



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ**  
**PRO-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL**  
**EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA**

**GUILHERME PEIXOTO ANDRADE**

**ALGORITMOS ARRAY RÁPIDOS PARA FILTRAGEM DE SISTEMAS LINEARES COM**  
**VARIAÇÃO ESTRUTURADA DOS PARÂMETROS NO TEMPO**

**PPGMC – UESC**

**ILHÉUS-BA**

**2017**

**GUILHERME PEIXOTO ANDRADE**

**ALGORITMOS ARRAY RÁPIDOS PARA FILTRAGEM DE  
SISTEMAS LINEARES COM VARIAÇÃO ESTRUTURADA  
DOS PARÂMETROS NO TEMPO  
PPGMC – UESC**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Estadual de Santa Cruz, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia.

Orientador: Prof. Dr. Gildson Queiroz de Jesus

ILHÉUS-BA  
2017

A553

Andrade, Guilherme Peixoto.

Algoritmos array rápidos para filtragem de sistemas lineares com variação dos parâmetros no tempo / Guilherme Peixoto Andrade. – Ilhéus, BA: UESC, 2017.

50f. : il.

Orientador: Gildson Queiroz de Jesus.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia.

Inclui referências e apêndices.

1. Algoritmos computacionais. 2. Filtros digitais (Matemática). 3. Sistemas lineares. I. Título.

CDD 005.12

GUILHERME PEIXOTO ANDRADE

ALGORITMOS ARRAY RÁPIDOS PARA FILTRAGEM DE  
SISTEMAS LINEARES COM VARIAÇÃO ESTRUTURADA  
DOS PARÂMETROS NO TEMPO

PPGMC – UESC

Ilhéus-BA, 23/02/2017

Comissão Examinadora




---

Prof. Dr. Gilson Queiroz de Jesus  
UESC  
(Orientador)



---

Prof. Dr. Eduardo Silva Palmeira  
UESC



---

Prof. Dr. Fábio Moraes Amaral  
IFBA - Campus Eunápolis

Dedico aos familiares e amigos, que sempre me apoiaram e incentivaram durante o tempo do trabalho.

## **Agradecimentos**

- Ao Prof. Dr. Gildson Queiroz de Jesus, meu orientador, por sua dedicação, auxílio e ensinamentos, que serviram para meu crescimento pessoal e acadêmico.
- Aos familiares, pelo suporte no dia-a-dia.
- Aos colegas de mestrado, pelo companheirismo ao longo do curso.
- Ao PPGMC, pela oportunidade realizar o curso de mestrado, e a seus funcionários e professores, pelo carinho e atenção.
- À FAPESB, pelo apoio financeiro para realização deste trabalho.

*“Nunca se esqueça de quem você é, porque é certo que o mundo não se lembrará. Faça disso sua força. Assim, não poderá ser nunca a sua fraqueza.”*

George R. R. Martin

Algoritmos Array Rápidos Para Filtragem de Sistemas Lineares com Variação Estruturada dos Parâmetros no Tempo

PPGMC – UESC

## Resumo

Nesta dissertação, desenvolve-se algoritmos array rápidos para filtros de sistemas singulares sujeitos a incertezas paramétricas e de sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos, ambos com variação estruturada dos parâmetros no tempo. A partir de exemplos numéricos, são constatadas algumas vantagens destes algoritmos em comparação aos filtros convencionais, calculados através da equação de Riccati.

**Palavras-chave:** Sistemas Singulares, Algoritmos Array Rápidos, Saltos Markovianos, Filtro de Kalman, Incertezas, Variação Estruturada no Tempo.



Fast Array Algorithms for Filtering of Linear Systems with Structured Time-Variant of  
Parameters

PPGMC - UESC

## **Abstract**

In this dissertation is developed fast array algorithms for filters of singular systems subject to parametric uncertainties and Markovian jump linear systems, both with structured variation of the parameters in time. From numerical examples, some advantages of these algorithms are verified in comparison to the conventional filters, calculated through the Riccati equation.

**Keywords:** Singular Systems. Fast Array Algorithms. Markovian Jumps. Kalman Filter. Uncertainties. Structured Time-Variant

## Lista de figuras

Figura 1 – Valores Singulares de $P_{i i}^{-1}$ . . . . .	30
Figura 2 – Valores Singulares de $L_i$ . . . . .	31
Figura 3 – Valores Singulares de $\tilde{Z}_{i i-1}$ . . . . .	40
Figura 4 – Valores Singulares de $L_i$ . . . . .	41

## Lista de abreviaturas e siglas

UESC	Universidade Estadual de Santa Cruz
DCET	Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas
PPGMC	Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia
SLSM	Sistema Linear Sujeito a Saltos Markovianos
LMMSE	Estimador Linear Mínimo Médio Quadrático

## Lista de símbolos

$\Psi$	Matriz de Variação Estruturada no Tempo
$\hat{\lambda}$	Parâmetro do Sistema Singular Robusto
$\Theta$	Matriz Unitária Para Sistema Singular
$\Gamma$	Matriz Unitária Para SLSM
$\Sigma$	Matriz Unitária Para Equação do Tipo Lyapunov
$\mathbb{R}$	Conjunto dos Números Reais
$\pi$	Distribuição de Probabilidade da Cadeia de Markov
$\theta$	Cadeia de Markov
$\mathbb{R}^{\alpha \times \alpha}$	Notação para ordem das matrizes

# Sumário

<b>1 – Introdução</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1 Motivação . . . . .	1
1.2 Estrutura do Texto . . . . .	2
<b>2 – Preliminares</b> . . . . .	<b>4</b>
2.1 Filtragem Para Sistemas Espaço de Estado . . . . .	5
2.2 Filtragem Robusta para Sistemas Singulares . . . . .	6
2.3 Filtragem para Sistemas Lineares Sujeitos a Saltos Markovianos . . . . .	9
2.4 Algoritmo Array Rápido para Filtragem de Sistemas Espaço de Estado com Variação Estruturada dos Parâmetros . . . . .	11
2.4.1 Variação dos Parâmetros $F_i, H_i, G_i$ . . . . .	12
2.4.2 Variação dos Parâmetros $F_i, H_i, G_i, C_i, Q_i, R_i$ . . . . .	13
<b>3 – Algoritmos Array Rápidos Para Filtragem de Sistemas Singulares com Va-         riação Estruturada dos Parâmetros</b> . . . . .	<b>14</b>
3.1 Estimativa Filtrada com Variação dos Parâmetros $E_i, F_i, H_i, \bar{N}_{e,i}, \bar{N}_{f,i}, \bar{N}_{h,i}$	14
3.2 Estimativa Filtrada com Variação dos Parâmetros $E_i, F_i, H_i, \bar{N}_{e,i}, \bar{N}_{f,i},$ $\bar{N}_{h,i}, \hat{Q}_i^{-1}, \hat{R}_i^{-1}$ . . . . .	17
3.3 Estimativa Preditora com Variação dos Parâmetros $E_i, F_i, H_i, \bar{N}_{e,i}, \bar{N}_{f,i},$ $\bar{N}_{h,i}$ . . . . .	19
3.4 Estimativa Preditora com Variação dos Parâmetros $E_i, F_i, H_i, \bar{N}_{e,i}, \bar{N}_{f,i},$ $\bar{N}_{h,i}, \hat{Q}_i^{-1}, \hat{R}_i^{-1}$ . . . . .	22
3.5 Exemplo Numérico . . . . .	28
<b>4 – Algoritmo Array Rápido Para Filtragem de SLSM com Variação Estruturada         dos Parâmetros</b> . . . . .	<b>32</b>
4.1 SLSM com Variação Estruturada do Tempo . . . . .	32
4.2 Algoritmo <i>Array</i> Rápido para SLSM . . . . .	33
4.3 Exemplo Numérico . . . . .	38
<b>5 – Considerações Finais e Trabalhos Futuros</b> . . . . .	<b>42</b>
<b>Referências</b> . . . . .	<b>43</b>

<b>Apêndices</b>	<b>46</b>
<b>APÊNDICE A – Resultados Importantes . . . . .</b>	<b>47</b>
<b>APÊNDICE B – Transformações Unitárias . . . . .</b>	<b>49</b>

# 1 Introdução

## 1.1 Motivação

A teoria de filtragem para sistemas, desenvolvida por Rudolf Kalman na década de 60, sintetizada pelo filtro de Kalman (KALMAN, 1960), tem sido largamente estudada (DAI, 1989), (DAROUACH et al., 1993), (DENG; LIU, 1999), (SOUZA et al., 2008), (SOUZA et al., 1986), (ISHIHARA et al., 2005), (ISHIHARA et al., ), (ISHIHARA; TERRA, 2008), (ISHIHARA et al., 2006), (KELLER et al., 1992), (NIKOUKAH et al., 1992), (NIKOUKAH et al., 1999), (XU; LAM, 2006) e (ZHANG et al., 1999). Apesar deste tipo de filtro ser muito útil em aplicações online, foram detectados alguns problemas nos cálculos, dentre os quais, pode-se destacar erros de arredondamentos que tornam a recursão da equação de Riccati instável numericamente (JAZWINSKI, 1970). Afim de aliviar problemas computacionais associados à equação de Riccati usada nos filtros, foram propostos algoritmos alternativos, tais como, os algoritmos *array* raiz quadrada (POTTER; KAILATH, 1963) e os algoritmos *array* rápidos (MORF et al., 1974), (SAYED; KAILATH, 1994).

Os algoritmos *array* raiz quadrada foram originalmente desenvolvidos para o filtro de sistemas espaço de estado, apresentando vantagens computacionais se comparados à implementação da equação de Riccati, usada no filtro convencional. Isto se deve ao uso de transformações ortogonais nos cálculos, visto que estas transformações são mais estáveis numericamente. Dentre as vantagens estão: a redução da faixa dinâmica dos números calculados em implementação por aritmética de pontos fixos e cálculos mais seguros da matriz de covariância do erro de estimativa " $P_i$ " (variável da equação de Riccati), que podem apresentar erros de arredondamento, que tornam-a não-Hermitiana. A principal característica destes algoritmos recursivos é propagar ao invés da matriz " $P_i$ ", a sua raiz quadrada " $P_i^{1/2}$ ".

Já os algoritmos *array* rápidos, além de conservarem as boas propriedades numéricas dos algoritmos *array* raiz quadrada, possuem um esforço computacional menor. Estes foram originalmente desenvolvidos para o filtro de sistemas espaço de estado, onde os parâmetros do sistema são invariantes no tempo (MORF et al., 1974), assim ao invés da raiz quadrada de " $P_i$ ", estes propagam uma matriz auxiliar " $M_i$ ", da seguinte forma,  $M_i S_i M_i^T = P_{i+1} - P_i$ . Em (SAYED; KAILATH, 1994), foram desenvolvidos algoritmos *array* rápidos para o filtro onde os parâmetros do sistema variam de forma estruturada no tempo, desta forma, é propagada uma matriz auxiliar " $M_i$ " como,  $M_i S_i M_i^T = P_{i+1} - \Psi_i P_i \Psi_i^T$ , onde  $\Psi_i$  é uma matriz conveniente. Esta última classe de algoritmos *array* rápidos é também denominada recursão de Chandrasekhar estendida.

Sistemas singulares foram mencionados pela primeira vez na literatura em (SINGH; LIU, 1973). Filtragem para este tipo de sistema têm sido bastante pesquisados na literatura, tendo sido motivado pelo fato de muitos sistemas poderem ser modelados naturalmente como sistemas singulares. Aplicações para este tipo de modelo podem ser encontradas, por exemplo, processamento de imagens (HASAN; AZIM-SADJANI, 1995), robótica (ZHANG et al., 1999) e economia (LUENBERGER, 1977).

Sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos (SLSM) é uma classe de sistemas que visa modelar sistemas dinâmicos que sofrem mudanças drásticas em seu comportamento por diversos fatores externos. Filtragem para SLSM tem sido um tema largamente estudado na literatura (ACKERSON; FU, 1970), (CHANG; ATHANS, 1978), (COSTA, 1994), (GONCALVES et al., 2010), (MATEI; BARAS, 2012), (LI; JIA, 2013) e (YIN et al., 2014).

Em (JESUS et al., 2008) e (TERRA et al., 2012), foram desenvolvidos algoritmos *array* rápidos para filtros robustos de sistemas singulares (TERRA et al., 2007), e para o filtro de sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos (COSTA; GUERRA, 2002), respectivamente. Nestes algoritmos, os parâmetros tanto do sistema singular quanto do SLSM foram considerados invariantes no tempo.

Até o presente momento os autores desconhecem haver o desenvolvimento de algoritmos *array* rápidos para filtros, tipo Kalman, de sistemas singulares sujeitos a incertezas paramétricas e de sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos, ambos com variação estruturada dos parâmetros no tempo. Esta dissertação tem como objetivo preencher esta lacuna.

## 1.2 Estrutura do Texto

A organização deste trabalho é feita da seguinte forma: No Capítulo 2, é feita uma revisão bibliográfica preliminar sobre os assuntos que serviram de base para as contribuições originais desta dissertação

- Filtragem para Sistemas Espaço de Estado, Sistemas Singulares e Sistemas Lineares Sujeitos a Saltos Markovianos
- Algoritmos *Array* Rápidos com Variação Estruturada dos Parâmetros no Tempo

No Capítulo 3, são desenvolvidos algoritmos *array* rápidos para filtragem robusta de sistemas singulares nas estimativas filtrada e preditora, onde são apresentados exemplos numéricos. No Capítulo 4, são apresentados os algoritmos *array* rápidos para filtragem de SLSM na estimativa preditora e para a equação do tipo Lyapunov utilizada



neste filtro, também é apresentado um exemplo numérico para certificar a eficiência do algoritmo.

## 2 Preliminares

Uma forma de abordar a teoria de filtragem é descrever sua relação com a teoria de controle, pois uma está fortemente relacionada à outra. Uma vez que em filtragem, dado os valores de um sinal observável (medido), deseja-se estimar os valores de um sinal que não é diretamente observável. Já em teoria de controle, dado certo sistema dinâmico, também chamado planta, têm-se como objetivo influenciar adequadamente seu comportamento através de um sinal de controle, de modo que o sistema produza um desempenho desejado. Em muitas aplicações, utiliza-se filtragem para resolver problemas de controle, por exemplo, em uma planta onde, sob certas condições, se possua apenas sinais de saída, pode-se utilizar estes dados para estimar certos valores de sinais não observáveis e posteriormente, utilizá-los para construir os sinais de controle necessários. Para se estimar um sinal não observável, é necessário definir os critérios de forma ótima, relacionando os sinais de acordo com o modelo específico, para poder obter a melhor estimativa possível. Assim, a aplicabilidade da teoria de filtragem se torna cada vez mais abrangente, pois se liga à diversas áreas como detecção de sinais, computação matricial, entre outras.

A teoria de filtragem moderna teve nos anos 40 sua primeira abordagem, de modo resumido, em (WIENER, 1949) o autor apresenta um trabalho baseado em minimizar o erro médio quadrático. Esta solução, apresentada por Wiener, causou grandes discussões, pois contrastava com os métodos de separação de frequência utilizada na época, porém foi pouco aplicada na prática. A teoria apresentada no trabalho de Wiener teve sua importância, pois a abordagem onde coloca o problema de minimizar o erro médio quadrático em termos do domínio do tempo, foi uma das bases utilizadas por Kalman em 1960.

Em (KALMAN, 1960), o autor trata o mesmo problema, mas em seu artigo considera a medição ruidosa sendo uma sequência discreta no tempo, em contraste com o sinal de tempo contínuo utilizada por Wiener. Kalman também aborda o problema em uma configuração de espaço de estado, que acomoda muito bem as múltiplas variáveis temporais de entrada e saída.

O filtro de Kalman calcula estimativas filtrada e preditora para o estado do sistema " $x_i$ ", conforme quantidade de medidas " $y_i$ " disponíveis. Ou seja,

$$\begin{aligned}\hat{x}_{i|i} &:= \text{uma estimativa de } x_i \text{ dado } \{y_0, y_1, \dots, y_{i-1}, y_i\}, \\ \hat{x}_{i|i-1} &:= \text{uma estimativa de } x_i \text{ dado } \{y_0, y_1, \dots, y_{i-1}\}.\end{aligned}$$

Após a publicação deste celebre filtro, houveram grandes avanços tecnológicos, os quais contribuíram para a vasta popularização entre os engenheiros para o uso do

filtro como uma solução prática. Até os dias atuais, o filtro de Kalman é a alternativa mais usual em problemas de filtragem, sendo utilizado em diversas áreas como navegação, modelamento de imagens (HASSAN; SADJANI, 1995).

Neste capítulo faremos uma breve revisão dos assuntos que serão abordados durante a dissertação. Dentre estes, as filtrações para sistemas de espaço de estado, filtragem robusta para sistemas singulares e por fim, a filtragem para sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos. Além disso, revisaremos os algoritmos *array* rápidos para sistemas espaço de estado com variação estruturada no tempo.

## 2.1 Filtragem Para Sistemas Espaço de Estado

Nesta seção será apresentada uma breve revisão do filtro de Kalman para sistemas espaço de estado. Considere o sistema espaço de estado, linear e discreto no tempo

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= F_i x_i + G_i u_i, \\ y_i &= H_i x_i + v_i, \quad \text{para } i \geq 0, \end{aligned} \quad (1)$$

onde,  $x_i \in \mathbb{R}^n$  a variável de estado,  $y_i \in \mathbb{R}^p$  a medida de saída,  $F_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $G_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $H_i \in \mathbb{R}^{p \times n}$ , são matrizes conhecidas. Assumimos que  $x_0$ ,  $u_i$  e  $v_i$  são variáveis estocásticas que satisfaçam

$$\mathcal{E} \{x_0\} = \bar{x}_0, \quad \mathcal{E} \{(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^*\} = \Pi_0,$$

$$\mathcal{E} \{u_i x_0^*\} = \mathcal{E} \{v_i x_0^*\} = 0, \quad \mathcal{E} \{v_i\} = \mathcal{E} \{u_i\} = 0,$$

$$\mathcal{E} \left( \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^* & v_i^* \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} Q_i & C_i \\ C_i^* & R_i \end{bmatrix} \delta_{ij},$$

$$\mathcal{E} \{u_i u_0^*\} = Q_i \quad \mathcal{E} \{v_i v_0^*\} = R_i, \quad \mathcal{E} \{u_i v_0^*\} = C_i,$$

onde  $Q_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $R_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $C_i \in \mathbb{R}^{m \times p}$  e sendo  $\delta = 1$  se  $i = j$  e  $\delta = 0$  caso contrário, "\*"denota a conjugação Hermitiana (conjugação complexa para escalares), e "E" representa o valor esperado.  $\hat{x}_{i|i-1}$  é denotado estimativa linear de  $x_i$ , dado  $\{y_0, \dots, y_{i-1}\}$  respectivamente.

