



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ
PRO-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL
EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA

SILVANA SANTOS AMORIM

UM MODELO REOLÓGICO PARA O ESCOAMENTO DO SANGUE
HUMANO

ILHÉUS-BA
2015

SILVANA SANTOS AMORIM

**UM MODELO REOLÓGICO PARA O
ESCOAMENTO DO SANGUE HUMANO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Estadual de Santa Cruz, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia.

Orientador: Prof. Dr. Flávio Pietrobon Costa

Coorientador: Prof. Dr. Marcio Antônio de Andrade Bortoloti

ILHÉUS-BA
2015

A524 Amorim, Silvana Santos.
Um modelo reológico para o escoamento do sangue humano / Silvana Santos Amorim. – Ilhéus, BA: UESC, 2015.
56 f. : il.

Orientador: Flávio Pietrobon Costa.
Co-orientador: Márcio Antônio de A. Bortoloti.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia.
Referências: f. 54-56.

1. Sangue – Análise. 2. Método dos elementos finitos. 3. Reologia. I. Título.

CDD 508

SILVANA SANTOS AMORIM

**UM MODELO REOLÓGICO PARA O
ESCOAMENTO DO SANGUE HUMANO**

Ilhéus-BA, 04/08/2015

Comissão Examinadora



Prof. Dr. Flávio Pietrobon Costa
UESC
(Orientador)



**Prof. Dr. Marcio Antônio de Andrade
Bortoloti**
UESB
(Coorientador)



Prof. Dr. Esbel Tomás Valero Orellana
UESC



Prof. Dr. José Karam Filho
LNCC

Dedico aos meus amados filhos, Mateus e Tales.

Agradecimentos

À Deus por todo amor e cuidado a mim dispensados.

Aos meus orientadores, prof. Flávio e prof. Márcio pela paciência e dedicação.

À minha família, em especial aos meus pais Edízio e Vilma e aos meus irmãos: Edigton, Edielton, Ezequiel, Sara e Priscila. Sem vocês eu não teria conseguido!

Aos professores e colegas do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia, que contribuíram de forma significativa na minha formação.

Aos professores e colegas da UESB, em especial aos professores: José Eduardo, Roberta D'Angela, Janice, Fernando, Cleusiane e Nemésio.

A todos os amigos pelo apoio e palavras de encorajamento, em especial a família Novaes, pela ajuda dispensada aos meus filhos nas minhas ausências durante o período do mestrado.

Aos membros da banca, pelas valiosas contribuições.

A FAPESB, pelo apoio financeiro fornecido pela bolsa de estudo.

"Lança o teu pão sobre as águas, porque depois de muitos dias acharás." Eclesiastes 11:1

Resumo

Neste trabalho propomos um modelo para a descrição da viscosidade sanguínea humana com características pseudoplásticas e viscoplásticas em diâmetros entre $300\mu m$ e $20\mu m$. O modelo aqui proposto é baseado na equação do tipo Sisko adicionado a uma tensão limite. É feita também a inserção de dois parâmetros com o objetivo de caracterizar os comportamentos pseudoplástico e viscoplástico em função do aumento e diminuição do diâmetro do vaso, respectivamente. A análise do modelo foi feita com base em resultados numéricos gerados pela resolução do Problema de Stokes Generalizado, considerando o sangue um fluido incompressível, por meio da Formulação de Elementos Finitos do tipo Petrov-Galerkin. Os resultados obtidos foram comparados com resultados de modelos já existentes na literatura como: Casson, Wang-Stoltz e Walburn-Schneck. As análises sugerem que o Modelo Proposto aproxima-se melhor dos modelos, de Wang-Stoltz e de Walburn-Schneck, para valores do diâmetro entre $50\mu m$ e $300\mu m$. Porém, para valores menores do diâmetro a aproximação é melhor para o modelo de Casson.

Palavras-chave: Viscosidade sanguínea. Pseudoplasticidade. Viscoplasticidade. Problema de Stokes Generalizado. Elementos Finitos

Abstract

In this work we propose a model for the description of the human blood viscosity with pseudoplastic and viscoplastic features in diameters between $300\mu m$ and $20\mu m$. The Model here proposed is based on the Sisko type equation added to a yield stress. It is also made the insertion of two parameters with the aim of characterizing the pseudoplastic and viscoplastic behavior due to the increasing and decreasing of the vessel diameter, respectively. The model analysis was made based on numerical results generated by the Generalised Stokes Problem resolution, considering the blood as an incompressible fluid, by means a Petrov-Galerkin Finite Element Formulation. The obtained results were compared with existing models from the literature as: Casson, Sisko and Walburn-Schneck models. The analysis suggest that the Proposed Model exhibits a better approximation for Wang-Stoltz and Walburn-Schneck models for diameter values between $50\mu m$ e $300\mu m$. However for the lower diameter values, the approximation is better for the Casson model.

