2012.
- NGUYEN, H. T.; WALKER, E. A. **A first Course in Fuzzy Logic**. 2nd. ed. Campinas, SP: Chapman & Hall/CRC, 2000.
- ORTEGA, N. R. S. **Aplicação da Teoria de Conjuntos Fuzzy a Problemas da Biomedicina**. Doutorado — Universidade de São Paulo/Instituto de Física, 2001.
- ROBINSON, C. **Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics and chaos: Studies in advanced mathematics**. 2nd. ed. New York: CRC Press, 1999.
- SILVA, F. H. J. R.; ALBERTO, L. F. C.; LONDON, J. B. A. J.; BRETAS, N. G. Smooth perturbation on a classical energy function for lossy power system stability analysis. v. 52, n. 1, p. 222–229, Jan. 2005.
- SOTOMAYOR, J. **Lições de equações ordinárias**. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, 1979.
- TSOLAS, N. A.; ARAPOSTATHIS, A.; VARAIYA, P. P. A structure preserving energy function for power system transient stability analysis. **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, v. 32, n. 10, p. 1041–1049, October 1985.
- VINOGRAD, V. E. The inadequacy of the method of characteristic exponents for the study of nonlinear differential equations. **Math. Sbornik**, v. 41, p. 431–438, 1957.
- WIGGINS, S. **Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos**. New York: Springer-Verlag, 2003.
- WILLEMS, J. L. Improved lyapunov function for transient power system stability. **Proceedings...**, v. 115, p. 1315–1317, 1968.
- ZABORSZKY, J.; HUANG, G.; ZHENG, B.; LEUNG, T. C. On the portrait of a class of large nonlinear dynamic systems such as the power system. v. 33, n. 1, p. 4–15, Jan. 1988.
- ZADEH, L. A. Fuzzy sets. **Information and Control**, v. 8, p. 338–353, 1965.