O filtro de Kalman (KALMAN, 1960) e a equação de Riccati " $P_{i+1|i}$ ", que propaga a matriz de covariância do erro de estimativa, utilizada no cálculo do filtro, são dadas a seguir

$$\begin{aligned} \hat{x}_{0|-1} &= 0, \\ \hat{x}_{i+1|i} &= F_i \hat{x}_{i|i-1} + K_i R_{\epsilon,i}^{-1} \epsilon_i, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} P_{0|-1}^{-1} &= \Pi_0, \\ P_{i+1|i} &= F_i P_{i|i-1} F_i^* - \bar{K}_{p,i} \bar{K}_{p,i}^* + G_i Q_i G_i^*, \quad \bar{K}_{p,i} \equiv K_i R_{\epsilon,i}^{-*/2}, \end{aligned} \quad (3)$$

sendo

$$\begin{aligned} \epsilon_i &= y_i - H_i \hat{x}_{i|i-1}, \\ R_{\epsilon,i} &= \mathcal{E} \{ \epsilon_i \epsilon_i^* \}, \\ K_i &= \mathcal{E} \{ x_{i+1} \epsilon_i^* \}. \end{aligned} \quad (4)$$

$K_i$  e  $R_{\epsilon,i}$  podem ser calculados através das expressões:

$$K_i = F_i P_{i|i-1} H_i^* + G_i C_i, \quad (5)$$

$$R_{\epsilon,i} = H_i P_{i|i-1} H_i^* + R_i. \quad (6)$$

## 2.2 Filtragem Robusta para Sistemas Singulares

Sistemas singulares, também chamado de semi-estado, sistemas descritores ou ainda sistemas algébricos-diferenciais, possuem como característica principal a presença de uma matriz singular "E" que dificulta o cálculo direto da variável " $x_{i+1}$ ". Considere o seguinte sistema singular com incertezas paramétricas

$$\begin{aligned} (E_i + \delta E_i) x_{i+1} &= (F_i + \delta F_i) x_i + w_i, \\ y_i &= (H_i + \delta H_i) x_i + v_i, \quad \text{para } i \geq 0, \end{aligned} \quad (7)$$

sendo  $x_i \in \mathbb{R}^n$  a variável de estado,  $y_i \in \mathbb{R}^p$  a medida de saída,  $w_i \in \mathbb{R}^m$  e  $v_i \in \mathbb{R}^p$  ruídos de processo e medida,  $E_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $F_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $H_i \in \mathbb{R}^{p \times n}$  matrizes conhecidas do sistema nominal.  $\delta E_i$ ,  $\delta F_i$  e  $\delta H_i$  são perturbações variantes no tempo para as matrizes do sistema nominal definidas como

$$\delta F_i = M_{f,i} \Delta_i N_{f,i}, \quad (8)$$

$$\delta E_i = M_{e,i} \Delta_i N_{e,i}, \quad (9)$$

$$\delta H_i = M_{h,i} \Delta_i N_{h,i}, \quad (10)$$

$$\|\Delta\| \leq 1, \quad (11)$$

sendo  $M_{f,i}$ ,  $M_{h,i}$ ,  $N_{e,i}$ ,  $N_{f,i}$ ,  $N_{h,i}$  matrizes conhecidas e  $\Delta$  uma matriz arbitrária limitada, responsável por manter as perturbações em uma faixa controlada de valores. A condição inicial e os ruídos de processo e de medida,  $\{x_0, w_i, v_i\}$ , são assumidos como sendo variáveis aleatórias de média zero não correlacionadas com estatísticas de segunda ordem

$$\mathcal{E} \left( \begin{bmatrix} x_0 \\ w_i \\ v_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ w_j \\ v_j \end{bmatrix}^T \right) = \begin{bmatrix} P_0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_i \delta_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & R_i \delta_{ij} \end{bmatrix} > 0, \quad (12)$$

sendo  $\delta_{ij} = 1$  se  $i = j$  e  $\delta_{ij} = 0$  caso contrário.

Os filtros robustos para sistemas singulares que serão apresentados nesta seção foram desenvolvidos na forma de informação (TERRA et al., 2007). A filtragem de informação tem sido utilizada como uma alternativa para o cálculo das recursões do filtro de Kalman. O algoritmo do filtro na forma de informação calcula o inverso da matriz de covariância, da equação de Riccati, denominada matriz de informação " $P_i^{-1}$ " e calcula a estimativa de informação do estado " $P_i^{-1}\hat{x}_i$ ". Segundo (TERRA et al., 2007), uma das aplicações que justificam esta abordagem é a existência de pouca informação sobre a condição inicial do estado a ser estimado. Para este caso, o filtro de informação pode ser iniciado com matriz de informação zero, enquanto o filtro padrão teria matrizes de covariância muito grande. Em algumas categorias de problemas, a vantagem da forma de informação torna-se mais evidente. Outra justificativa, segundo o mesmo autor, é que em ambientes com múltiplos sensores, o filtro de informação é mais fácil de distribuir, inicializar e fundir. Além disso, esta abordagem pode reduzir drasticamente o armazenamento e computação envolvidos com a estimação de certas classes de grandes sistemas interligados.

Os filtros robustos na forma de informação para sistemas singulares são apresentados a seguir. A estimativa robusta filtrada e a respectiva equação de Riccati são dadas a seguir

$$\begin{aligned} P_{0|0}^{-1}\hat{x}_{0|0} &= H_0^T R_0^{-1}y_0, \\ P_{i+1|i+1}^{-1}\hat{x}_{i+1|i+1} &= E_i^T \hat{Q}_i^{-1} (I - F_i(P_{i|i}^{-1} + \bar{N}_{f,i}^T \bar{N}_{f,i})^{-1} F_i^T \hat{Q}_i^{-1})^{-1} \\ &\quad \times F_i(P_{i|i}^{-1} + \bar{N}_{f,i}^T \bar{N}_{f,i})^{-1} P_{i|i}^{-1} \hat{x}_{i|i} + H_i^T \hat{R}_i^{-1} y_{i+1}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} P_{0|0}^{-1} &= \Pi_0, \\ P_{i+1|i+1}^{-1} &= E_i^T \hat{Q}_i^{-1} E_i - E_i^T \hat{Q}_i^{-1} F_i (P_{i|i}^{-1} + \bar{N}_{f,i}^T \bar{N}_{f,i} + F_i^T \hat{Q}_i^{-1} F_i)^{-1} F_i^T \hat{Q}_i^{-1} E_i \\ &\quad + H_i^T \hat{R}_i^{-1} H_i + \bar{N}_{h,i}^T \bar{N}_{h,i} + \bar{N}_{e,i}^T \bar{N}_{e,i}, \end{aligned} \quad (14)$$

sendo  $\hat{Q}_i^{-1}$  e  $\hat{R}_i^{-1}$  matrizes de parâmetro corrigidas dadas por

$$\begin{aligned} \hat{Q}_i^{-1} &:= Q_i^{-1} + Q_i^{-1} M_{f,i} (\hat{\lambda} I - M_{f,i}^T Q_i^{-1} M_{f,i})^{-1} M_{f,i}^T Q_i^{-1}, \\ \hat{R}_i^{-1} &:= R_i^{-1} + R_i^{-1} M_{h,i} (\hat{\lambda} I - M_{h,i}^T R_i^{-1} M_{h,i})^{-1} M_{h,i}^T R_i^{-1}, \end{aligned} \quad (15)$$

e

$$\bar{N}_{e,i} = \hat{\lambda}^{1/2} N_{e,i}, \quad \bar{N}_{f,i} = \hat{\lambda}^{1/2} N_{f,i}, \quad \bar{N}_{h,i} = \hat{\lambda}^{1/2} N_{h,i}. \quad (16)$$

A estimativa robusta preditora e a respectiva equação de Riccati são dadas da

seguinte forma

$$\begin{aligned}
P_{0|-1}^{-1} \hat{x}_{0|-1} &= P_{0|-1}^{-1} \bar{x}_0, \\
P_{i+1|i}^{-1} \hat{x}_{i+1|i} &= \mathcal{E}_i^T \mathcal{Q}_i^{-1} (I + \mathcal{F}_i (P_{i|i-1}^{-1} + \mathcal{H}_i^T \mathcal{R}_i^{-1} \mathcal{H}_i)^{-1} \mathcal{F}_i^T \mathcal{Q}_i^{-1})^{-1} \mathcal{F}_i (P_{i|i-1}^{-1} + \mathcal{H}_i^T \mathcal{R}_i^{-1} \mathcal{H}_i)^{-1} \\
&\times P_{i|i-1}^{-1} \hat{x}_{i|i-1} + \mathcal{E}_i^T \mathcal{Q}_i^{-1} (I + \mathcal{F}_i (P_{i|i-1}^{-1} + \mathcal{H}_i^T \mathcal{R}_i^{-1} \mathcal{H}_i)^{-1} \mathcal{F}_i^T \mathcal{Q}_i^{-1})^{-1} \\
&\times \mathcal{F}_i (P_{i|i-1}^{-1} + \mathcal{H}_i^T \mathcal{R}_i^{-1} \mathcal{H}_i)^{-1} \mathcal{H}_i^T \mathcal{R}_i^{-1} Y_i,
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
P_{0|-1}^{-1} &= \Pi_0, \\
P_{i+1|i}^{-1} &= E_i^T \hat{Q}_i^{-1} E_i - (E_i^T \hat{Q}_i^{-1} F_i + \bar{N}_{e,i}^T \bar{N}_{f,i}) (P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T \hat{R}_i^{-1} H_i + F_i^T \hat{Q}_i^{-1} F_i \\
&+ \bar{N}_{h,i}^T \bar{N}_{h,i} + \bar{N}_{f,i}^T \bar{N}_{f,i})^{-1} (F_i^T \hat{Q}_i^{-1} E_i + \bar{N}_{f,i}^T \bar{N}_{e,i}) + \bar{N}_{e,i}^T \bar{N}_{e,i}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Os parâmetros modificados utilizados em (17), são definidos a seguir

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_i^{-1} &:= \begin{bmatrix} \hat{Q}_i^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{R}_i^{-1} := \begin{bmatrix} \hat{R}_i^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad Y_i := \begin{bmatrix} y_i \\ 0 \end{bmatrix}, \\
\mathcal{E}_i &:= \begin{bmatrix} E_i \\ \bar{N}_{e,i} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F}_i := \begin{bmatrix} F_i \\ \bar{N}_{f,i} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{H}_i := \begin{bmatrix} H_i \\ \bar{N}_{h,i} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Os filtros nominais na forma de informação, desenvolvidos para o Sistema (7) quando  $\delta F_i = 0$ ,  $\delta E_i = 0$ , e  $\delta H_i = 0$  em (TERRA et al., 2007), serão apresentados a seguir. A estimativa filtrada é dada por

$$\begin{aligned}
P_{0|0}^{-1} \hat{x}_{0|0} &= H_0^T R_0^{-1} y_0, \\
P_{i|i}^{-1} \hat{x}_{i|i} &= E_i^T Q_i^{-1} F_i (F_i^T Q_i^{-1} F_i + P_{i-1|i-1}^{-1})^{-1} P_{i-1|i-1}^{-1} \hat{x}_{i-1|i-1} + H_i^T R_i^{-1} y_i,
\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
P_{0|0}^{-1} &= P_0^{-1} + H_0^T R_0^{-1} H_0, \\
P_{i|i}^{-1} &= E_i^T Q_i^{-1} E_i + H_i^T R_i^{-1} H_i - E_i^T Q_i^{-1} F_i (P_{i-1|i-1}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i)^{-1} F_i^T Q_i^{-1} E_i.
\end{aligned} \tag{21}$$

A estimativa preditora é dada da seguinte forma

$$\begin{aligned}
P_{0|-1}^{-1} \hat{x}_{0|-1} &= 0, \\
P_{i+1|i}^{-1} \hat{x}_{i+1|i} &= E_i^T Q_i^{-1} (I + F_i (P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} F_i^T Q_i^{-1})^{-1} F_i (P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} \\
&\times P_{i|i-1}^{-1} \hat{x}_{i|i-1} + E_i^T Q_i^{-1} (I + F_i (P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} F_i^T Q_i^{-1})^{-1} \\
&\times F_i (P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} H_i^T R_i^{-1} y_i,
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
P_{0|-1}^{-1} &= P_0^{-1}, \\
P_{i+1|i}^{-1} &= E_i^T Q_i^{-1} E_i - E_i^T Q_i^{-1} F_i (P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i + F_i^T Q_i^{-1} F_i)^{-1} F_i^T Q_i^{-1} E_i.
\end{aligned} \tag{23}$$

## 2.3 Filtragem para Sistemas Lineares Sujeitos a Saltos Markovianos

Sistemas dinâmicos são sujeitos, em alguns casos, à mudanças drásticas em seu comportamento devido a fatores diversos, como variáveis de ambientes externos, falhas de componentes do sistema, entre outras. Estas classes de sistemas podem ser modeladas por um conjunto de sistemas lineares cuja transição pode ser dada por uma cadeia de Markov, esta classe de sistemas é descrita por sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos.

Considere o seguinte SLSM

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= F_{i,\theta_i} x_i + G_{i,\theta_i} u_i, \\ y_i &= H_{i,\theta_i} x_i + D_{i,\theta_i} v_i, \quad \text{para } i \geq 0, \end{aligned} \quad (24)$$

sendo  $x_i \in \mathbb{R}^n$  a variável de estado,  $y_i \in \mathbb{R}^m$  a variável de saída,  $u_i \in \mathbb{R}^p$  e  $v_i \in \mathbb{R}^q$  as variáveis de distúrbio do estado e distúrbio da saída respectivamente,  $\theta_i$  é a cadeia de Markov discreta no tempo com espaço de estados finito  $\{1, \dots, N\}$  e  $P = [p_{jk}]$  a matriz de transição de probabilidade. Seja  $\pi_{i,j} := P(\theta_i = j)$ ,  $F_{i,k} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $G_{i,k} \in \mathbb{R}^{n \times q_1}$ ,  $H_{i,k} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , e  $D_{i,k} \in \mathbb{R}^{m \times q_2}$  ( $k = 1, \dots, N$ ) as matrizes de parâmetros conhecidas e de dimensões apropriadas. Os distúrbios aleatórios  $\{u_i\}$  e  $\{v_i\}$  são assumidos como tendo média nula, são estacionários e mutuamente independentes com matrizes de covariância iguais a  $U_i$  e  $V_i$  respectivamente.  $x_0 1_{\{\theta_0=k\}}$ ,  $k = 1, \dots, N$ , são vetores aleatórios com  $\mathcal{E} \{x_0 1_{\{\theta_0=k\}}\} = \mu_k$ , onde  $1_{\{\cdot\}}$  denota a medida de Dirac e  $\mathcal{E} \{x_0 x_0^T 1_{\{\theta_0=k\}}\} = V_k$ ,  $x_0$ ,  $\{\theta_i\}$  são independentes de  $\{u_i\}$  e  $\{v_i\}$ .

Em (COSTA; GUERRA, 2002) foi desenvolvido um filtro, tipo Kalman, para SLSM. As estimativas foram desenvolvidas considerando a seguinte variável de estado aumentado

$$\begin{aligned} z_i &:= \begin{bmatrix} z_{i,1}^T & \dots & z_{i,N}^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{Nn}, \\ z_{i,k} &:= x_i 1_{\{\theta_i=k\}} \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (25)$$

De acordo com (COSTA; GUERRA, 2002), o modelo aumentado de (24) é escrito como

$$\begin{aligned} z_{i+1} &= \mathcal{F}_i z_i + \psi_i, \\ y_i &= \mathcal{H}_i z_i + \varphi_i, \quad \text{para } i \geq 0, \end{aligned} \quad (26)$$

sendo as matrizes de parâmetros dadas por

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_i &:= \begin{bmatrix} p_{11}F_{i,1} & \cdots & p_{N1}F_{i,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1N}F_{i,1} & \cdots & p_{NN}F_{i,N} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{Nn \times Nn}, \\ \mathcal{H}_i &:= \begin{bmatrix} H_{i,1} & \cdots & H_{i,N} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times Nn},\end{aligned}\quad (27)$$

as variáveis de distúrbio de saída e estado  $\varphi_i$  e  $\psi_i$  são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned}\varphi_i &:= D_{i,\theta_i}w_i, \\ \psi_i &:= \mathcal{M}_{i+1}z_i + \vartheta_i,\end{aligned}\quad (28)$$

sendo

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{i+1} &:= \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{i+1,1} \\ \vdots \\ \mathcal{M}_{i+1,N} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{M}_{i+1,k} &:= \begin{bmatrix} (1_{\{\theta_{i+1}=k\}} - p_{1k})F_{i,1} \\ \vdots \\ (1_{\{\theta_{i+1}=k\}} - p_{Nk})F_{i,N} \end{bmatrix}^T, \\ \vartheta_i &:= \begin{bmatrix} 1_{\{\theta_{i+1}=1\}}G_{i,\theta_i}u_i \\ \vdots \\ 1_{\{\theta_{i+1}=N\}}G_{i,\theta_i}u_i \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (29)$$

As matrizes de segundo momento associada às variáveis de distúrbio  $\varphi_i$  e  $\psi_i$  são

$$\begin{aligned}R_i &:= \mathcal{E}\{\varphi_i\varphi_i^T\} = \mathcal{D}_i\mathcal{D}_i^T, \\ W_i &:= \mathcal{E}\{\psi_i\psi_i^T\} = \text{diag}\left[\sum_{j=1}^N \pi_{i,j}p_{jk}G_{i,j}G_{i,j}^T\right] + \mathcal{B}(\mathcal{Z}_i), \\ \mathcal{B}(\mathcal{Z}_i) &:= \text{diag}\left[\sum_{j=1}^N p_{jk}F_{i,j}Z_{i,j}F_{i,j}^T\right] - \mathcal{F}_i\left(\text{diag}[Z_{i,k}]\right)\mathcal{F}_i^T,\end{aligned}\quad (30)$$

sendo

$$\begin{aligned}Z_i &:= \text{diag}[Z_{i,k}], \\ Z_{i,k} &:= \mathcal{E}\{z_{i,k}z_{i,k}^T\},\end{aligned}\quad (31)$$

$\mathcal{Z}_i = (Z_{i,1}, \dots, Z_{i,N})$ , e  $Z_{i,k} \geq 0, k = 1, \dots, N$  são dados pela equação recursiva

$$\begin{aligned}Z_{0,k} &:= \bar{V}_k, \\ Z_{i+1,k} &:= \sum_{j=1}^N p_{jk}F_{i,j}Z_{i,j}F_{i,j}^T + \sum_{j=1}^N \pi_{i,j}p_{jk}G_{i,j}G_{i,j}^T,\end{aligned}\quad (32)$$



sendo

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_i &:= \begin{bmatrix} D_{i,1}\pi_{i,1}W_i^{1/2} & \dots & D_{i,N}\pi_{i,N}W_i^{1/2} \end{bmatrix}, \\ \pi_{i,k} &:= \mathcal{P}(\theta_i = k). \end{aligned} \quad (33)$$

O filtro para SLSM desenvolvido por (COSTA; GUERRA, 2002) é dado por

$$\hat{x}_{i|i} := \sum_{j=1}^N \hat{z}_{i,j|i}, \quad (34)$$

$$\hat{z}_{i|i} := \hat{z}_{i|i-1} + Z_{i|i-1}\mathcal{H}_i^T(\mathcal{H}_i Z_{i|i-1}\mathcal{H}_i^T + R_i)^{-1}(y_i - \mathcal{H}_i\hat{z}_{i|i-1}), \quad (35)$$

$$\hat{z}_{0|-1} := \mathcal{E}\{z_0\} = \begin{bmatrix} \mu_1^T & \dots & \mu_N^T \end{bmatrix}^T,$$

$$\hat{z}_{i|i-1} := \mathcal{F}_i\hat{z}_{i-1|i-1}, \quad (36)$$

$$\tilde{Z}_{0|-1} := \Pi_0,$$

$$\tilde{Z}_{i+1|i} := \mathcal{F}_i\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{F}_i^T - \mathcal{F}_i\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{H}_i^T(\mathcal{H}_i\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{H}_i^T + R_i)^{-1}\mathcal{H}_i\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{F}_i^T + W_i, \quad (37)$$

onde (37), é a equação de Riccati do filtro.