Keywords: Blood viscosity. Viscoplasticity. Pseudoplasticity. Generalised Stokes Problem. Finite Element Formulation.

Lista de figuras

Figura 1 – Esquema ilustrativo de um fluido entre duas placas paralelas utilizadas no experimento de Newton de onde surgiu a Lei de Newton da Viscosidade.	3
Figura 2 – Relação entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação para fluidos newtonianos como o óleo de cozinha e o xarope de milho.	4
Figura 3 – Gráficos da Lei de Potência que relacionam tensão e taxa de deformação para $\alpha = 1.5$, comportamento pseudoplástico, $\alpha = 2$ comportamento newtoniano e $\alpha = 2.5$ comportamento dilatante.	7
Figura 4 – Gráficos dos modelos: <i>Power-Law</i> , de Wang-Stoltz, de Carreau e Newtoniano ($\mu_n = 3.45mPas$), para dados descritos na Tabela 1	8
Figura 5 – Esquema de um perfil de velocidade para um escoamento laminar de um fluido viscoplástico em um tubo.	9
Figura 6 – Relação entre tensão e taxa de deformação da velocidade para os Modelos de Bingham, Herschel-Bulkley e Casson, considerando os valores dos parâmetros na Tabela 2.	10
Figura 7 – Gráficos da tensão de cisalhamento em função da taxa de deformação dos modelos de Bingham e de Bingham regularizado pelo Modelo Simples para $\epsilon = 1, 0.5, 0.2, 0.1$ e 0.01	12
Figura 8 – Gráficos da tensão de cisalhamento em função da taxa de deformação dos modelos de Bingham e de Bingham regularizado pelo Modelo Bercovier-Engleman para $\epsilon = 1, 0.5, 0.2, 0.1$ e 0.01	13
Figura 9 – Gráficos da tensão de cisalhamento em função da taxa de deformação dos modelos de Bingham e de Bingham regularizado pelo Modelo Papanastasiou para $\epsilon = 1, 0.5, 0.2, 0.1$ e 0.01	13
Figura 10 – Gráficos da tensão de cisalhamento em função da taxa de deformação dos modelos de Bingham e Bingham regularizado pelos Modelos Simples, Bercovier-Engleman e Papanastasiou para $\epsilon = 0.1$ e $\tau_0 = 1.0$	14
Figura 11 – Gráficos da viscosidade aparente em função da taxa de deformação da velocidade dos modelos de Bingham e Bingham regularizado pelos Modelos Simples, Bercovier-Engleman e Papanastasiou para $\epsilon = 0.1$ e $\tau_0 = 1.0$	14
Figura 12 – Eritrócitos sem deformação por microscópio eletrônico de varredura.	15
Figura 13 – Figura ilustrativa do hematócrito de referencia (H_d) e do hematócrito do vaso (H).	17
Figura 14 – Gráfico que representa a Equação 12 para $H_d = 0.35, 0.45$ e 0.55	17