## 2.4 Algoritmo Array Rápido para Filtragem de Sistemas Espaço de Estado com Variação Estruturada dos Parâmetros

Em (SAYED; KAILATH, 1994) foram desenvolvidos algoritmos *array* rápidos com variação estruturada dos parâmetros para sistemas espaço de estado. Estes algoritmos são uma alternativa computacional para o cálculo da equação de Riccati (3). Isto porque, ao invés de propagarem a variável " $P_{i+1|i}$ ", é propagada a matriz " $M_i$ ", da diferença  $M_i S_i M_i^T = P_{i+1|i} - \Psi_i P_{i|i-1} \Psi_i^T$ , sendo " $\Psi_i$ " uma matriz conveniente, obtida de acordo com a necessidade de variação estruturada dos parâmetros mediante à aparição de distúrbios ao longo do processo.

O processo de propagação da  $M_i$  é dado conforme os seguintes passos:

**Passo 1:** Formar um determinado pré-array que contenha  $M_i$ .

**Passo 2:** O pré-array é reduzido a uma forma triangular através de operações J-unitárias.

**Passo 3:** A matriz triangular é denominada pós-array e contém  $M_{i+1}$ .

**Passo 4:**  $P_{i+1|i}$  pode ser calculada através da seguinte equação  $P_{i+1|i} = \Psi_i P_{i|i-1} \Psi_i^T + M_i S_i M_i^T$ .

**Passo 5:** O algoritmo é interrompido quando atinge a quantidade de iterações necessárias, estabelecidas previamente.

Nesta seção, serão apresentados os algoritmos desenvolvidos em (SAYED; KAILATH, 1994). Primeiramente, será demonstrado o algoritmo com variação dos parâmetros  $F_i, H_i, G_i$  e posteriormente o algoritmo com a variação de todos os parâmetros do sistema,  $F_i, H_i, G_i, C_i, Q_i, R_i$ .

Para o algoritmo na Subseção 2.4.1, pode-se considerar que é um modelo de variação estruturada dos parâmetros no tempo, se existem matrizes  $\Psi_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , de tal forma que  $F_i, G_i$  e  $H_i$ , variam de acordo com as seguintes regras

$$H_i = H_{i+1}\Psi_i, \quad F_{i+1}\Psi_i = \Psi_{i+1}F_i, \quad G_{i+1} = \Psi_{i+1}G_i. \quad (38)$$

Já para o algoritmo que será apresentado na Subseção 2.4.2, considere a seguinte variação estruturada dos parâmetros

$$H_i = H_{i+1}\Psi_i, \quad F_{i+1}\Psi_i = \Psi_{i+1}F_i, \quad G_{i+1}C_{i+1} = \Psi_{i+1}G_iC_i. \quad (39)$$

Para este caso, podemos ainda definir  $T_i = G_iQ_iG_i^T$ , e introduzir as seguintes diferenças

$$\delta R_i = R_{i+1} - R_i, \quad \delta_{\Psi_{i+1}}T_i = T_{i+1} - \Psi_{i+1}T_i\Psi_{i+1}^T, \quad (40)$$

fatorando-os como

$$\delta R_i = V_iN_iV_i^T, \quad \delta_{\Psi_{i+1}}T_i = X_iE_iX_i^T, \quad (41)$$

onde  $N_i$  e  $E_i$  são matrizes assinatura, formada por  $\pm 1$  na diagonal principal, de acordo com os sinais dos autovalores de  $\delta R_i$  e  $\delta_{\Psi_{i+1}}T_i$  respectivamente, e zeros nas demais posições.

### 2.4.1 Variação dos Parâmetros $F_i, H_i, G_i$

Será apresentado nesta subseção o algoritmo array rápido com variação estruturada apenas dos parâmetros,  $F_i, H_i, G_i$ .

---

*Algoritmo Array Rápido (Estimativa Preditora)*

---

**Passo 0:** Calcular as condições iniciais

$$\begin{aligned} P_{0|-1} &= \Pi_0 = 0, \\ P_{1|0} &= G_1QG_1^T. \end{aligned} \quad (42)$$

**Passo 1:** Calcular  $M_i$  utilizando uma matriz unitária  $\Upsilon_{1,i}$  de dimensões apropriadas

$$\begin{bmatrix} R_{\epsilon,i}^{1/2} & H_{i+1}M_i \\ \Psi_{i+1}\bar{K}_{p,i} & F_{i+1}M_i \end{bmatrix} \Upsilon_{1,i} = \begin{bmatrix} R_{\epsilon,i+1}^{1/2} & 0 \\ \bar{K}_{p,i+1} & M_{i+1} \end{bmatrix}, \quad (43)$$

onde

$$\begin{aligned} M_i S_i M_i^T &= P_{i+1|i} - \Psi_i P_{i|i-1} \Psi_i^T, \\ R_{\epsilon,i} &= R + H_i P_{i|i-1} H_i^T, \\ \bar{K}_{p,i} &= F_i P_{i|i-1} H_i^T R_{\epsilon,i}^{-T/2}, \end{aligned} \quad (44)$$

sendo  $S_i \in \mathbb{R}^{\alpha \times \alpha}$  uma matriz assinatura, formada por  $\pm 1$  na diagonal principal, de acordo com os sinais dos autovalores de  $\delta P_i$ , e zeros nas demais posições.

**Passo 2:** Portanto,  $P_{i+1|i}$  pode ser calculado através da seguinte equação de diferença

$$P_{i+1|i} = \Psi_i P_{i|i-1} \Psi_i^T + M_i S_i M_i^T. \quad (45)$$

### 2.4.2 Variação dos Parâmetros $F_i, H_i, G_i, C_i, Q_i, R_i$

Será apresentado nesta subseção o algoritmo array rápido com variação estruturada dos parâmetros  $F_i, H_i, G_i, C_i, Q_i, R_i$ .

#### *Algoritmo Array Rápido (Estimativa Preditora)*

**Passo 0:** Calcular as condições iniciais

$$\begin{aligned} P_{0|-1} &= \Pi_0 = 0, \\ P_{1|0} &= G_1 Q_1 G_1^T. \end{aligned} \quad (46)$$

**Passo 1:** Calcular  $M_i$  utilizando uma matriz unitária  $\Upsilon_{2,i}$  de dimensões apropriadas

$$\begin{bmatrix} R_{\epsilon,i}^{1/2} & H_{i+1} M_i & V_i & 0 \\ \Psi_{i+1} \bar{K}_{p,i} & F_{i+1} M_i & 0 & X_i \end{bmatrix} \Upsilon_{2,i} = \begin{bmatrix} R_{\epsilon,i+1}^{1/2} & 0 & 0 \\ \bar{K}_{p,i+1} & M_{i+1} & 0 \end{bmatrix}, \quad (47)$$

onde

$$\begin{aligned} M_i S_i M_i^T &= P_{i+1|i} - \Psi_i P_{i|i-1} \Psi_i^T, \\ R_{\epsilon,i} &= R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T, \\ \bar{K}_{p,i} &= F_i P_{i|i-1} H_i^T R_{\epsilon,i}^{-T/2}, \\ V_i N_i V_i^T &= R_{i+1} - R_i, \\ X_i E_i X_i^T &= T_{i+1} - \Psi_{i+1} T_i \Psi_{i+1}^T. \end{aligned} \quad (48)$$

sendo  $S_i \in \mathbb{R}^{\alpha \times \alpha}$  uma matriz assinatura.

**Passo 2:** Portanto,  $P_{i+1|i}$  pode ser calculado através da seguinte equação de diferença

$$P_{i+1|i} = \Psi_i P_{i|i-1} \Psi_i^T + M_i S_i M_i^T. \quad (49)$$

### 3 Algoritmos Array Rápidos Para Filtragem de Sistemas Singulares com Variação Estruturada dos Parâmetros

Neste capítulo serão deduzidos os algoritmos *array* rápidos para filtros robustos na forma de informação para sistemas singulares com variação estruturada dos parâmetros. Estes algoritmos visam melhorar os cálculos das matrizes de informação " $P_{i|i}^{-1}$ "(14) e " $P_{i|i-1}^{-1}$ "(18) da equação de Riccati, respectivamente utilizadas nas expressões de estimativa ótima, " $\hat{x}_{i|i}$ " para o problema de filtragem, e " $\hat{x}_{i|i-1}$ " para o problema de predição. Assim, neste capítulo serão deduzidos os algoritmos na estimativa filtrada e preditora. Primeiramente será apresentado o algoritmo *array* rápido para variação estruturada dos parâmetros  $E, F, H, \bar{N}_{e,i}, \bar{N}_{f,i}, \bar{N}_{h,i}$ , e posteriormente será desenvolvido o algoritmo com variação estruturada dos parâmetros  $E, F, H, \bar{N}_{e,i}, \bar{N}_{f,i}, \bar{N}_{h,i}, \hat{Q}^{-1}, \hat{R}^{-1}$ . Os resultados obtidos neste capítulo fazem parte da contribuição original desta dissertação.

#### 3.1 Estimativa Filtrada com Variação dos Parâmetros $E_i, F_i, H_i, \bar{N}_{e,i}, \bar{N}_{f,i}, \bar{N}_{h,i}$

Seja,  $\delta P_{i|i}^{-1} := P_{i+1|i+1}^{-1} - \Psi_i P_{i|i}^{-1} \Psi_i^T$ , a diferença da equação de Riccati, onde  $\Psi_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é uma matriz conveniente. Esta diferença pode ser fatorada da seguinte forma

$$\delta P_{i|i}^{-1} := P_{i+1|i+1}^{-1} - \Psi_i P_{i|i}^{-1} \Psi_i^T := L_i S_i L_i^T \quad (50)$$

sendo  $S_i \in \mathbb{R}^{\alpha \times \alpha}$  uma matriz assinatura.

Ainda utilizando  $\Psi_i$ , os parâmetros  $E, F, H, \bar{N}_{e,i}, \bar{N}_{f,i}, \bar{N}_{h,i}$  variam de forma estruturada no tempo da seguinte forma

$$\begin{aligned} E_i \Psi_{i+1}^T &= E_{i+1}, & F_i \Psi_i^T &= F_{i+1}, & H_i \Psi_{i+1}^T &= H_{i+1}, \\ \bar{N}_{e,i} \Psi_{i+1}^T &= \bar{N}_{e,i+1}, & \bar{N}_{f,i} \Psi_i^T &= \bar{N}_{f,i+1}, & \bar{N}_{h,i} \Psi_{i+1}^T &= \bar{N}_{h,i+1}. \end{aligned} \quad (51)$$

Utilizando estas definições, o algoritmo *array* rápido que calcula a equação de Riccati (14) de maneira alternativa, utilizada na estimativa filtrada, pode ser calculado como segue.

---

*Algoritmo Array Rápido (Estimativa Filtrada)*

---

**Passo 0:** Calcular as condições iniciais

$$\begin{aligned} P_{0|0}^{-1} &= \Pi_0, \\ P_{1|1}^{-1} &= E_1^T \hat{Q}^{-1} E_1 - E_1^T \hat{Q}^{-1} F_1 (\Pi_0 + \bar{N}_{f,1}^T \bar{N}_{f,1} + F_1^T \hat{Q}^{-1} F_1)^{-1} F_1^T \hat{Q}^{-1} E_1 \\ &\quad + H_1^T \hat{R}^{-1} H_1 + \bar{N}_{h,1}^T \bar{N}_{h,1} + \bar{N}_{e,1}^T \bar{N}_{e,1}. \end{aligned} \quad (52)$$

**Passo 1:** Calcular  $L_{i+1}$  utilizando uma matriz unitária  $\Theta_{1,i}$  de dimensões apropriadas

$$\begin{bmatrix} \Psi_i R_{\epsilon,i}^{1/2} & L_i \\ \Psi_{i+1} K_{f,i} & 0 \end{bmatrix} \Theta_{1,i} = \begin{bmatrix} R_{\epsilon,i+1}^{1/2} & 0 \\ K_{f,i+1} & L_{i+1} \end{bmatrix}, \quad (53)$$

onde

$$\begin{aligned} L_i S_i L_i^T &:= P_{i+1|i+1}^{-1} - \Psi_i P_{i|i}^{-1} \Psi_i^T, \\ R_{\epsilon,i} &:= P_{i|i}^{-1} + \bar{N}_{f,i}^T \bar{N}_{f,i} + F_i^T \hat{Q}^{-1} F_i, \\ K_{f,i} &:= E_i^T \hat{Q}^{-1} F_i R_{\epsilon,i}^{-T/2}, \end{aligned} \quad (54)$$

sendo  $S_i \in \mathbb{R}^{\alpha \times \alpha}$  uma matriz assinatura.

**Passo 2:** Portanto,  $P_{i+2|i+2}^{-1}$  pode ser calculado através da seguinte equação de diferença

$$P_{i+2|i+2}^{-1} = \Psi_{i+1} P_{i+1|i+1}^{-1} \Psi_{i+1}^T + L_{i+1} S_{i+1} L_{i+1}^T. \quad (55)$$

**Prova:**

A demonstração deste algoritmo é feita da seguinte maneira. A equação de diferença (50), para  $\delta P_{i+1}^{-1}$ , pode ser escrita da seguinte forma

$$P_{i+2|i+2}^{-1} - \Psi_{i+1} P_{i+1|i+1}^{-1} \Psi_{i+1}^T = L_{i+1} S_{i+1} L_{i+1}^T. \quad (56)$$

Da Equação (14), (56) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} P_{i+2|i+2}^{-1} - \Psi_{i+1} P_{i+1|i+1}^{-1} \Psi_{i+1}^T &= -\Psi_{i+1} P_{i+1|i+1}^{-1} \Psi_{i+1}^T + E_{i+1}^T \hat{Q}^{-1} E_{i+1} - K_{f,i+1} K_{f,i+1}^T \\ &\quad + H_{i+1}^T \hat{R}^{-1} H_{i+1} + \bar{N}_{h,i+1}^T \bar{N}_{h,i+1} + \bar{N}_{e,i+1}^T \bar{N}_{e,i+1}, \\ K_{f,i+1} &= E_{i+1}^T \hat{Q}^{-1} F_{i+1} R_{\epsilon,i+1}^{-T/2}, \\ R_{\epsilon,i+1} &= P_{i+1|i+1}^{-1} + \bar{N}_{f,i+1}^T \bar{N}_{f,i+1} + F_{i+1}^T \hat{Q}^{-1} F_{i+1}. \end{aligned} \quad (57)$$

O complemento de Schur (Apêndice A) de,  $P_{i+2|i+2}^{-1} - \Psi_{i+1} P_{i+1|i+1}^{-1} \Psi_{i+1}^T$ , é dado por

$$\begin{bmatrix} R_{\epsilon,i+1} & F_{i+1}^T \hat{Q}^{-1} E_{i+1} \\ E_{i+1}^T \hat{Q}^{-1} F_{i+1} & W \end{bmatrix}, \quad (58)$$

sendo

$$W = -\Psi_{i+1}P_{i+1|i+1}^{-1}\Psi_{i+1}^T + E_{i+1}^T\hat{Q}^{-1}E_{i+1} + H_{i+1}^T\hat{R}^{-1}H_{i+1} + \bar{N}_{h,i+1}^T\bar{N}_{h,i+1} + \bar{N}_{e,i+1}^T\bar{N}_{e,i+1}. \quad (59)$$

A Matriz (58) pode ser fatorada da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} \Psi_i R_{\epsilon,i}^{1/2} & L_i \\ \Psi_{i+1} K_{f,i} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & S_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{\epsilon,i}^{T/2} \Psi_i^T & K_{f,i}^T \Psi_{i+1}^T \\ L_i^T & 0 \end{bmatrix}. \quad (60)$$

Da Fatoração (60), surge a matriz

$$\begin{bmatrix} \Psi_i R_{\epsilon,i}^{1/2} & L_i \\ \Psi_{i+1} K_{f,i} & 0 \end{bmatrix}. \quad (61)$$

A Matriz (61) é denominada *pré-array*. Pode-se definir o *pós-array*, fatorando (58) através da seguinte decomposição (Apêndice A)

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \Delta A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (62)$$

sendo  $\Delta A$  o complemento de Schur de A em  $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ . Usando esta propriedade, têm-se

$$\begin{bmatrix} R_{\epsilon,i+1} & F_{i+1}^T \hat{Q}^{-1} E_{i+1} \\ E_{i+1}^T \hat{Q}^{-1} F_{i+1} & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ (E_{i+1}^T \hat{Q}^{-1} F_{i+1}) R_{\epsilon,i+1}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{\epsilon,i+1} & 0 \\ 0 & P_{i+2}^{-1} - \Psi_{i+1}^T P_{i+1}^{-1} \Psi_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & R_{\epsilon,i+1}^{-1} (F_{i+1}^T \hat{Q}^{-1} E_{i+1}) \\ 0 & I \end{bmatrix}. \quad (63)$$

Pode-se ainda fatorar a matriz central, pela fatoração dos blocos da sua diagonal da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ (E_{i+1}^T \hat{Q}^{-1} F_{i+1}) R_{\epsilon,i+1}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{\epsilon,i+1}^{1/2} & 0 \\ 0 & L_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & S_{i+1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} R_{\epsilon,i+1}^{T/2} & 0 \\ 0 & L_{i+1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & R_{\epsilon,i+1}^{-1} (F_{i+1}^T \hat{Q}^{-1} E_{i+1}) \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (64)$$

simplificando (64), têm-se

$$\begin{bmatrix} R_{\epsilon,i+1}^{1/2} & 0 \\ K_{f,i+1} & L_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & S_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{\epsilon,i+1}^{T/2} & K_{f,i+1}^T \\ 0 & L_{i+1}^T \end{bmatrix}. \quad (65)$$

Portanto, de (65) surge a matriz

$$\begin{bmatrix} R_{\epsilon,i+1}^{1/2} & 0 \\ K_{f,i+1} & L_{i+1} \end{bmatrix}, \quad (66)$$

denominada *pós-array*.

De acordo com o Lema (A.0.1), existe uma matriz  $(I \oplus S_i)$ -unitária  $\Theta_{1,i}$ , tal que, pode-se igualar (61) e (66), formando o seguinte algoritmo *array* rápido

$$\begin{bmatrix} \Psi_i R_{\epsilon,i}^{1/2} & L_i \\ \Psi_{i+1} K_{f,i} & 0 \end{bmatrix} \Theta_{1,i} = \begin{bmatrix} R_{\epsilon,i+1}^{1/2} & 0 \\ K_{f,i+1} & L_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (67)$$

Assim, pode ser calculada,  $P_{i+2|i+2}^{-1}$ , através da seguinte equação de diferença

$$P_{i+2|i+2}^{-1} = \Psi_{i+1} P_{i+1|i+1}^{-1} \Psi_{i+1}^T + L_{i+1} S_{i+1} L_{i+1}^T. \quad (68)$$

## 3.2 Estimativa Filtrada com Variação dos Parâmetros $E_i, F_i, H_i, \bar{N}_{e,i}, \bar{N}_{f,i}, \bar{N}_{h,i}, \hat{Q}_i^{-1}, \hat{R}_i^{-1}$

Considere agora, a variações estruturadas dos parâmetros  $\hat{Q}_i^{-1}$  e  $\hat{R}_i^{-1}$  da seguinte forma

$$\delta \hat{R}_i^{-1} = \hat{R}_{i+1}^{-1} - \hat{R}_i^{-1} = V_i M_i V_i^T, \quad \delta \hat{Q}_i^{-1} = \hat{Q}_{i+1}^{-1} - \hat{Q}_i^{-1} = U_i N_i U_i^T, \quad (69)$$

onde  $M_i$  e  $N_i$  são matrizes assinatura.

Utilizando estas definições e (51), o algoritmo *array* rápido, com variação estruturada de todos os parâmetros, pode ser calculado da seguinte forma.

---

### Algoritmo Array Rápido (Estimativa Filtrada)

---

**Passo 0:** Calcular as condições iniciais

$$\begin{aligned} P_{0|0}^{-1} &= \Pi_0, \\ P_{1|1}^{-1} &= E_1^T \hat{Q}_1^{-1} E_1 - E_1^T \hat{Q}_1^{-1} F_1 (\Pi_0 + \bar{N}_{f,1}^T \bar{N}_{f,1} + F_1^T \hat{Q}_1^{-1} F_1)^{-1} F_1^T \hat{Q}_1^{-1} E_1 \\ &+ H_1^T \hat{R}_1^{-1} H_1 + \bar{N}_{h,1}^T \bar{N}_{h,1} + \bar{N}_{e,1}^T \bar{N}_{e,1}. \end{aligned} \quad (70)$$

**Passo 1:** Calcular  $M_{i+1}$  utilizando uma matriz unitária  $\Theta_{2,i}$  de dimensões apropriadas

$$\begin{bmatrix} \Psi_i R_{\epsilon,i}^{1/2} & L_i & 0 & F_{i+1}^T U_i \\ \Psi_{i+1} K_{f,i} & 0 & H_{i+1}^T V_i & E_{i+1}^T U_i \end{bmatrix} \Theta_{2,i} = \begin{bmatrix} R_{\epsilon,i+1}^{1/2} & 0 \\ K_{f,i+1} & L_{i+1} \end{bmatrix}, \quad (71)$$

sendo

$$\begin{aligned} L_i S_i L_i^T &= P_{i+1|i+1}^{-1} - \Psi_i P_{i|i}^{-1} \Psi_i^T, \\ R_{\epsilon,i} &= P_{i|i}^{-1} + \bar{N}_{f,i}^T \bar{N}_{f,i} + F_i^T \hat{Q}_i^{-1} F_i, \\ K_{f,i} &= E_i^T \hat{Q}_i^{-1} F_i R_{\epsilon,i}^{-T/2}, \\ V_i M_i V_i^T &= \hat{R}_{i+1}^{-1} - \hat{R}_i^{-1}, \\ U_i N_i U_i^T &= \hat{Q}_{i+1}^{-1} - \hat{Q}_i^{-1}, \end{aligned} \quad (72)$$

sendo  $S_i$  uma matriz assinatura.

**Passo 2:** Portanto,  $P_{i+2|i+2}^{-1}$  pode ser calculado através da seguinte equação de diferença

$$P_{i+2|i+2}^{-1} = \Psi_{i+1} P_{i+1|i+1}^{-1} \Psi_{i+1}^T + L_{i+1} S_{i+1} L_{i+1}^T. \quad (73)$$

**Prova:**

A demonstração deste algoritmo é feita da seguinte maneira. A equação de diferença (50), para  $\delta P_{i+1}^{-1}$ , pode ser escrita da seguinte forma

$$P_{i+2|i+2}^{-1} - \Psi_{i+1} P_{i+1|i+1}^{-1} \Psi_{i+1}^T = L_{i+1} S_{i+1} L_{i+1}^T. \quad (74)$$

Da Equação (14), (74) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} P_{i+2|i+2}^{-1} - \Psi_{i+1} P_{i+1|i+1}^{-1} \Psi_{i+1}^T &= -\Psi_{i+1} P_{i+1|i+1}^{-1} \Psi_{i+1}^T + E_{i+1}^T \hat{Q}_{i+1}^{-1} E_{i+1} - K_{f,i+1} K_{f,i+1}^T \\ &\quad + H_{i+1}^T \hat{R}_{i+1}^{-1} H_{i+1} + \bar{N}_{h,i+1}^T \bar{N}_{h,i+1} + \bar{N}_{e,i+1}^T \bar{N}_{e,i+1}, \quad (75) \\ K_{f,i+1} &= E_{i+1}^T \hat{Q}_{i+1}^{-1} F_{i+1} R_{e,i+1}^{-T/2}, \\ R_{e,i+1} &= P_{i+1|i+1}^{-1} + \bar{N}_{f,i+1}^T \bar{N}_{f,i+1} + F_{i+1}^T \hat{Q}_{i+1}^{-1} F_{i+1}. \end{aligned}$$

O complemento de Schur (Apêndice A) de,  $P_{i+2|i+2}^{-1} - \Psi_{i+1} P_{i+1|i+1}^{-1} \Psi_{i+1}^T$ , é dado por

$$\begin{bmatrix} R_{e,i+1} & F_{i+1}^T \hat{Q}_{i+1}^{-1} E_{i+1} \\ E_{i+1}^T \hat{Q}_{i+1}^{-1} F_{i+1} & W \end{bmatrix}, \quad (76)$$

sendo

$$W = -\Psi_{i+1} P_{i+1|i+1}^{-1} \Psi_{i+1}^T + E_{i+1}^T \hat{Q}_{i+1}^{-1} E_{i+1} + H_{i+1}^T \hat{R}_{i+1}^{-1} H_{i+1} + \bar{N}_{h,i+1}^T \bar{N}_{h,i+1} + \bar{N}_{e,i+1}^T \bar{N}_{e,i+1}. \quad (77)$$

A Matriz (58) pode ser fatorada da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} \Psi_i R_{e,i}^{1/2} & L_i & 0 & F_{i+1}^T U_i \\ \Psi_{i+1} K_{f,i} & 0 & H_{i+1}^T V_i & E_{i+1}^T U_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{e,i}^{T/2} \Psi_i^T & K_{f,i}^T \Psi_{i+1}^T \\ L_i^T & 0 \\ 0 & V_i^T H_{i+1} \\ U_i^T F_{i+1} & U_i^T E_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (78)$$

Da Fatoração (78), surge a matriz

$$\begin{bmatrix} \Psi_i R_{e,i}^{1/2} & L_i & 0 & F_{i+1}^T U_i \\ \Psi_{i+1} K_{f,i} & 0 & H_{i+1}^T V_i & E_{i+1}^T U_i \end{bmatrix}. \quad (79)$$

A Matriz (79) é denominada *pré-array*. Pode-se definir o *pós-array*, fatorando (76) através da seguinte decomposição (Apêndice A)

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \Delta A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (80)$$



sendo  $\Delta A$  o complemento de Schur de  $A$  em  $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ . Usando esta propriedade, têm-se

$$\begin{bmatrix} R_{\epsilon,i+1} & F_{i+1}^T \hat{Q}_{i+1}^{-1} E_{i+1} \\ E_{i+1}^T \hat{Q}_{i+1}^{-1} F_{i+1} & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ (E_{i+1}^T \hat{Q}_{i+1}^{-1} F_{i+1}) R_{\epsilon,i+1}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{\epsilon,i+1} & 0 \\ 0 & P_{i+2}^{-1} - \Psi_{i+1}^T P_{i+1}^{-1} \Psi_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & R_{\epsilon,i+1}^{-1} (F_{i+1}^T \hat{Q}_{i+1}^{-1} E_{i+1}) \\ 0 & I \end{bmatrix}. \quad (81)$$

Pode-se ainda fatorar a matriz central, pela fatoração dos blocos da sua diagonal da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ (E_{i+1}^T \hat{Q}_{i+1}^{-1} F_{i+1}) R_{\epsilon,i+1}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{\epsilon,i+1}^{1/2} & 0 \\ 0 & L_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & S_{i+1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} R_{\epsilon,i+1}^{T/2} & 0 \\ 0 & L_{i+1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & R_{\epsilon,i+1}^{-1} (F_{i+1}^T \hat{Q}_{i+1}^{-1} E_{i+1}) \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (82)$$

simplicando (82), têm-se

$$= \begin{bmatrix} R_{\epsilon,i+1}^{1/2} & 0 \\ K_{f,i+1} & L_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & S_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{\epsilon,i+1}^{T/2} & K_{f,i+1}^T \\ 0 & L_{i+1}^T \end{bmatrix}. \quad (83)$$

Portanto, de (83) surge a matriz

$$\begin{bmatrix} R_{\epsilon,i+1}^{1/2} & 0 \\ K_{f,i+1} & L_{i+1} \end{bmatrix}, \quad (84)$$

denominada *pós-array*.

De acordo com o Lema (A.0.1), existe uma matriz  $(I \oplus S_i \oplus M_i \oplus N_i)$ -unitária  $\Theta_{2,i}$ , tal que, igualando (79) e (84), obtêm-se o seguinte algoritmo *array* rápido

$$\begin{bmatrix} \Psi_i R_{\epsilon,i}^{1/2} & L_i & 0 & F_{i+1}^T U_i \\ \Psi_{i+1} K_{f,i} & 0 & H_{i+1}^T V_i & E_{i+1}^T U_i \end{bmatrix} \Theta_{2,i} = \begin{bmatrix} R_{\epsilon,i+1}^{1/2} & 0 \\ K_{f,i+1} & L_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (85)$$

Assim, pode ser calculada,  $P_{i+2|i+2}^{-1}$ , através da seguinte equação de diferença

$$P_{i+2|i+2}^{-1} = \Psi_{i+1} P_{i+1|i+1}^{-1} \Psi_{i+1}^T + L_{i+1} S_{i+1} L_{i+1}^T. \quad (86)$$

### 3.3 Estimativa Preditora com Variação dos Parâmetros $E_i$ , $F_i$ , $H_i$ , $\bar{N}_{e,i}$ , $\bar{N}_{f,i}$ , $\bar{N}_{h,i}$

Seja,  $\delta P_{i|i-1}^{-1} := P_{i+1|i}^{-1} - \Psi_i P_{i|i-1}^{-1} \Psi_i^T$ , a diferença da equação de Riccati, onde  $\Psi_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é uma matriz conveniente. Esta diferença pode ser fatorada da seguinte forma

$$\delta P_{i|i-1}^{-1} := P_{i+1|i}^{-1} - \Psi_i P_{i|i-1}^{-1} \Psi_i^T := L_i S_i L_i^T \quad (87)$$

sendo  $S_i$  uma matriz assinatura.

Ainda utilizando  $\Psi_i$ , os parâmetros  $E, F, H, \bar{N}_{e,i}, \bar{N}_{f,i}, \bar{N}_{h,i}$  variam de forma estruturada no tempo da seguinte forma

$$\begin{aligned} E_i \Psi_{i+1}^T &= E_{i+1}, & F_i \Psi_i^T &= F_{i+1}, & H_i \Psi_i^T &= H_{i+1}, \\ \bar{N}_{e,i} \Psi_{i+1}^T &= \bar{N}_{e,i+1}, & \bar{N}_{f,i} \Psi_i^T &= \bar{N}_{f,i+1}, & \bar{N}_{h,i} \Psi_i^T &= \bar{N}_{h,i+1}. \end{aligned} \quad (88)$$

Utilizando estas definições, o algoritmo *array* rápido que calcula a equação de Riccati (18), utilizada na estimativa preditora, pode ser calculada de maneira alternativa como segue.

---

*Algoritmo Array Rápido (Estimativa Preditora)*

---

**Passo 0:** Calcular as condições iniciais

$$\begin{aligned} P_{0|-1}^{-1} &= \Pi_0, \\ P_{0|-1}^{-1} &= E_1^T \hat{Q}^{-1} E_1 - (E_1^T \hat{Q}^{-1} F_1 + \bar{N}_{e,1}^T \bar{N}_{f,1}) (P_{1|-1}^{-1} + H_1^T \hat{R}^{-1} H_1 \\ &\quad + F_1^T \hat{Q}^{-1} F_1 + \bar{N}_{h,1}^T \bar{N}_{h,1} + \bar{N}_{f,1}^T \bar{N}_{f,1})^{-1} (F_1^T \hat{Q}^{-1} E_1 + \bar{N}_{f,1}^T \bar{N}_{e,1}) + \bar{N}_{e,1}^T \bar{N}_{e,1}. \end{aligned} \quad (89)$$

**Passo 1:** Calcular  $L_{i+1}$  utilizando uma matriz unitária  $\Theta_{3,i}$  de dimensões apropriadas

$$\begin{bmatrix} \Psi_i R_{e,i}^{1/2} & L_i \\ \Psi_{i+1} K_{p,i} & 0 \end{bmatrix} \Theta_{3,i} = \begin{bmatrix} R_{e,i+1}^{1/2} & 0 \\ K_{p,i+1} & L_{i+1} \end{bmatrix}, \quad (90)$$

sendo

$$\begin{aligned} L_i S_i L_i^T &= P_{i+1|i}^{-1} - \Psi_i P_{i|i-1}^{-1} \Psi_i^T, \\ R_{e,i} &= P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T \hat{R}^{-1} H_i + F_i^T \hat{Q}^{-1} F_i + \bar{N}_{h,i}^T \bar{N}_{h,i} + \bar{N}_{f,i}^T \bar{N}_{f,i}, \\ K_{p,i} &= (E_i^T \hat{Q}^{-1} F_i + \bar{N}_{e,i}^T \bar{N}_{f,i}) R_{e,i}^{-T/2}, \end{aligned} \quad (91)$$

sendo  $S_i$  uma matriz assinatura.

**Passo 2:** Portanto,  $P_{i+2|i+1}^{-1}$  pode ser calculado através da seguinte equação de diferença

$$P_{i+2|i+1}^{-1} = \Psi_{i+1} P_{i+1|i}^{-1} \Psi_{i+1}^T + L_{i+1} S_{i+1} L_{i+1}^T. \quad (92)$$

---

**Prova:**

A demonstração deste algoritmo é feita da seguinte maneira. A equação de diferença (87), para  $\delta P_{i+1}^{-1}$ , pode ser escrita da seguinte forma

$$P_{i+2|i+1}^{-1} - \Psi_{i+1} P_{i+1|i}^{-1} \Psi_{i+1}^T = L_{i+1} S_{i+1} L_{i+1}^T. \quad (93)$$

Da Equação (18), (93) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
 P_{i+2|i+1}^{-1} - \Psi_{i+1} P_{i+1|i}^{-1} \Psi_{i+1}^T &= -\Psi_{i+1} P_{i+1|i}^{-1} \Psi_{i+1}^T + E_{i+1}^T \hat{Q}^{-1} E_{i+1} - K_{p,i+1} K_{p,i+1}^T \\
 &\quad + \bar{N}_{e,i+1}^T \bar{N}_{e,i+1}, \\
 K_{p,i+1} &= (E_{i+1}^T \hat{Q}^{-1} F_{i+1} + \bar{N}_{e,i+1}^T \bar{N}_{f,i+1}) R_{e,i+1}^{-T/2}, \\
 R_{e,i+1} &= P_{i+1|i}^{-1} + H_{i+1}^T \hat{R}^{-1} H_{i+1} + F_{i+1}^T \hat{Q}^{-1} F_{i+1} + \bar{N}_{h,i+1}^T \bar{N}_{h,i+1} \\
 &\quad + \bar{N}_{f,i+1}^T \bar{N}_{f,i+1}.
 \end{aligned} \tag{94}$$

O complemento de Schur (Apêndice A) de  $P_{i+2|i+1}^{-1} - \Psi_{i+1} P_{i+1|i}^{-1} \Psi_{i+1}^T$  é dado por

$$\begin{bmatrix} R_{e,i+1} & F_{i+1}^T \hat{Q}^{-1} E_{i+1} + \bar{N}_{f,i+1}^T \bar{N}_{e,i+1} \\ E_{i+1}^T \hat{Q}^{-1} F_{i+1} + \bar{N}_{e,i+1}^T \bar{N}_{f,i+1} & W \end{bmatrix}, \tag{95}$$

sendo

$$W = -P_{i+1|i}^{-1} + E_{i+1}^T \hat{Q}^{-1} E_{i+1} + H_{i+1}^T \hat{R}^{-1} H_{i+1} + \bar{N}_{h,i+1}^T \bar{N}_{h,i+1} + \bar{N}_{e,i+1}^T \bar{N}_{e,i+1}. \tag{96}$$

A Matriz (95) pode ser fatorada da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} \Psi_i R_{e,i}^{1/2} & L_i \\ \Psi_{i+1} K_{p,i} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & S_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{e,i}^{T/2} \Psi_i^T & K_{p,i}^T \Psi_{i+1}^T \\ L_i^T & 0 \end{bmatrix}. \tag{97}$$

Da Fatoração (97), surge a matriz

$$\begin{bmatrix} \Psi_i R_{e,i}^{1/2} & L_i \\ \Psi_{i+1} K_{p,i} & 0 \end{bmatrix}. \tag{98}$$

A Matriz (98) é denominada *pré-array*. Pode-se definir o *pós-array*, fatorando (95) através da seguinte decomposição (Apêndice A)

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \Delta A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix}, \tag{99}$$

sendo  $\Delta A$  o complemento de Schur de  $A$  em  $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ . Usando esta propriedade, têm-se

$$\begin{aligned}
 &\begin{bmatrix} R_{e,i+1} & F_{i+1}^T \hat{Q}^{-1} E_{i+1} + \bar{N}_{f,i+1}^T \bar{N}_{e,i+1} \\ E_{i+1}^T \hat{Q}^{-1} F_{i+1} + \bar{N}_{e,i+1}^T \bar{N}_{f,i+1} & W \end{bmatrix} = \\
 &\begin{bmatrix} I & 0 \\ (E_{i+1}^T \hat{Q}^{-1} F_{i+1} + \bar{N}_{e,i+1}^T \bar{N}_{f,i+1}) R_{e,i+1}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{e,i+1} & 0 \\ 0 & P_{i+2}^{-1} - \Psi_{i+1}^T P_{i+1}^{-1} \Psi_{i+1} \end{bmatrix} \\
 &\quad \times \begin{bmatrix} I & R_{e,i+1}^{-1} (F_{i+1}^T \hat{Q}^{-1} E_{i+1} + \bar{N}_{f,i+1}^T \bar{N}_{e,i+1}) \\ 0 & I \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{100}$$

Pode-se ainda fatorar a matriz central, pela fatoração dos blocos da sua diagonal da seguinte forma

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I & 0 \\ (E_{i+1}^T \hat{Q}^{-1} F_{i+1} + \bar{N}_{e,i+1}^T \bar{N}_{f,i+1}) R_{\epsilon,i+1}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{\epsilon,i+1}^{1/2} & 0 \\ 0 & L_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & S_{i+1} \end{bmatrix} \\ & \times \begin{bmatrix} R_{\epsilon,i+1}^{T/2} & 0 \\ 0 & L_{i+1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & R_{\epsilon,i+1}^{-1} (F_{i+1}^T \hat{Q}^{-1} E_{i+1} + \bar{N}_{f,i+1}^T \bar{N}_{e,i+1}) \\ 0 & I \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (101)$$

simplificando (101), têm-se

$$\begin{bmatrix} \Psi_i R_{\epsilon,i+1}^{1/2} & L_{i+1} \\ \Psi_{i+1} K_{p,i+1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & S_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{\epsilon,i+1}^{T/2} \Psi_i^T & K_{p,i+1}^T \\ L_{i+1}^T & 0 \end{bmatrix}. \quad (102)$$

Portanto, de (102) surge a matriz

$$\begin{bmatrix} \Psi_i R_{\epsilon,i+1}^{1/2} & L_{i+1} \\ \Psi_{i+1} K_{p,i+1} & 0 \end{bmatrix}. \quad (103)$$

denominada *pós-array*.