Figura 15 – Variação do comprimento da camada de plasma em relação ao diâmetro do vaso sanguíneo para o modelo de <i>Power-Law</i> (Equação 2), considerando dados de Wang e Stoltz (1994b) e de Cho e Kensey (1991), e o modelo newtoniano (SHARAN; POPEL, 2001), para um hematócrito de referência de 45%.	18
Figura 16 – Gráfico da Função 13 que relaciona a viscosidade aparente relativa do sangue com o diâmetro do vaso, caracterizando o efeito <i>Fahraeus-Lindqvist</i>	19
Figura 17 – Formação de agregações celulares.	20
Figura 18 – Gráfico do parâmetro A em relação ao diâmetro do vaso d	24
Figura 19 – Gráficos da tensão limite (Equação 14) em função do diâmetro, via Equação 12, para $H_d = 0.45$	25
Figura 20 – Gráficos do produto do parâmetro A pela tensão limite (Equação 14) em função do diâmetro para $H_d = 0.45$	25
Figura 21 – Gráfico da função de ponderação B em relação ao raio do vaso sanguíneo.	27
Figura 22 – Gráficos da viscosidade aparente do sangue em função do diâmetro do vaso sanguíneo, para $H_d = 45\%$, gerados a partir do Modelo Proposto (Equação 15) e dos modelos de: Casson (Equação 7), Walburn-Schneck (Tabela 4) e Sisko (Tabela 4).	28
Figura 23 – Gráficos da viscosidade aparente do Modelo Proposto e dos modelos de: Casson, Wang-Stoltz e de Walburn-Schneck em relação a taxa de deformação para o hematócrito de referência de 45% e o diâmetro do vaso de $300\mu m$	28
Figura 24 – Gráficos da viscosidade aparente do Modelo Proposto (Função 15) e dos modelos de: Casson, Wang-Stoltz e de Walburn-Schneck em relação a taxa de deformação para o hematócrito de referência de 45% e o diâmetro do vaso de $100\mu m$	29
Figura 25 – Gráficos da viscosidade aparente do Modelo Proposto (Função 15) e dos modelos de: Casson, Wang-Stoltz e de Walburn-Schneck em relação a taxa de deformação para o hematócrito de referência de 45% e o diâmetro do tubo de $50\mu m$	29
Figura 26 – Gráficos da viscosidade aparente do Modelo Proposto (Função 15) e dos modelos de: Casson, Wang-Stoltz e de Walburn-Schneck em relação a taxa de deformação para o hematócrito de referência de 45% e o diâmetro do tubo de $20\mu m$	30

Figura 27 – Gráficos da viscosidade relativa do sangue em função da taxa de deformação do Modelo Proposto sem regularização (Equação 15) e com regularizações: Simples (Equação 19), Bercovier-Engleman (Equação 20) e Papanastasiou (Equação 21), para $\epsilon = 0.01$, $H_d = 45\%$ e $d \in [20, 300]$	31
Figura 28 – Domínio Ω e contorno $\Gamma = \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out} \cup \Gamma_l$	32
Figura 29 – Representação de um domínio bidimensional contínuo discretizado por triângulos.	36
Figura 30 – Malha de elementos finitos do domínio considerado para o Problema de Stokes.	41
Figura 31 – Perfis de viscosidade para $d = 300\mu m$ e hematócritos $H_d = 35\%$, 45% e 55%	43
Figura 32 – Perfis de viscosidade para $d = 286\mu m$ e hematócritos $H_d = 35\%$, 45% e 55%	44
Figura 33 – Perfis de viscosidade para $d = 230\mu m$ e hematócritos $H_d = 35\%$, 45% e 55%	44
Figura 34 – Perfis de viscosidade para $d = 90\mu m$ e hematócritos $H_d = 35\%$, 45% e 55%	45
Figura 35 – Perfis de viscosidade para $d = 20\mu m$ e hematócritos $H_d = 35\%$, 45% e 55%	45
Figura 36 – Perfis de viscosidade para $H_d = 45\%$ com variação no diâmetro tubular.	46
Figura 37 – Perfis de viscosidade para $H_d = 45\%$ e $d = 300\mu m$ dos modelos de Casson, Walburn-Schneck, Wang-Stoltz e o Modelo Proposto.	46
Figura 38 – Perfis de viscosidade para $H_d = 45\%$ e $d = 286\mu m$ dos modelos de Casson, Walburn-Schneck, Wang-Stoltz e o Modelo Proposto.	47
Figura 39 – Perfis de viscosidade para $H_d = 45\%$ e $d = 230\mu m$ dos modelos de Casson, Walburn-Schneck, Wang-Stoltz e o Modelo Proposto.	47
Figura 40 – Perfis de viscosidade para $H_d = 45\%$ e $d = 90\mu m$ dos modelos de Casson, Walburn-Schneck, Wang-Stoltz e o Modelo Proposto.	48
Figura 41 – Perfis de viscosidade para $H_d = 45\%$ e $d = 20\mu m$ dos modelos de Casson, Walburn-Schneck, Wang-Stoltz e o Modelo Proposto.	48
Figura 42 – Viscosidade aparente do modelo de Casson para $H_d = 45\%$	49
Figura 43 – Viscosidade aparente do modelo de Walburn-Schneck para $H_d = 45\%$	49
Figura 44 – Viscosidade aparente do modelo de Wang-Stoltz para $H_d = 45\%$	49
Figura 45 – Viscosidade aparente do Modelo Proposto para $H_d = 45\%$	49
Figura 46 – Perfis de velocidade para $d = 300\mu m$ e hematócritos $H_d = 35\%$, 45% e 55%	51