Logo, igualando (98) e (103), de acordo com o Lema (A.0.1), existe uma matriz  $(I \oplus S_i)$ -unitária  $\Theta_{3,i}$ , tal que

$$\begin{bmatrix} \Psi_i R_{\epsilon,i}^{1/2} & L_i \\ \Psi_{i+1} K_{p,i} & 0 \end{bmatrix} \Theta_{3,i} = \begin{bmatrix} R_{\epsilon,i+1}^{1/2} & 0 \\ K_{p,i+1} & L_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (104)$$

Portanto,  $P_{i+2|i+1}^{-1}$  pode ser calculado através da seguinte equação de diferença

$$P_{i+2|i+1}^{-1} = \Psi_{i+1} P_{i+1|i}^{-1} \Psi_{i+1}^T + L_{i+1} S_{i+1} L_{i+1}^T. \quad (105)$$

### 3.4 Estimativa Preditora com Variação dos Parâmetros $E_i$ , $F_i$ , $H_i$ , $\bar{N}_{e,i}$ , $\bar{N}_{f,i}$ , $\bar{N}_{h,i}$ , $\hat{Q}_i^{-1}$ , $\hat{R}_i^{-1}$

Considere agora, a variações estruturadas dos parâmetros  $\hat{Q}_i^{-1}$  e  $\hat{R}_i^{-1}$  da seguinte forma

$$\delta \hat{R}_i^{-1} = \hat{R}_{i+1}^{-1} - \hat{R}_i^{-1} = V_i M_i V_i^T, \quad \delta \hat{Q}_i^{-1} = \hat{Q}_{i+1}^{-1} - \hat{Q}_i^{-1} = U_i N_i U_i^T, \quad (106)$$

onde  $M_i$  e  $N_i$  são matrizes assinatura.

Utilizando estas definições e (88), o algoritmo *array* rápido, com variação estruturada de todos os parâmetros, pode ser calculado da seguinte forma

---

*Algoritmo Array Rápido (Estimativa Preditora)*

---

**Passo 0:** Calcular as condições iniciais

$$\begin{aligned} P_{0|-1}^{-1} &= \Pi_0, \\ P_{0|-1}^{-1} &= E_1^T \hat{Q}_1^{-1} E_1 - (E_1^T \hat{Q}_1^{-1} F_1 + \bar{N}_{f,1}^T \bar{N}_{e,1}) (P_{i|i-1}^{-1} + H_1^T \hat{R}_1^{-1} H_1 + F_1^T \hat{Q}_1^{-1} F_1 \\ &\quad + \bar{N}_{h,1}^T \bar{N}_{h,1} + \bar{N}_{f,1}^T \bar{N}_{f,1})^{-1} (F_1^T \hat{Q}_1^{-1} E_1 + \bar{N}_{f,1}^T \bar{N}_{e,1}) + \bar{N}_{e,1}^T \bar{N}_{e,1}. \end{aligned}$$

**Passo 1:** Calcular  $L_{i+1}$  utilizando uma matriz unitária  $\Theta_{4,i}$  de dimensões apropriadas

$$\begin{bmatrix} \Psi_i R_{\epsilon,i}^{1/2} & L_i & H_{i+1}^T V_i & F_{i+1}^T U_i \\ \Psi_{i+1} K_{p,i} & 0 & 0 & E_{i+1}^T U_i \end{bmatrix} \Theta_{4,i} = \begin{bmatrix} R_{\epsilon,i+1}^{1/2} & 0 \\ K_{p,i+1} & L_{i+1} \end{bmatrix}, \quad (107)$$

sendo

$$\begin{aligned} L_i S_i L_i^T &= P_{i+1|i}^{-1} - \Psi_i P_{i|i-1}^{-1} \Psi_i^T, \\ R_{\epsilon,i} &= P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T \hat{R}_i^{-1} H_i + F_i^T \hat{Q}_i^{-1} F_i + \bar{N}_{h,i}^T \bar{N}_{h,i} + \bar{N}_{f,i}^T \bar{N}_{f,i}, \\ K_{p,i} &= (E_i^T \hat{Q}_i^{-1} F_i + \bar{N}_{e,i}^T \bar{N}_{f,i}) R_{\epsilon,i}^{-T/2}, \\ V_i M_i V_i^T &= \hat{R}_{i+1}^{-1} - \hat{R}_i^{-1}, \\ U_i N_i U_i^T &= \hat{Q}_{i+1}^{-1} - \hat{Q}_i^{-1}, \end{aligned} \quad (108)$$

sendo  $S_i$  uma matriz assinatura.

**Passo 2:** Portanto,  $P_{i+2|i+1}^{-1}$  pode ser calculado através da seguinte equação de diferença

$$P_{i+2|i+1}^{-1} = \Psi_{i+1} P_{i+1|i}^{-1} \Psi_{i+1}^T + L_{i+1} S_{i+1} L_{i+1}^T. \quad (109)$$

**Prova:**

A demonstração deste algoritmo é feita da seguinte maneira. A equação de diferença (87), para  $\delta P_{i+1}^{-1}$ , pode ser escrita da seguinte forma

$$P_{i+2|i+1}^{-1} - \Psi_{i+1} P_{i+1|i}^{-1} \Psi_{i+1}^T = L_{i+1} S_{i+1} L_{i+1}^T. \quad (110)$$

Da Equação (14), (110) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} P_{i+2|i+1}^{-1} - P_{i+1|i}^{-1} &= -P_{i+1|i}^{-1} + E_{i+1}^T \hat{Q}_{i+1}^{-1} E_{i+1} - K_{p,i+1} K_{p,i+1}^T + \bar{N}_{e,i+1}^T \bar{N}_{e,i+1}, \\ K_{p,i+1} &= E_{i+1}^T \hat{Q}_{i+1}^{-1} F_{i+1} + \bar{N}_{e,i+1}^T \bar{N}_{f,i+1}, \\ R_{\epsilon,i+1} &= P_{i|i-1}^{-1} + H_{i+1}^T \hat{R}_{i+1}^{-1} H_{i+1} + F_{i+1}^T \hat{Q}_{i+1}^{-1} F_{i+1} + \bar{N}_{h,i+1}^T \bar{N}_{h,i+1} + \bar{N}_{f,i+1}^T \bar{N}_{f,i+1}, \end{aligned} \quad (111)$$

O complemento de Schur (Apêndice A) de  $P_{i+2|i+1}^{-1} - \Psi_{i+1} P_{i+1|i}^{-1} \Psi_{i+1}^T$  é dado por

$$\begin{bmatrix} R_{\epsilon,i+1} & F_{i+1}^T \hat{Q}_{i+1}^{-1} E_{i+1} + \bar{N}_{f,i+1}^T \bar{N}_{e,i+1} \\ E_{i+1}^T \hat{Q}_{i+1}^{-1} F_{i+1} + \bar{N}_{e,i+1}^T \bar{N}_{f,i+1} & W \end{bmatrix}, \quad (112)$$

sendo

$$W = -P_{i+1|i+1}^{-1} + E_{i+1}^T \hat{Q}_i + 1^{-1} E_{i+1} + H_{i+1}^T \hat{R}_{i+1}^{-1} H_{i+1} + \bar{N}_{h,i+1}^T \bar{N}_{h,i+1} + \bar{N}_{e,i+1}^T \bar{N}_{e,i+1}. \quad (113)$$

A Matriz (112) pode ser fatorada da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} \Psi_i R_{\epsilon,i}^{1/2} & L_i & H_{i+1}^T V_i & F_{i+1}^T U_i \\ \Psi_{i+1} K_{f,i} & 0 & 0 & E_{i+1}^T U_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{\epsilon,i}^{T/2} \Psi_i^T & K_{f,i}^T \Psi_{i+1}^T \\ L_i^T & 0 \\ V_i^T H_{i+1} & 0 \\ U_i^T F_{i+1} & U_i^T E_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (114)$$

Da Fatoração (114), surge a matriz

$$\begin{bmatrix} \Psi_i R_{\epsilon,i}^{1/2} & L_i & H_{i+1}^T V_i & F_{i+1}^T U_i \\ \Psi_{i+1} K_{f,i} & 0 & 0 & E_{i+1}^T U_i \end{bmatrix}, \quad (115)$$

A Matriz (115) é denominada *pré-array*. Pode-se definir o *pós-array*, fatorando (112) através da seguinte decomposição (Apêndice A)

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \Delta A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (116)$$

sendo  $\Delta A$  o complemento de Schur de A em  $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ . Usando esta propriedade, têm-se

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} R_{\epsilon,i+1} & F_{i+1}^T \hat{Q}_{i+1}^{-1} E_{i+1} + \bar{N}_{f,i+1}^T \bar{N}_{e,i+1} \\ E_{i+1}^T \hat{Q}_{i+1}^{-1} F_{i+1} + \bar{N}_{e,i+1}^T \bar{N}_{f,i+1} & W \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} I & 0 \\ (E_{i+1}^T \hat{Q}_{i+1}^{-1} F_{i+1} + \bar{N}_{e,i+1}^T \bar{N}_{f,i+1}) R_{\epsilon,i+1}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{\epsilon,i+1} & 0 \\ 0 & P_{i+2}^{-1} - \Psi_{i+1}^T P_{i+1}^{-1} \Psi_{i+1} \end{bmatrix} \\ & \times \begin{bmatrix} I & R_{\epsilon,i+1}^{-1} (F_{i+1}^T \hat{Q}_{i+1}^{-1} E_{i+1} + \bar{N}_{f,i+1}^T \bar{N}_{e,i+1}) \\ 0 & I \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (117)$$

Pode-se ainda fatorar a matriz central, pela fatoração dos blocos da sua diagonal da seguinte forma

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I & 0 \\ (E_{i+1}^T \hat{Q}_{i+1}^{-1} F_{i+1} + \bar{N}_{e,i+1}^T \bar{N}_{f,i+1}) R_{\epsilon,i+1}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{\epsilon,i+1}^{1/2} & 0 \\ 0 & L_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & S_{i+1} \end{bmatrix} \\ & \times \begin{bmatrix} R_{\epsilon,i+1}^{T/2} & 0 \\ 0 & L_{i+1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & R_{\epsilon,i+1}^{-1} (F_{i+1}^T \hat{Q}_{i+1}^{-1} E_{i+1} + \bar{N}_{f,i+1}^T \bar{N}_{e,i+1}) \\ 0 & I \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (118)$$

simplificando (118), têm-se

$$\begin{bmatrix} \Psi_i R_{\epsilon,i+1}^{1/2} & L_{i+1} \\ \Psi_{i+1} K_{p,i+1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & S_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{\epsilon,i+1}^{T/2} \Psi_i^T & K_{p,i+1}^T \\ L_{i+1}^T & 0 \end{bmatrix}. \quad (119)$$

Portanto, de (119) surge a matriz

$$\begin{bmatrix} \Psi_i R_{\epsilon, i+1}^{1/2} & L_{i+1} \\ \Psi_{i+1} K_{p, i+1} & 0 \end{bmatrix}, \quad (120)$$

denominada *pós-array*.

Logo, igualando (115) e (120), de acordo com o Lema (A.0.1), existe uma matriz  $(I \oplus S_i \oplus M_i \oplus N_i)$ -unitária  $\Theta_{4,i}$ , tal que

$$\begin{bmatrix} \Psi_i R_{\epsilon, i}^{1/2} & L_i & H_{i+1}^T V_i & F_{i+1}^T U_i \\ \Psi_{i+1} K_{f, i} & 0 & 0 & E_{i+1}^T U_i \end{bmatrix} \Theta_{4,i} = \begin{bmatrix} R_{\epsilon, i+1}^{1/2} & 0 \\ K_{p, i+1} & L_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (121)$$

Portanto,  $P_{i+2|i+1}^{-1}$  pode ser calculado através da seguinte equação de diferença

$$P_{i+2|i+1}^{-1} = \Psi_{i+1} P_{i+1|i}^{-1} \Psi_{i+1}^T + L_{i+1} S_{i+1} L_{i+1}^T. \quad (122)$$

**Observação 3.4.1** Para efetuar o cálculo dos algoritmos array rápidos foram usadas as transformações unitárias de Givens e Givens Hiperbólica, mais detalhes no (Apêndice B)

**Observação 3.4.2** Se  $\Psi_i = I_n$ , então os parâmetros se tornam constantes em (51) e (88). E os algoritmos array rápidos recaem nos algoritmos array rápidos apresentados em (JESUS et al., 2008).

**Observação 3.4.3** Se as incertezas forem anuladas ( $M_f = M_h = N_e = N_f = N_h = 0$ ) os algoritmos array rápidos apresentados nesta seção recaem nos algoritmos array rápidos para as estimativas nominais filtrada e preditora na forma de informação, que são alternativas para os cálculos das equações de Riccati (21) e (23).

Os algoritmos para as estimativas nominais serão apresentados a seguir. As provas destes foram omitidas, mas seguem de forma análoga às apresentadas nos algoritmos da estimativa robusta.

*Algoritmo Array Rápido Variação dos Parâmetros E, F, H (Estimativa Filtrada Nominal)*

**Passo 0:** Calcular as condições iniciais

$$\begin{aligned} P_{0|0}^{-1} &= \Pi_0, \\ P_{1|1}^{-1} &= E_1^T Q^{-1} E_1 - E_1^T Q^{-1} F_1 (\Pi_0 + F_1^T Q^{-1} F_1)^{-1} F_1^T Q^{-1} E_1 + H_1^T R^{-1} H_1. \end{aligned} \quad (123)$$

**Passo 1:** Calcular  $L_{i+1}$  utilizando uma matriz unitária  $\Theta_{5,i}$  de dimensões apropriadas

$$\begin{bmatrix} \Psi_i R_{\epsilon,i}^{1/2} & L_i \\ \Psi_{i+1} K_{f,i} & 0 \end{bmatrix} \Theta_{5,i} = \begin{bmatrix} R_{\epsilon,i+1}^{1/2} & 0 \\ K_{f,i+1} & L_{i+1} \end{bmatrix}, \quad (124)$$

onde

$$\begin{aligned} L_i S_i L_i^T &= P_{i+1|i+1}^{-1} - \Psi_i P_{i|i}^{-1} \Psi_i^T, \\ R_{\epsilon,i} &= P_{i|i}^{-1} + F_i^T Q^{-1} F_i, \\ K_{f,i} &= E_i^T Q^{-1} F_i R_{\epsilon,i}^{-T/2}, \end{aligned} \quad (125)$$

sendo  $S_i$  uma matriz assinatura.

**Passo 2:**  $P_{i+2|i+2}^{-1}$  pode ser calculado através da seguinte equação de diferença

$$P_{i+2|i+2}^{-1} = \Psi_{i+1} P_{i+1|i+1}^{-1} \Psi_{i+1}^T + L_{i+1} S_{i+1} L_{i+1}^T. \quad (126)$$

*Algoritmo Array Rápido Variação dos Parâmetros E, F, H, Q<sup>-1</sup>, R<sup>-1</sup> (Estimativa Filtrada Nominal)*

**Passo 0:** Calcular as condições iniciais

$$\begin{aligned} P_{0|0}^{-1} &= \Pi_0, \\ P_{1|1}^{-1} &= E_1^T Q_1^{-1} E_1 - E_1^T Q_1^{-1} F_1 (\Pi_0 + F_1^T Q_1^{-1} F_1)^{-1} F_1^T Q_1^{-1} E_1 + H_1^T R_1^{-1} H_1. \end{aligned} \quad (127)$$

**Passo 1:** Calcular  $L_{i+1}$  utilizando uma matriz unitária  $\Theta_{6,i}$  de dimensões apropriadas

$$\begin{bmatrix} \Psi_i R_{\epsilon,i}^{1/2} & L_i & 0 & F_{i+1}^T U_i \\ \Psi_{i+1} K_{f,i} & 0 & H_{i+1}^T V_i & E_{i+1}^T U_i \end{bmatrix} \Theta_{6,i} = \begin{bmatrix} R_{\epsilon,i+1}^{1/2} & 0 \\ K_{f,i+1} & L_{i+1} \end{bmatrix}, \quad (128)$$

sendo

$$\begin{aligned} L_i S_i L_i^T &= P_{i+1|i+1}^{-1} - \Psi_i P_{i|i}^{-1} \Psi_i^T, \\ R_{\epsilon,i} &= P_{i|i}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i, \\ K_{f,i} &= E_i^T Q_i^{-1} F_i R_{\epsilon,i}^{-T/2}, \\ V_i M_i V_i^T &= \hat{R}_{i+1}^{-1} - \hat{R}_i^{-1}, \\ U_i N_i U_i^T &= \hat{Q}_{i+1}^{-1} - \hat{Q}_i^{-1}. \end{aligned} \quad (129)$$



sendo  $S_i, M_i, N_i$  matrizes assinatura.

**Passo 2:**  $P_{i+2|i+2}^{-1}$  pode ser calculado através da seguinte equação de diferença

$$P_{i+2|i+2}^{-1} = \Psi_{i+1} P_{i+1|i+1}^{-1} \Psi_{i+1}^T + L_{i+1} S_{i+1} L_{i+1}^T. \quad (130)$$

*Algoritmo Array Rápido Variação dos Parâmetros E, F, H (Estimativa Preditora Nominal)*

**Passo 0:** Calcular as condições iniciais

$$\begin{aligned} P_{0|-1}^{-1} &= \Pi_0, \\ P_{0|-1}^{-1} &= E_1^T Q^{-1} E_1 - E_1^T Q^{-1} F_1 (P_{i|i-1}^{-1} + H_1^T R^{-1} H_1 + F_1^T Q^{-1} F_1)^{-1} F_1^T Q^{-1} E_1. \end{aligned} \quad (131)$$

**Passo 1:** Calcular  $L_{i+1}$  utilizando uma matriz unitária  $\Theta_{7,i}$  de dimensões apropriadas

$$\begin{bmatrix} \Psi_i R_{\epsilon,i}^{1/2} & L_i \\ \Psi_{i+1} K_{p,i} & 0 \end{bmatrix} \Theta_{7,i} = \begin{bmatrix} R_{\epsilon,i+1}^{1/2} & 0 \\ K_{p,i+1} & L_{i+1} \end{bmatrix}, \quad (132)$$

sendo

$$\begin{aligned} L_i S_i L_i^T &= P_{i+1|i}^{-1} - P_{i|i-1}^{-1}, \\ R_{\epsilon,i} &= P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T R^{-1} H_i + F_i^T Q^{-1} F_i, \\ K_{p,i} &= E_i^T Q^{-1} F_i R_{\epsilon,i}^{-T/2}, \end{aligned} \quad (133)$$

sendo  $S_i$  uma matriz assinatura.

**Passo 2:**  $P_{i+2|i+1}^{-1}$  pode ser calculado através da seguinte equação de diferença

$$P_{i+2|i+1}^{-1} = P_{i+1|i}^{-1} + L_{i+1} S_{i+1} L_{i+1}^T. \quad (134)$$

*Algoritmo Array Rápido Variação dos Parâmetros E, F, H,  $Q^{-1}$ ,  $R^{-1}$  (Estimativa Preditora Nominal)*

**Passo 0:** Calcular as condições iniciais

$$\begin{aligned} P_{0|-1}^{-1} &= \Pi_0, \\ P_{0|-1}^{-1} &= E_1^T Q_1^{-1} E_1 - E_1^T Q_1^{-1} F_1 (P_{i|i-1}^{-1} + H_1^T R_1^{-1} H_1 + F_1^T Q_1^{-1} F_1)^{-1} F_1^T Q_1^{-1} E_1. \end{aligned} \quad (135)$$

**Passo 1:** Calcular  $L_{i+1}$  utilizando uma matriz unitária  $\Theta_{8,i}$  de dimensões apropriadas

$$\begin{bmatrix} \Psi_i R_{\epsilon,i}^{1/2} & L_i & H_{i+1}^T V_i & F_{i+1}^T U_i \\ \Psi_{i+1} K_{p,i} & 0 & 0 & E_{i+1}^T U_i \end{bmatrix} \Theta_{8,i} = \begin{bmatrix} R_{\epsilon,i+1}^{1/2} & 0 \\ K_{p,i+1} & L_{i+1} \end{bmatrix}, \quad (136)$$

sendo

$$\begin{aligned}
 L_i S_i L_i^T &= P_{i+1|i}^{-1} - P_{i|i-1}^{-1}, \\
 R_{\epsilon,i} &= P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i + F_i^T Q_i^{-1} F_i, \\
 K_{p,i} &= E_i^T Q_i^{-1} F_i R_{\epsilon,i}^{-T/2}, \\
 V_i M_i V_i^T &= \hat{R}_{i+1}^{-1} - \hat{R}_i^{-1}, \\
 U_i N_i U_i^T &= \hat{Q}_{i+1}^{-1} - \hat{Q}_i^{-1},
 \end{aligned} \tag{137}$$

sendo  $S_i$  uma matriz assinatura.

**Passo 2:**  $P_{i+2|i+1}^{-1}$  pode ser calculado através da seguinte equação de diferença

$$P_{i+2|i+1}^{-1} = P_{i+1|i}^{-1} + L_{i+1} S_{i+1} L_{i+1}^T. \tag{138}$$

### 3.5 Exemplo Numérico

Nesta seção, será apresentado um exemplo numérico para o algoritmo *array* rápido da Seção 3.2. Os dados para simulação foram retirados de (JESUS et al., 2008), onde foram desenvolvidos algoritmos para filtragem robusta para sistemas singulares com parâmetros constantes, esta escolha se deu para poder comparar os resultados do algoritmo para parâmetros constantes aos do algoritmo com variação estruturada. Assim, os parâmetros são apresentados a seguir

$$E = \begin{bmatrix} 1.14 & 0 & 0 \\ 0 & 1.17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0.97 & 0 & 0 \\ 0.27 & -0.78 & 0 \\ 0.12 & 0.12 & 0.68 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0.11 & 0 & 0 \\ 0 & 0.56 & 0 \\ 0 & 0 & 0.32 \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.04 & 0 & 0 \\ 0 & 0.06 & 0 \\ 0 & 0 & 0.05 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 0.09 & 0 & 0 \\ 0 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0 & 0.03 \end{bmatrix}, N_e = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$N_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 \end{bmatrix}, N_h = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0.03 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix},$$

$$M_f = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.3 \end{bmatrix}, M_h = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 \end{bmatrix},$$

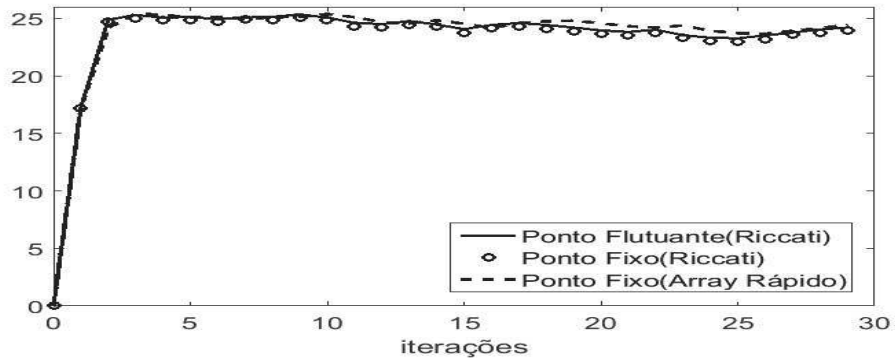
e  $\hat{\lambda} = 40$ . Foram calculados os valores singulares de " $P_{i|i}^{-1}$ " para três diferentes implementações: ponto flutuante e ponto fixo para equação de Riccati explícita, e ponto fixo para o algoritmo *array* rápido. O cálculo feito com ponto flutuante foi utilizado como referência,

pois os desempenhos tanto da equação de Riccati quanto do algoritmo *array* rápido são idênticos neste caso. O cálculo em ponto fixo é utilizado para comparação, pois nele se tem perda de informação e provável acúmulo de erros devido ao truncamento de valores. Assim, para este cálculo, foi usada uma arquitetura em 16-bits que pode representar números no intervalo de  $-65.543$  a  $65.543$ . Essas implementações foram feitas via MatLab através do *fix-point Simulink toolbox*. Por se tratar de um exemplo numérico, não levou-se em conta o desempenho computacional da máquina utilizada, uma vez que este exemplo não exige grande esforço na execução. Para o caso de uma aplicação prática, já vê-se a necessidade desta avaliação de desempenho, visto que a performasse influi diretamente no controle da planta.

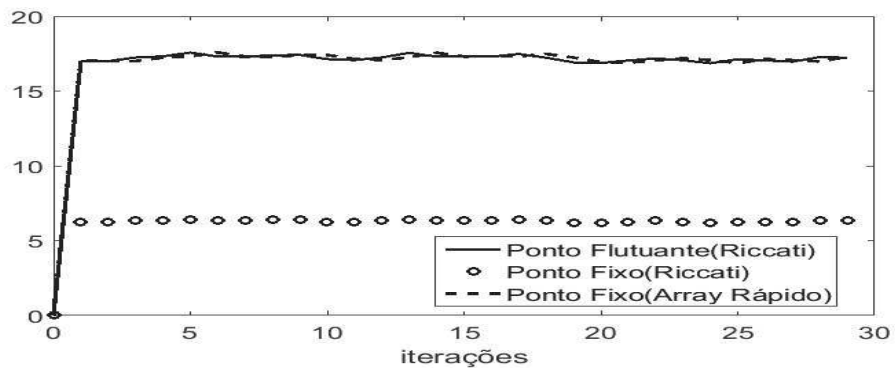
Pode-se notar na Figura 1, a vantagem do algoritmo *array* rápido em comparação à implementação por equação de Riccati explícita, ambas em ponto fixo. Para o primeiro valor singular, dado em (a), vê-se que ambos cálculos de ponto fixo estão próximos à referência, já em (b), onde é demonstrado os resultados para o segundo valor singular de " $P_{i|i}^{-1}$ ", pode-se notar que o *array* rápido continua próximo à referência, enquanto a equação de Riccati em ponto fixo está muito longe. No terceiro valor singular de " $P_{i|i}^{-1}$ ", ainda nota-se que o algoritmo *array* rápido apresenta melhores resultados em comparação ao ponto fixo da equação de Riccati. Estes resultados são obtidos por causa dos erros de arredondamento propagados pela implementação em ponto fixo da Riccati explícita, que são acumulados a cada iteração. Os resultados também demonstram que o algoritmo *array* rápido é uma boa alternativa para evitar estes erros, sendo assim uma alternativa válida para cálculo da inversa da matriz de covariância do erro de estimativa " $P_{i|i}^{-1}$ " utilizada no filtro robusto na forma de informação.

Foram executadas 29 iterações para os algoritmos recursivos da equação de Riccati explícita e para o *array* rápido. Na Figura 2, visa-se demonstrar o desempenho do algoritmo *array* rápido, nesta figura têm-se os valores singulares, máximo e mínimo, de " $L_i$ ", utilizados para avaliar a velocidade do algoritmo. Ambos valores singulares tendem a zero no decorrer das iterações, porém vale salientar que isto ocorre antes da metade do processo, demonstrando a velocidade do cálculo do algoritmo.

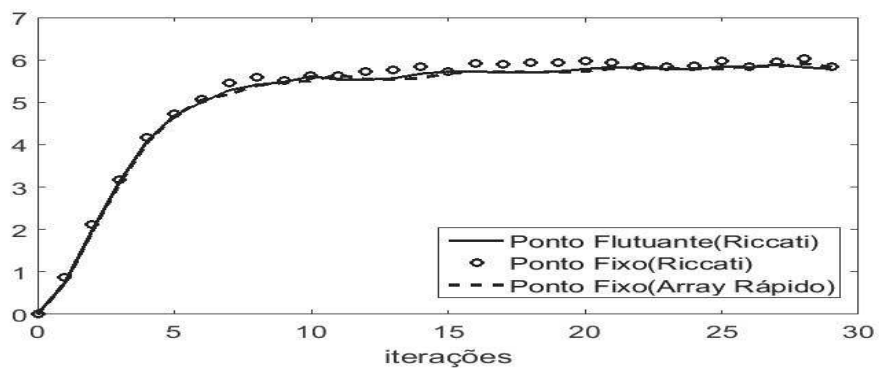
Figura 1 – Valores Singulares de  $P_{ii}^{-1}$



(a) Primeiro Valor Singular

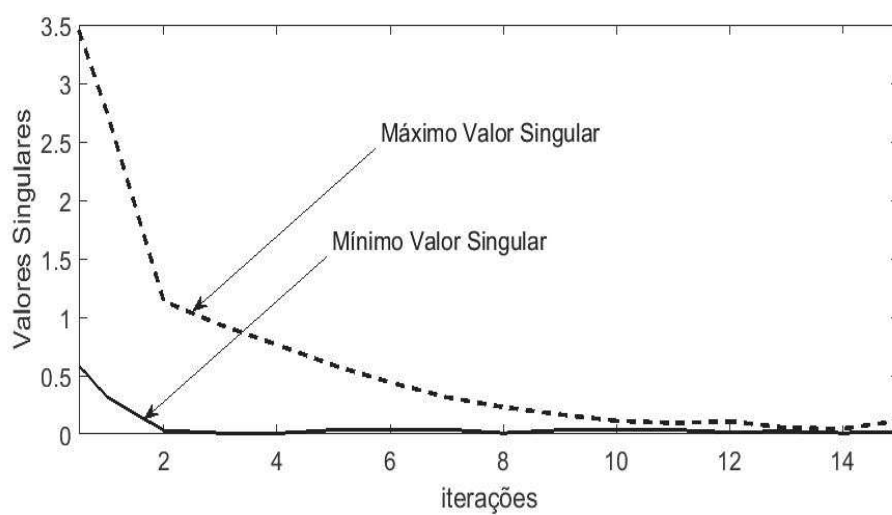


(b) Segundo Valor Singular



(c) Terceiro Valor Singular

Figura 2 – Valores Singulares de  $L_i$



## 4 Algoritmo Array Rápido Para Filtragem de SLSM com Variação Estruturada dos Parâmetros

Neste capítulo serão deduzidos os algoritmos *array* rápidos para filtragem de Sistemas Lineares Sujeitos a Saltos Markovianos com parâmetros variantes no tempo de forma estruturada. Serão deduzidos, os algoritmos *array* rápidos para a equação de Riccati do sistema aumentado " $\tilde{Z}_{i+1|i}$ "(37) e para a equação de Lyapunov " $Z_{i+1,k}$ "(32) utilizada na filtragem do SLSM. Os resultados obtidos fazem parte da contribuição original desta dissertação.

### 4.1 SLSM com Variação Estruturada do Tempo

Neste capítulo, o algoritmo *array* rápido do filtro LMMSE foi desenvolvido considerando os parâmetros  $F_{i,k}$ ,  $G_{i,k}$  e  $H_{i,k}$  do SLSM (24) variantes no tempo de forma estruturada, esta variação é feita utilizando uma matriz  $\bar{\Psi}_{i,j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  conveniente. Os parâmetros  $\mathcal{F}_i$  e  $\mathcal{H}_i$  do modelo aumentado (26) variam utilizando as matrizes  $\Psi_i \in \mathbb{R}^{Nn \times Nn}$ , obtidas por

$$\Psi_i = \text{diag} [\bar{\Psi}_i] = \begin{bmatrix} \bar{\Psi}_i & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \bar{\Psi}_i \end{bmatrix}. \quad (139)$$

Aplicando esta matriz na equação de diferença do filtro obtemos

$$\delta \tilde{Z}_{i|i-1} = \tilde{Z}_{i+1|i} - \Psi_i \tilde{Z}_{i|i-1} \Psi_i^T := L_i S_i L_i^T. \quad (140)$$

De forma análoga, aplicando a matriz  $\bar{\Psi}_i$  a equação de diferença de Lyapunov, obtemos

$$\delta Z_{i,k} = Z_{i+1,k} - \bar{\Psi}_i Z_{i,k} \bar{\Psi}_i^T := K_{i,k} \Lambda_{i,k} K_{i,k}^T. \quad (141)$$

Definimos a variação dos parâmetros de acordo com as seguintes regras

$$\begin{aligned} F_{i+1,j} \bar{\Psi}_i &:= \bar{\Psi}_{i+1} F_{i,j}, \\ \bar{\Psi}_{i+1} G_{i,j} &:= G_{i+1,j}, \\ H_{i,j} &:= H_{i+1,j} \bar{\Psi}_i. \end{aligned} \quad (142)$$

O parâmetro  $R_i$ , definido em (30), varia pela equação de diferença

$$\delta R_i = R_{i+1} - R_i := Y_i M_i Y_i^T. \quad (143)$$

Os parâmetros  $\mathcal{F}_i$  e  $\mathcal{H}_i$  do modelo aumentado variam de acordo com

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{i+1}\Psi_i &:= \Psi_{i+1}\mathcal{F}_i, \\ \mathcal{H}_i &:= \mathcal{H}_{i+1}\Psi_i,\end{aligned}\tag{144}$$

sendo

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{i+1}\Psi_i &:= \begin{bmatrix} p_{11}F_{i+1,1} & \cdots & p_{N1}F_{i+1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1N}F_{i+1,1} & \cdots & p_{NN}F_{i+1,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\Psi}_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \bar{\Psi}_i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} p_{11}F_{i+1,1}\bar{\Psi}_i & \cdots & p_{N1}F_{i+1,N}\bar{\Psi}_i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1N}F_{i+1,1}\bar{\Psi}_i & \cdots & p_{NN}F_{i+1,N}\bar{\Psi}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11}\bar{\Psi}_{i+1}F_{i,1} & \cdots & p_{N1}\bar{\Psi}_{i+1}F_{i,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1N}\bar{\Psi}_{i+1}F_{i,1} & \cdots & p_{NN}\bar{\Psi}_{i+1}F_{i,N} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \bar{\Psi}_{i+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \bar{\Psi}_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11}F_{i,1} & \cdots & p_{N1}F_{i,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1N}F_{i,1} & \cdots & p_{NN}F_{i,N} \end{bmatrix} = \Psi_{i+1}\mathcal{F}_i, \\ \mathcal{H}_{i+1}\Psi_i &:= \begin{bmatrix} H_{i+1,1} & \cdots & H_{i+1,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\Psi}_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \bar{\Psi}_i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} H_{i+1,1}\bar{\Psi}_i & \cdots & H_{i+1,N}\bar{\Psi}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{i,1} & \cdots & H_{i,N} \end{bmatrix} = \mathcal{H}_i.\end{aligned}$$

## 4.2 Algoritmo Array Rápido para SLSM

O algoritmo *array* rápido com variação estruturada dos parâmetros, para calcular de maneira alternativa a equação de Lyapunov (32), é dado a seguir.

---

*Algoritmo Array Rápido Estendido para a Equação de Lyapunov*

---

**Passo 0:** Condições Iniciais

$$\begin{aligned}Z_{0,k} &:= \bar{V}_j, \\ Z_{1,k} &:= \sum_{j=1}^N p_{jk}F_{0,j}Z_{0,k}F_{0,j}^T + \sum_{j=1}^N p_{jk}\pi_{0,j}G_{0,j}G_{0,j}^T, \\ K_{0,k}\Lambda_{0,k}K_{0,k}^T &:= Z_{1,k} - \bar{\Psi}_0Z_{0,k}\bar{\Psi}_0^T, \\ V_{0,j}\Omega_{0,j}V_{0,j}^T &:= \pi_{1,j} - \pi_{0,j}.\end{aligned}\tag{145}$$

**Passo 1:** Calcule  $K_{i+1,k}$  usando a matriz unitária  $\Sigma_i$  de dimensões apropriadas

$$\begin{bmatrix} L_{i,1} & M_{i,1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & L_{i,N} & M_{i,N} \end{bmatrix} \Sigma_i = \begin{bmatrix} K_{i+1,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & K_{i+1,N} \end{bmatrix}\tag{146}$$

sendo

$$\begin{aligned}
 L_{i,k} &= \begin{bmatrix} p_{1k}^{1/2} F_{i+1,1} K_{i,1} & \cdots & p_{Nk}^{1/2} F_{i+1,N} K_{i,N} \end{bmatrix}, \\
 M_{i,k} &= \begin{bmatrix} p_{1k}^{1/2} G_{i+1,1} X_{i,1} & \cdots & p_{Nk}^{1/2} G_{i+1,N} X_{i,N} \end{bmatrix}, \\
 K_{i,k} \Lambda_{i,k} K_{i,k}^T &= Z_{i+1,k} - \bar{\Psi}_i Z_{i,k} \bar{\Psi}_i^T, \\
 X_{i,k} \Omega_{i,k} X_{i,k}^T &= \pi_{i+1,j} - \pi_{i,j},
 \end{aligned} \tag{147}$$

sendo  $\Lambda_{i,k}$  e  $\Omega_{i,k}$  são matrizes assinatura.