Figura 47 – Perfis de velocidade para $d = 286\mu m$ e hematócritos $H_d = 35\%$, 45% e 55%	51
Figura 48 – Perfis de velocidade para $d = 230\mu m$ e hematócritos $H_d = 35\%$, 45% e 65%	52
Figura 49 – Perfis de velocidade para $d = 90\mu m$ e hematócritos $H_d = 35\%$, 45% e 65%	52
Figura 50 – Perfis de velocidade para $d = 20\mu m$ e hematócritos $H_d = 35\%$, 45% e 65%	53
Figura 51 – Perfis de velocidade para $H_d = 45\%$ para $d = 20, 90, 230, 286$ e 300	53
Figura 52 – Perfis de velocidade para $H_d = 45\%$ e $d = 300\mu m$ dos modelos de Casson, de Walburn-Schneck, de Wang-Stoltz e do Modelo Proposto.	54
Figura 53 – Perfis de velocidade para $H_d = 45\%$ e $d = 286\mu m$ dos modelos de Casson, de Walburn-Schneck, de Wang-Stoltz e do Modelo Proposto.	54
Figura 54 – Perfis de velocidade para $H_d = 45\%$ e $d = 230\mu m$ dos modelos de Casson, de Walburn-Schneck, de Wang-Stoltz e do Modelo Proposto.	55
Figura 55 – Perfis de velocidade para $H_d = 45\%$ e $d = 90\mu m$ dos modelos de Casson, de Walburn-Schneck, de Wang-Stoltz e do Modelo Proposto.	55
Figura 56 – Perfis de velocidade para $H_d = 45\%$ e $d = 20\mu m$ dos modelos de Casson, de Walburn-Schneck, de Wang-Stoltz e do Modelo Proposto.	56
Figura 57 – Norma do campo de velocidade do modelo de Casson para $H_d = 45\%$	57
Figura 58 – Norma do campo de velocidade do modelo de Walburn-Schneck para $H_d = 45\%$	57
Figura 59 – Norma do campo de velocidade do modelo de Wang-Stoltz para $H_d = 45\%$	57
Figura 60 – Norma do campo de velocidade do Modelo Proposto para $H_d = 45\%$	57
Figura 61 – Gráficos da pressão ao longo do centro do tubo para valores do hematócrito $H_d = 35\%$, 45% e 55%	58
Figura 62 – Gráficos da pressão ao longo do centro do tubo para $H_d = 45\%$ do Modelo Proposto e dos modelos de Casson, de Walburn-Schneck e de Wang-Stoltz.	59
Figura 63 – Distribuição da pressão do modelo de Casson para $H_d = 45\%$	60
Figura 64 – Distribuição da pressão do modelo de Walburn-Schneck para $H_d = 45\%$	60
Figura 65 – Distribuição da pressão do modelo de Wang-Stoltz para $H_d = 45\%$	60
Figura 66 – Distribuição da pressão do Modelo Proposto para $H_d = 45\%$	60

Lista de tabelas

Tabela 1 – Parâmetros dos modelos de <i>Power-Law</i> de Carreau e de Wang-Stoltz obtidos, respectivamente, por (GIJSEN et al., 1999) e (WANG; STOLTZ, 1994a) a partir de experimentos com escoamento sanguíneo.	8
Tabela 2 – Parâmetros obtidos a partir de experimentos com solução de polímeros dos modelos de Bingham, de Hershel-Bulkley e de Casson.	11
Tabela 3 – Classificação por diâmetro dos vasos do sistema circulatório.	18
Tabela 4 – Modelos constitutivos do escoamento pseudoplástico sanguíneo.	21
Tabela 5 – Pontos utilizados para gerar o parâmetro A por meio da aproximação de uma função exponencial.	24
Tabela 6 – Dados da viscosidade relativa do sangue.	26
Tabela 7 – Dados da taxa de deformação do escoamento sanguínea em relação ao diâmetro do vaso sanguíneo.	26
Tabela 8 – Classificação do diâmetro para valores de x no domínio.	42