**Passo 2:** Portanto,  $Z_{i+2,k}$  pode ser calculado por

$$Z_{i+2,k} := \bar{\Psi}_{i+1} Z_{i+1,k} \bar{\Psi}_{i+1}^T + K_{i+1,k} \Lambda_{i+1,k} K_{i+1,k}^T. \tag{148}$$

**Prova:**

A demonstração deste algoritmo é feita da seguinte maneira. A equação de diferença (141), para  $\delta Z_{i+1,k}$  pode ser escrita da seguinte forma

$$Z_{i+2,k} - \bar{\Psi}_{i+1} Z_{i+1,k} \bar{\Psi}_{i+1}^T = K_{i+1,k} \Lambda_{i+1,k} K_{i+1,k}^T. \tag{149}$$

De (32), a Equação (149) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
 Z_{i+2,k} - \bar{\Psi}_{i+1} Z_{i+1,k} \bar{\Psi}_{i+1}^T &= -\bar{\Psi}_{i+1} Z_{i+1,k} \bar{\Psi}_{i+1}^T + \sum_{j=1}^N p_{jk} F_{i+1,j} Z_{i+1,j} F_{i+1,j}^T \\
 &\quad + \sum_{j=1}^N p_{jk} \pi_{i+1,j} G_{i+1,j} G_{i+1,j}^T,
 \end{aligned} \tag{150}$$

usando novamente (32) em (150) tem-se

$$\begin{aligned}
 Z_{i+2,k} - \bar{\Psi}_{i+1} Z_{i+1,k} \bar{\Psi}_{i+1}^T &= -\sum_{j=1}^N p_{jk} \bar{\Psi}_{i+1} F_{i,j} Z_{i,j} F_{i,j}^T \bar{\Psi}_{i+1}^T - \sum_{j=1}^N p_{jk} \pi_{i,j} \bar{\Psi}_{i+1} G_{i,j} G_{i,j}^T \bar{\Psi}_{i+1}^T \\
 &\quad + \sum_{j=1}^N p_{jk} F_{i+1,j} Z_{i+1,j} F_{i+1,j}^T + \sum_{j=1}^N p_{jk} \pi_{i+1,j} G_{i+1,j} G_{i+1,j}^T.
 \end{aligned} \tag{151}$$

A Equação (151) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
 Z_{i+2,k} - \bar{\Psi}_{i+1} Z_{i+1,k} \bar{\Psi}_{i+1}^T &:= \sum_{j=1}^N p_{jk} F_{i+1,j} \left( Z_{i+1,j} - \bar{\Psi}_i Z_{i,j} \bar{\Psi}_i^T \right) F_{i+1,j}^T \\
 &\quad + \sum_{j=1}^N p_{jk} G_{i+1,j} \left( \pi_{i+1,j} - \pi_{i,j} \right) G_{i+1,j}^T
 \end{aligned} \tag{152}$$

introduzindo as diferenças definidas em (147), a Equação (152) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}
 K_{i+1,k} \Lambda_{i+1,k} K_{i+1,k}^T &= \sum_{j=1}^N p_{jk} F_{i+1,j} \left( K_{i,j} \Lambda_{i,j} K_{i,j}^T \right) F_{i+1,j}^T \\
 &\quad + \sum_{j=1}^N p_{jk} G_{i+1,j} \left( X_{i,j} \Omega_{i,j} X_{i,j}^T \right) G_{i+1,j}^T.
 \end{aligned} \tag{153}$$



Ainda considerando o que foi definido em (147), podemos calcular a Equação (153) na seguinte forma matricial

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} L_{i,1} & M_{i,1} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & L_{i,N} & M_{i,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\Lambda}_{i,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\Omega}_{i,1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{\Lambda}_{i,N} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \bar{\Omega}_{i,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{i,1}^T & \cdots & 0 \\ M_{i,1}^T & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & L_{i,N}^T \\ 0 & \cdots & M_{i,N}^T \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} K_{i+1,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & K_{i+1,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_{i+1,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \Lambda_{i+1,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{i+1,1}^T & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & K_{i+1,N}^T \end{bmatrix} \quad (154)
 \end{aligned}$$

Do Lema (A.0.1), existe uma matriz  $(\bar{\Lambda}_k \oplus \bar{\Omega}_j)$ -unitária  $\Sigma_i$ , tal que

$$\begin{bmatrix} L_{i,1} & M_{i,1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & L_{i,N} & M_{i,N} \end{bmatrix} \Sigma_i = \begin{bmatrix} K_{i+1,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & K_{i+1,N} \end{bmatrix} \quad (155)$$

Assim,  $Z_{i+2,k}$  pode ser calculado por

$$Z_{i+2,k} := \bar{\Psi}_{i+1} Z_{i+1,k} \bar{\Psi}_{i+1}^T + K_{i+1,k} \Lambda_{i+1,k} K_{i+1,k}^T. \quad (156)$$

No próximo resultado, é apresentado o algoritmo *array* rápido com variação estruturada dos parâmetros, para o cálculo alternativo da equação de Riccati (37), como segue.

---

#### Algoritmo Array Rápido Estendido para LMMSE

---

**Passo 0:** Condições Iniciais

$$\begin{aligned}
 \tilde{Z}_{0|-1} &:= \Pi_0, \\
 \tilde{Z}_{1|0} &:= \mathcal{F}_0 \tilde{Z}_{1|0} \mathcal{F}_0^T - \mathcal{F}_0 \tilde{Z}_{1|0} \mathcal{H}_0^T (\mathcal{H}_0 \tilde{Z}_{1|0} \mathcal{H}_0^T + R_0)^{-1} \mathcal{H}_0 \tilde{Z}_{1|0} \mathcal{F}_0^T \\
 &\quad + \text{diag}[Z_{1,k}] - \mathcal{F}_0 (\text{diag}[Z_{0,k}]) \mathcal{F}_0^T, \\
 L_0 S_0 L_0^T &:= \tilde{Z}_{1|0} - \Psi_0 \tilde{Z}_{0|-1} \Psi_0^T, \\
 Y_0 M_0 Y_0^T &:= R_1 - R_0, \\
 O_0 E_0 O_0 &:= \text{diag}[K_{1,k} \Lambda_{1,k} K_{1,k}^T] - \mathcal{F}_1 (\text{diag}[K_{0,k} \Lambda_{0,k} K_{0,k}^T]) \mathcal{F}_1^T,
 \end{aligned} \quad (157)$$

**Passo 1:** Calcule  $L_{i+1}$  usando uma matriz  $(I \oplus S_i \oplus M_i \oplus E_i)$ -unitária  $\Gamma_i$  de dimensões apropriadas

$$\begin{bmatrix} R_{\epsilon,i}^{1/2} & \mathcal{H}_{i+1} L_i & Y_i & 0 \\ \Psi_{i+1} K_{p,i} & \mathcal{F}_{i+1} L_i & 0 & O_i \end{bmatrix} \Gamma_i := \begin{bmatrix} R_{\epsilon,i+1}^{1/2} & 0 \\ K_{p,i+1} & L_{i+1} \end{bmatrix} \quad (158)$$

sendo

$$\begin{aligned}
 L_i S_i L_i^T &:= \tilde{Z}_{i+1|i} - \Psi_i \tilde{Z}_{i|i-1} \Psi_i^T, \\
 Y_i M_i Y_i^T &:= R_{i+1} - R_i, \\
 O_i E_i O_i &:= \text{diag} [K_{i+1,k} \Lambda_{i+1,k} K_{i+1,k}^T] - \mathcal{F}_{i+1} (\text{diag} [K_{i,k} \Lambda_{i,k} K_{i,k}^T]) \mathcal{F}_{i+1}^T, \\
 R_{\epsilon,i} &:= \mathcal{H}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \mathcal{H}_i^T + R_i, \\
 K_{p,i} &:= \mathcal{F}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \mathcal{H}_i^T R_{\epsilon,i}^{-T/2},
 \end{aligned} \tag{159}$$

sendo  $S_i$  uma matriz assinatura.

**Passo 2:** Portanto,  $\tilde{Z}_{i+2|i+1}$  pode ser calculado como

$$\tilde{Z}_{i+2|i+1} := \Psi_{i+1} \tilde{Z}_{i+1|i} \Psi_{i+1}^T + L_{i+1} S_{i+1} L_{i+1}^T. \tag{160}$$

**Prova:**

A demonstração deste algoritmo é feita da seguinte forma. A equação de diferença (140), para  $\delta \tilde{Z}_{i+1|i}$ , pode ser escrita da seguinte forma

$$\tilde{Z}_{i+2|i+1} - \Psi_{i+1} \tilde{Z}_{i+1|i} \Psi_{i+1}^T := L_{i+1} S_{i+1} L_{i+1}^T. \tag{161}$$

De (37), a Equação (161) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
 \tilde{Z}_{i+2|i+1} - \Psi_{i+1} \tilde{Z}_{i+1|i} \Psi_{i+1}^T &= -\Psi_{i+1} \tilde{Z}_{i+1|i} \Psi_{i+1}^T + \mathcal{F}_{i+1} \tilde{Z}_{i+1|i} \mathcal{F}_{i+1}^T - K_{p,i+1} K_{p,i+1}^T \\
 &\quad + \text{diag} [Z_{i+2,k}] - \mathcal{F}_{i+1} (\text{diag} [Z_{i+1,k}]) \mathcal{F}_{i+1}^T, \\
 K_{p,i+1} &= \mathcal{F}_{i+1} \tilde{Z}_{i+1|i} \mathcal{H}_{i+1}^T R_{\epsilon,i+1}^{-T/2}, \\
 R_{\epsilon,i+1} &= \mathcal{H}_{i+1} \tilde{Z}_{i+1|i} \mathcal{H}_{i+1}^T + \mathcal{D}_{i+1} \mathcal{D}_{i+1}^T.
 \end{aligned} \tag{162}$$

O complemento de Schur (Apêndice A) de  $\tilde{Z}_{i+2|i+1} - \Psi_{i+1} \tilde{Z}_{i+1|i} \Psi_{i+1}^T$ , é dado por

$$\begin{bmatrix} R_{\epsilon,i+1} & \mathcal{H}_{i+1} \tilde{Z}_{i+1|i} \mathcal{F}_{i+1}^T \\ \mathcal{F}_{i+1} \tilde{Z}_{i+1|i} \mathcal{H}_{i+1}^T & \mathcal{W} \end{bmatrix}, \tag{163}$$

sendo

$$\mathcal{W} = -\Psi_{i+1} \tilde{Z}_{i+1|i} \Psi_{i+1}^T + \mathcal{F}_{i+1} \tilde{Z}_{i+1|i} \mathcal{F}_{i+1}^T + \text{diag} [Z_{i+2,k}] - \mathcal{F}_{i+1} (\text{diag} [Z_{i+1,k}]) \mathcal{F}_{i+1}^T. \tag{164}$$

A Matriz (163) pode ser fatorada da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} R_{\epsilon,i}^{1/2} & \mathcal{H}_{i+1} L_i & Y_i & 0 \\ \Psi_{i+1} K_{p,i} & \mathcal{F}_{i+1} L_i & 0 & O_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{\epsilon,i}^{T/2} & K_{p,i}^T \Psi_{i+1}^T \\ L_i^T \mathcal{H}_{i+1}^T & L_i^T \mathcal{F}_{i+1}^T \\ Y_i^T & 0 \\ 0 & O_i^T \end{bmatrix}. \tag{165}$$

Da Fatoração (165) surge a matriz

$$A_i = \begin{bmatrix} R_{\epsilon,i}^{1/2} & \mathcal{H}_{i+1}L_i & Y_i & 0 \\ \Psi_{i+1}K_{p,i} & \mathcal{F}_{i+1}L_i & 0 & O_i \end{bmatrix}. \quad (166)$$

A Matriz (166) será denominada *pré-array*. Pode-se definir o *pós-array* fatorando (163) através da seguinte decomposição (Apêndice A)

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \Delta A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (167)$$

sendo  $\Delta A$  o complemento de Schur de A em  $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ . Usando esta propriedade, têm-se

$$\begin{bmatrix} R_{\epsilon,i+1} & \mathcal{H}_{i+1}\tilde{Z}_{i+1|i}\mathcal{F}_{i+1}^T \\ \mathcal{F}_{i+1}\tilde{Z}_{i+1|i}\mathcal{H}_{i+1}^T & \mathcal{W} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathcal{F}_{i+1}\tilde{Z}_{i+1|i}\mathcal{H}_{i+1}^T R_{\epsilon,i+1}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{\epsilon,i+1} & 0 \\ 0 & \tilde{Z}_{i+2} - \Psi_{i+1}\tilde{Z}_{i+1}\Psi_{i+1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & R_{\epsilon,i+1}^{-1}\mathcal{H}_{i+1}\tilde{Z}_{i+1|i}\mathcal{F}_{i+1}^T \\ 0 & I \end{bmatrix}. \quad (168)$$

Pode-se ainda fatorar a matriz central, pela fatoração dos blocos da sua diagonal da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathcal{F}_{i+1}\tilde{Z}_{i+1|i}\mathcal{H}_{i+1}^T R_{\epsilon,i+1}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{\epsilon,i+1}^{1/2} & 0 \\ 0 & L_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & S_{i+1} \end{bmatrix} \\ \times \begin{bmatrix} R_{\epsilon,i+1}^{T/2} & 0 \\ 0 & L_{i+1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & R_{\epsilon,i+1}^{-1}\mathcal{H}_{i+1}\tilde{Z}_{i+1|i}\mathcal{F}_{i+1}^T \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (169)$$

simplificando (169), têm-se

$$\begin{bmatrix} R_{\epsilon,i+1}^{1/2} & 0 \\ K_{p,i+1} & L_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & S_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{\epsilon,i+1}^{T/2} & K_{p,i+1}^T \\ 0 & L_{i+1}^T \end{bmatrix}. \quad (170)$$

Surge, portanto, de (170) a matriz

$$A_{i+1} = \begin{bmatrix} R_{\epsilon,i+1}^{1/2} & 0 \\ K_{p,i+1} & L_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (171)$$

denominada *pós-array*.

De acordo com o Lema (A.0.1), existe uma matriz  $(I \oplus S_i \oplus M_i \oplus E_i)$ -unitária  $\Gamma_i$ , tal que, pode-se igualar (166) e (171), obtendo o algoritmo *array* rápido

$$\begin{bmatrix} R_{\epsilon,i}^{1/2} & \mathcal{H}_{i+1}L_i & Y_i & 0 \\ \Psi_{i+1}K_{p,i} & \mathcal{F}_{i+1}L_i & 0 & O_i \end{bmatrix} \Gamma_i = \begin{bmatrix} R_{\epsilon,i+1}^{1/2} & 0 \\ K_{p,i+1} & L_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (172)$$

### 4.3 Exemplo Numérico

Nesta seção, será apresentado um exemplo numérico do algoritmo *array* rápido da Seção 4.2. Os dados para simulação são os seguintes

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \begin{bmatrix} 0.7 & 0 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, G_1 = \begin{bmatrix} 0.87 & 0 \\ 0 & 1.2 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 0.87 & 0 \\ 0 & 1.2 \end{bmatrix}, \\
 H_1 &= \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 0.0008 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 0.0008 \end{bmatrix}, \\
 \pi &= \begin{bmatrix} 0.05 & 0.95 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.9 & 0.1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

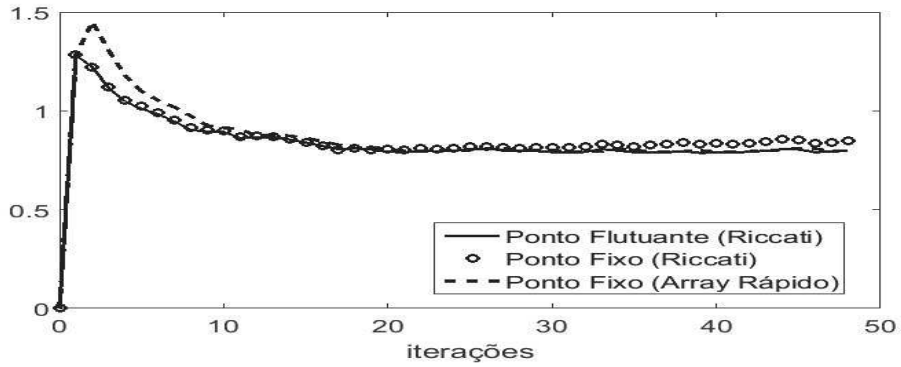
Foram calculados os valores singulares de " $\tilde{Z}_{i|i-1}$ " para três diferentes implementações: ponto flutuante e ponto fixo para equação de Riccati explícita, e ponto fixo para o algoritmo *array* rápido. O cálculo feito com ponto flutuante foi utilizado como referência, pois os desempenhos tanto da equação de Riccati quanto do algoritmo *array* rápido são idênticos neste caso. O cálculo em ponto fixo é utilizado para comparação, pois nele se tem perda de informação e provável acúmulo de erros devido ao truncamento de valores. Assim, para este cálculo, foi usada uma arquitetura em 16-bits que pode representar números no intervalo de  $-65.543$  a  $65.543$ . Essas implementações foram feitas via MatLab através do *fix-point Simulink toolbox*. Por se tratar de um exemplo numérico, não levou-se em conta o desempenho computacional da máquina utilizada, uma vez que este exemplo não exige grande esforço na execução. Para o caso de uma aplicação prática, já vê-se a necessidade desta avaliação de desempenho, visto que a performasse influi diretamente no controle da planta.

Pode-se notar na Figura 3, a vantagem do algoritmo *array* rápido em comparação à implementação por equação de Riccati explícita, ambas em ponto fixo. Para o primeiro valor singular, dado em (a), vê-se que o ponto fixo da equação de Riccati tem uma melhor aproximação no início, porém ao decorrer das iterações o algoritmo *array* rápido se aproxima da referência enquanto a equação de Riccati explícita se afasta, já em (b), onde é demonstrado os resultados para o segundo valor singular de " $\tilde{Z}_{i|i-1}$ ", pode-se notar que ambos cálculos em ponto fixo não demonstram uma boa aproximação inicial, mas se recuperam ao decorrer dos tempo e novamente o algoritmo *array* rápido apresenta melhor aproximação ao cálculo em ponto flutuante. No terceiro valor singular de " $\tilde{Z}_{i|i-1}$ ", ainda nota-se que o algoritmo *array* rápido apresenta melhores resultados em comparação ao ponto fixo da equação de Riccati. Por fim, na sub-figura (d), onde é demonstrado o quarto valor singular, têm-se uma grande diferença em relação à referência, sendo que o algoritmo *array* rápido se mantém próximo e a equação de Riccati muito distante. Estes resultados são obtidos por causa dos erros de arredondamento

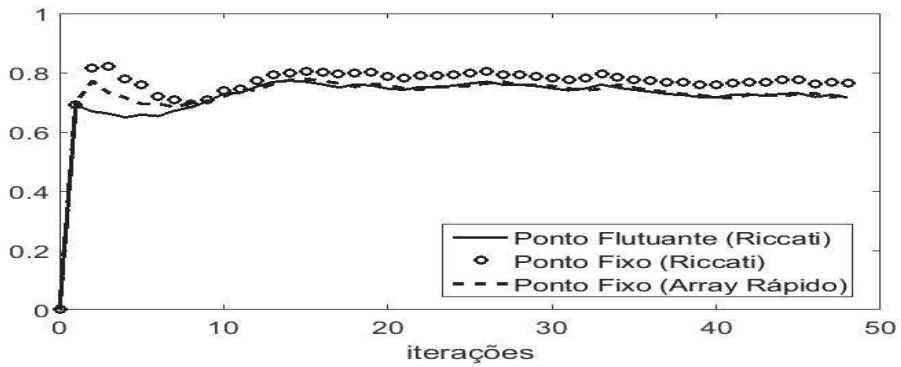
propagados pela implementação em ponto fixo da Riccati explícita, que são acumulados a cada iteração. Os resultados também demonstram que o algoritmo *array* rápido é uma boa alternativa para evitar estes erros, sendo assim uma alternativa válida para cálculo da matriz de covariância do erro de estimativa " $\tilde{Z}_{i|i-1}$ " utilizada no filtro robusto na forma de informação.

Foram executadas 49 iterações para os algoritmos recursivos da equação de Riccati explícita e para o *array* rápido. Na Figura 4, visa-se demonstrar o desempenho do algoritmo *array* rápido, nesta figura têm-se os valores singulares, máximo e mínimo, de " $L_i$ ", utilizados para avaliar a velocidade do algoritmo. Ambos valores singulares tendem a zero no decorrer das iterações, porém vale salientar que isto ocorre antes da metade do processo, demonstrando a velocidade do cálculo do algoritmo.

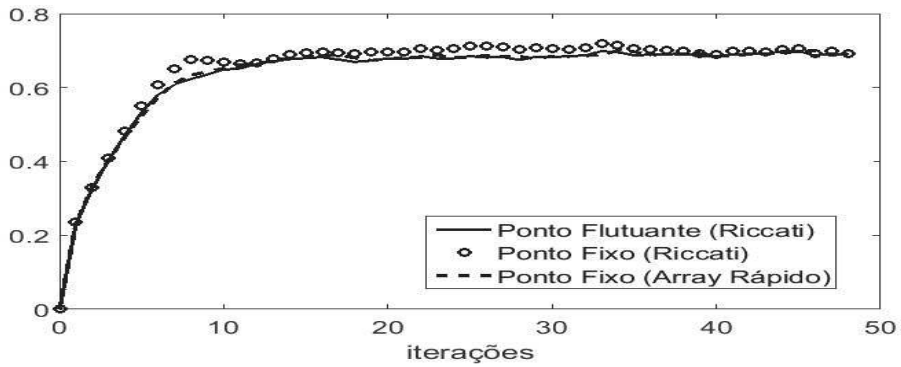
Figura 3 – Valores Singulares de  $\tilde{Z}_{i|i-1}$



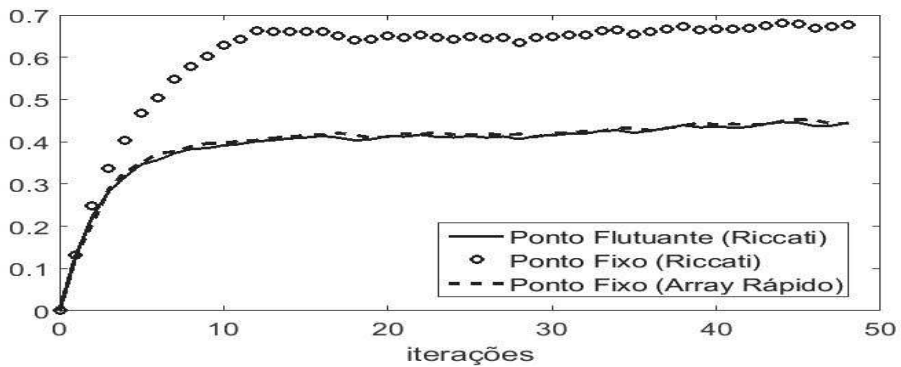
(a) Primeiro Valor Singular



(b) Segundo Valor Singular

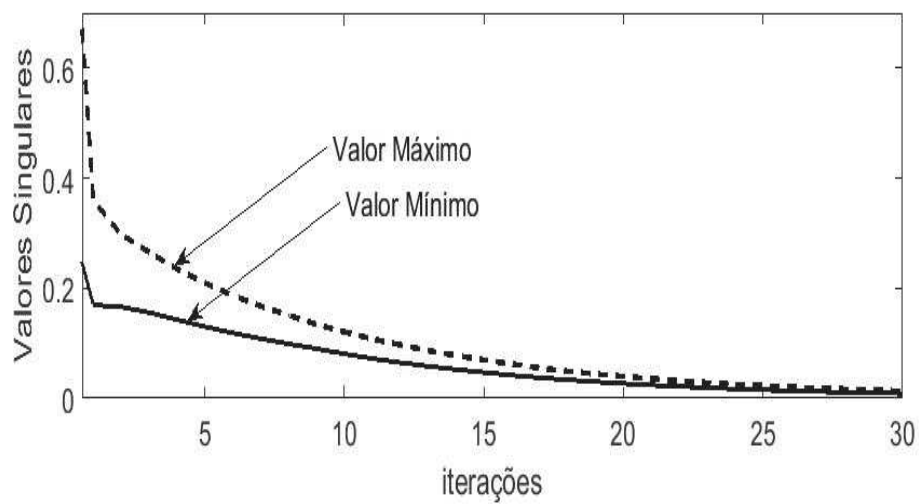


(c) Terceiro Valor Singular



(d) Quarto Valor Singular

Figura 4 – Valores Singulares de  $L_i$



## 5 Considerações Finais e Trabalhos Futuros

Tendo cumprido o objetivo desta dissertação, que foi desenvolver algoritmos *array* rápidos para filtragem robusta de sistemas singulares e para filtragem de sistemas lineares sujeito a saltos Markovianos, ambos com variação estruturada dos parâmetros no tempo, pode-se considerar que os resultados foram satisfatórios e dentro do esperado.

O desenvolvimento matemático dos algoritmos *array* rápidos para equação de Riccati para ambos os sistemas propostos transcorreu sem grandes dificuldades, tendo sido obtido de forma similar ao que está disponível na literatura. Apesar disto, uma diferença que se pode destacar é a forma de variação estruturada dos parâmetros, pois na filtragem de SLSM utiliza-se parâmetros aumentados, formados pelos parâmetros nos diferentes estados da cadeia de Markov, assim criou-se uma matriz " $\Psi_i$ " que varia o parâmetro aumentado, formada por matrizes " $\bar{\Psi}_i$ " que variam os parâmetros em cada estado da cadeia. Esta necessidade não aparece para o caso do sistema singular. Apenas o desenvolvimento do algoritmo *array* rápido da equação do tipo Lyapunov em (32), utilizada no filtro para SLSM, necessitou de argumentos inovadores em sua prova, pois esta possui uma estrutura diferente das demais equações tratadas nesta dissertação. Dentre estes argumentos está a forma de se obter o pré e pós-*array*.

As implementações dos algoritmos, em ponto fixo e em ponto flutuante, demonstraram a robustez numérica em comparação à equação de Riccati. Também demonstraram a rapidez do algoritmo, através da diminuição dos valores singulares da matriz  $L_i$  a cada iteração. É válido destacar a necessidade de se utilizar as matrizes assinatura no algoritmo *array* rápido, sem elas os resultados se comportam de forma não satisfatória, sendo que até mesmo na implementação em ponto flutuante há diferença de resultados para a equação de Riccati e o *array* rápido. Pode-se afirmar que a matriz assinatura " $S_i$ ", utilizada nas equações de diferença,  $P_{i+1} - P_i = M_i S_i M_i$ , onde aparece matriz auxiliar  $M_i$ , é responsável por não permitir um falso resultado no cálculo da matriz  $P_{i+1}$ .

Como trabalhos futuros, pretende-se desenvolver os algoritmos *array* rápidos para filtros robustos de SLSM, onde os parâmetros do sistema variem de forma estruturada no tempo. Pretende-se também, investigar uma maneira de desenvolver algoritmos *array* rápidos para filtros cujo os parâmetros sejam variantes no tempo sem a necessidade da forma estruturada.



## Referências

- ACKERSON, A. G.; FU, K. S. On state estimation in switching environments. **IEEE Transactions on Automatic Control**, AC-15, n. 1, p. 10–17, 1970.
- CHANG, C. B.; ATHANS, M. State estimation for discrete systems with switching parameters. **IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems**, AES-14, n. 3, p. 418–425, 1978.
- COSTA, O. L. V. Linear minimum mean square error estimation for discrete-time Markovian jump linear systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, p. 1685–1689, 1994.
- COSTA, O. L. V.; GUERRA, S. Stationary filter for linear minimum mean square error estimation for discrete-time Markovian jump linear systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 47, n. 8, p. 1351–1356, 2002.
- DAI, L. Filtering and lqg problems for discrete-time stochastic singular systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 34, n. 10, p. 1105–1108, 1989.
- DAROUACH, M.; ZASADZINSKI, M.; MEHDI, D. State estimation for stochastic singular linear systems. **International Journal of Systems Science**, v. 24, n. 2, p. 345–354, 1993.
- DENG, Z.; LIU, Y. Descriptor kalman estimators. **International Journal of Systems Science**, v. 30, n. 11, p. 1205–1212, 1999.
- GONCALVES, A. P. C.; FIORAVANTI, A. R.; GEROMEL, J. C. Markov jump linear systems and filtering through network transmitted measurements. **Signal Processing**, v. 90, n. 10, p. 2842–2850, 2010.
- HASAN, M. A.; AZIM-SADJANI, M. R. Noncasual image modelling using descriptor approach. **IEEE Transactions on Circuits and Systems II**, v. 42, n. 8, p. 536–540, 1995.
- HASSAN, M. A.; SADJANI, M. R. A. Noncasual imagem modeling using. **IEEE Transactions on Circuits and Systems II**, v. 42, n. 8, p. 536–540, 1995.
- HASSIBI, B.; KAILATH, T.; SAYED, A. H. Array algorithms for H-infinity estimation. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 45, n. 4, p. 702–706, 2000.
- ISHIHARA, J. Y.; TERRA, M. H. Robust state prediction for descriptor systems. **Automatica**, v. 44, p. 1–5, 2008.
- ISHIHARA, J. Y.; TERRA, M. H.; BIANCO, A. F. Recursive linear estimation for general discrete-time descriptor systems, journal = Automatica, year = 2010, volume = 46, number = 4, pages = 761-766,.
- ISHIHARA, J. Y.; TERRA, M. H.; CAMPOS, J. C. T. Robust kalman filter for descriptor systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 51, n. 8, p. 1354–1358, 2006.

- ISHIHARA, J. Y.; TERRA, M. H.; CAMPOS, J. T. Optimal recursive estimation for discrete-time descriptor systems. **International Journal of Systems Science**, v. 10, n. 36, p. 605–615, 2005.
- JAZWINSKI, A. Stochastic processes and filtering theory. **New York: Academic**, 1970.
- JESUS, G. Q.; TERRA, M. H.; ISHIHARA, J. Y. Algoritmo array rapido para filtragem robusta de sistemas singulares. **Anais da XVII Congresso Brasileiro de Automatica**, 2008.
- KALMAN, R. A new approach to linear filtering and prediction problems. **Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering**, v. 82, p. 35–45, 1960.
- KELLER, J. Y.; NOWAKOWSKI, S.; DAROUACH, M. State estimation and failure detection in singular systems. **Control Theory and Advanced Technology**, v. 8, n. 4, p. 755–762, 1992.
- LI, W.; JIA, Y. Adaptive filtering for jump markov systems with unknown noise covariance. **IET Control Theory and Applications**, v. 7, n. 13, p. 1765–1772, 2013.
- LUENBERGER, D. V. Dynamic equations in descriptor form. **IEEE Transactions Automatic Control**, AC-22, n. 3, p. 312–321, 1977.
- MATEI, I.; BARAS, J. S. A linear distributed filter inspired by the markovian jump linear system filtering problem. **Automatica**, v. 48, n. 12, p. 1924–1928, 2012.
- MORF, M.; SIDHU, G. S.; KAILATH, T. Some new algorithms for recursive estimation in constant, linear, discrete-time systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, AC-19, n. 4, p. 315–323, 1974.
- NIKOUKAH, R.; CAMPBELL, S. L.; DELEBECQUE, F. Kalman filtering for general discrete-time linear systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 44, n. 10, p. 1829–1839, 1999.
- NIKOUKAH, R.; WILLSKY, A. L.; LEVY, B. C. Kalman filtering and riccati equations for descriptor systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 9, n. 37, p. 1325–1342, 1992.
- POTTER, J. E.; KAILATH, R. G. Statistical filtering of space navigation measurements. **Proc. AIAA Guidance Cintr. Conf.**, 1963.
- SAYED, A. H.; KAILATH, T. Extended chandrasekhar recursions. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 39, n. 3, p. 619–623, 1994.
- SINGH, S. P.; LIU, R. W. Existence of state equation representation if linear large-scale dynamic systems. **IEEE Transactions on Circuit Theory**, v. 20, n. 3, p. 239–246, 1973.
- SOUZA, C. A. de; BARBOSA, K. A.; MINYUE, F. Robust filtering for uncertain linear discrete-time descriptor systems. **Automatica**, v. 44, p. 792–798, 2008.
- SOUZA, C. E. de; GEVERS, M. R.; GOODWIN, G. C. Riccati equations in optimal filtering of nonstabilizable systems having singular state transition matrices. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 31, n. 9, p. 831–838, 1986.

TERRA, M. H.; ISHIHARA, J. Y.; JESUS, G. Information filtering and array algorithms for discrete-time markovian jump linear systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 54, n. 1, p. 158–162, 2009.

TERRA, M. H.; ISHIHARA, J. Y.; JESUS, G. Fast array algorithm for filtering of markovian jump linear systems. **Int. J. Adapt. Control Signal Process.**, v. 26, n. 1, p. 84–94, 2012.

TERRA, M. H.; ISHIHARA, J. Y.; PADOAN, A. C. J. Information filtering and array algorithms for descriptor systems subject to parameter uncertainties. **IEEE Transactions on Signal Processing**, v. 5, n. 1, p. 1–9, 2007.

WIENER, N. **Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series**. New York: Wiley, 1949.

XU, S.; LAM, J. Robust control and filtering of singular systems. **Springer-Verlag**, London, 2006.

YIN, Y.; SHIAND, P.; LIU, F.; TEO, K. L. Filtering for discrete-time nonhomogeneous markov jump systems with uncertainties. **Information Sciences**, v. 259, n. 14, p. 118–127, 2014.

ZHANG, H. S.; XIE, L.; SOH, Y. C. Optimal recursive filtering, prediction and smoothing for singular stochastic discrete-time systems. **IEEE Transactions Automatic Control**, v. 44, n. 11, p. 2154–2158, 1999.

## Apêndices

## APÊNDICE A – Resultados Importantes

### Complemento de Schur

O complemento de Schur de A em uma matriz em bloco  $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ , é dado por  $\Delta A = D - CA^{-1}B$ .

### Fatoração Alternativa

Considere a matriz em bloco M

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (173)$$

e a seguinte matriz multiplicada a esquerda de M

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ XA + C & XB + D \end{bmatrix}. \quad (174)$$

Para  $X = -CA^{-1}$ , tem-se

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & \Delta A \end{bmatrix}, \quad (175)$$

sendo  $\Delta A$  o complemento de Schur de A em M. Similarmente, pode-se obter

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & \Delta A \end{bmatrix}, \quad (176)$$

estes resultados podem ser combinados para diagonalizar M em blocos

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & \Delta A \end{bmatrix} \quad (177)$$

e utilizando a seguinte propriedade de invertibilidade

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ P & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -P & I \end{bmatrix}, \quad (178)$$

pode-se achar a fatoração

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \Delta A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix}. \quad (179)$$

**Definição A.0.1** (*HASSIBI et al., 2000*) Para qualquer matriz de assinatura  $J$  (matriz diagonal com  $+1$  ou  $-1$  na diagonal e zeros no resto), a matriz  $\Theta$  será  $J$ -unitária se  $\Theta J \Theta^T = J$ .

**Lema A.0.1** (*HASSIBI et al., 2000*) Seja  $A$  e  $B$  matrizes  $n \times m$  (com  $n \leq m$ ), e seja  $J = (I_p \oplus -I_q)$  uma matriz assinatura com  $p + q = m$ . Se  $AJA^T = BJB^T$  tem posto completo, então existe uma matriz  $J$ -unitária  $\Theta$  tal que  $A = B\Theta$ .



### Rotação de Givens Hiperbólica

Rotações de Givens Hiperbólicas, são matrizes de rotação  $2 \times 2$  que preservam a "norma-J", sendo portanto uma transformação J-unitária. Uma transformação J-ortogonal  $\Theta$  é uma matriz que satisfaz

$$\Theta J \Theta^* = \Theta^* J \Theta = J, \quad (184)$$

sendo J uma matriz assinatura, ou seja, uma matriz diagonal com entradas  $\pm 1$

$$J = (I_p \oplus -I_q), p \geq 1, q \geq 1. \quad (185)$$

Transformações J-unitárias preservam a "J-norma quadrática" de um vetor, ou seja, se  $y = x\Theta$ , então

$$\|y\|_J^2 = yJy^* = x\Theta J \Theta^* x^* = xJx^* = \|x\|_J^2. \quad (186)$$

No caso de uma matriz de rotação hiperbólica  $\Theta_{2 \times 2}$ , J é dado por  $J = (1 \oplus -1)$ . Dado um vetor real  $1 \times 2$   $x = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$ , deseja-se encontrar tal rotação hiperbólica que faça a seguinte transformação

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \Theta = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \end{bmatrix}, \quad (187)$$

sendo que  $\alpha$  é um valor real a ser determinado. Neste caso, nem sempre é possível fazer tal transformação, pois pode ocorrer de  $\|x\|_J^2 = a^2 - b^2$  ser negativo. Assim, quando a norma-J for negativa será possível fazer a seguinte transformação

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \Theta = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \end{bmatrix}. \quad (188)$$

Desta forma, pode-se distinguir dois casos:

1.  $|a| > |b|$ : a expressão para calcular a matriz de rotação hiperbólica  $\Theta$  que satisfaz (187), é dada por

$$\Theta = \sqrt{1 - \rho^2} \begin{bmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{bmatrix}, \text{ onde } \rho = \frac{b}{a}, a \neq 0, \quad (189)$$

o que gera

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \Theta = \begin{bmatrix} \pm \sqrt{a^2 - b^2} & 0 \end{bmatrix}. \quad (190)$$

2.  $|b| > |a|$ : a expressão para calcular a matriz de rotação hiperbólica  $\Theta$  que satisfaz (188), é dada por

$$\Theta = \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} \begin{bmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{bmatrix}, \text{ onde } \rho = \frac{a}{b}, b \neq 0, \quad (191)$$

o que gera

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \Theta = \begin{bmatrix} 0 & \pm \sqrt{a^2 - b^2} \end{bmatrix}. \quad (192)$$