Sumário

1 – INTRODUÇÃO	1
2 – ESCOAMENTOS NÃO-NEWTONIANOS	3
2.1 Tipos de escoamentos	3
2.2 Fluidos Pseudoplásticos	5
2.2.1 Modelos Matemáticos para Fluidos Pseudoplásticos	6
2.3 Fluidos Viscoplasticos	8
2.3.1 Modelos Matemáticos para Fluidos Viscoplasticos	9
2.3.2 Regularizações	11
3 – O SANGUE	15
3.1 Composição Sanguínea	15
3.2 Viscosidade Aparente do Sangue	16
3.3 Modelos Reológicos para Sangue	20
3.3.1 Macrocirculação	20
3.3.2 Mesocirculação	21
3.3.3 Microcirculação	22
4 – MODELO PROPOSTO	23
4.1 Comparação entre o Modelo Proposto e Modelos da Literatura	26
4.2 Viscosidade Regularizada	30
4.3 O Problema de Stokes	31
5 – O MÉTODO NUMÉRICO	34
5.1 Definições Preliminares	34
5.2 O Método de Galerkin	35
5.3 O Método de Elementos Finitos	36
5.4 O Método do tipo Petrov-Galerkin	38
5.4.1 Algoritmo Iterativo	39
6 – RESULTADOS	41
6.1 Viscosidade	42
6.2 Velocidade	50
6.3 Pressão	57
7 – CONCLUSÕES	61

Referências 63

1 INTRODUÇÃO

A compreensão da reologia do sangue humano na rede vascular tem sido objeto de pesquisa de diversas instituições em todo o mundo. Isso ocorre, principalmente, devido a sua relevância para o diagnóstico e tratamentos de diversas doenças que acometem o sistema cardiovascular humano. Como exemplo temos: o tratamento de embolias e coágulos; o desenvolvimento de técnicas de cateterismo; a análise do transporte de radiofármaco utilizados no tratamento de tumores e distúrbios específicos em tecidos humanos; o tratamento de hemodiálise, onde um melhor entendimento do comportamento sanguíneo pode ajudar no avanço de projetos das máquinas utilizadas; dentre outros. Os avanços nesses tratamentos tendem a proporcionar uma sobrevida com melhor qualidade aos pacientes.

A caracterização do escoamento sanguíneo, mais especificamente da viscosidade aparente do sangue, sofre influências de fatores como: taxa de deformação da velocidade; concentração, agregação e deformação das células vermelhas; viscosidade do plasma; diâmetro vascular, entre outros. O efeito *Fahraeus-Lindqvist*, por exemplo, descreve uma relação crescente entre diâmetro vascular e viscosidade sanguínea, sendo que para diâmetros menores do que $10\mu m$ o efeito é contrário, ou seja, a relação diâmetros e viscosidade sanguínea é decrescente.

Em faixas distintas de diâmetros de vasos o sangue apresenta diferentes comportamentos referente a natureza de sua viscosidade. Nesse contexto, nos vasos sanguíneos de diâmetros maiores do que $300\mu m$ o sangue apresenta comportamento newtoniano, pois nos vasos de grande calibre são observadas altas taxas de deformação que geram um deslocamento celular de forma alinhada com a direção preferencial do escoamento.

Vasos com diâmetros abaixo de $300\mu m$ apresentam escoamentos com menores taxas de deformação, favorecendo a formação de aglomerados celulares e consequentemente influenciando no aumento da viscosidade. Do ponto de vista reológico, esse comportamento não-newtoniano é chamado de pseudoplasticidade. Vasos com diâmetros menores do que $50\mu m$ podem deixar de apresentar o comportamento pseudoplástico e passar a exibir um movimento de corpo rígido na região central do vaso. Essa mudança de comportamento será discutida nesta dissertação.

A maioria das equações constitutivas propostas na literatura exibe dependência com a taxa de deformação, algumas apresentam além dessa dependência, variações com outros fatores que influenciam na viscosidade, por exemplo, o modelo de [Walburn e Schneck \(1976\)](#) que também depende do nível de algumas proteínas presentes. Pode-se citar, também, o modelo de [Wang e Stoltz \(1994b\)](#) que além da taxa de deformação

depende do hematócrito.

É possível observar que a maioria das equações propostas na literatura não exibe variação da viscosidade sanguínea com relação ao diâmetro do vaso. Assim, na busca de um modelo reológico que caracterize o escoamento sanguíneo em uma faixa de diâmetro entre 20 e 300 μm , neste trabalho é proposta uma equação constitutiva para o escoamento sanguíneo baseada no modelo pseudoplástico de Wang-Stoltz somado a uma tensão limite, controlados por dois parâmetros que dependem do diâmetro vascular.

Pretendendo possibilitar uma melhor compreensão deste trabalho, os capítulos estão organizados da seguinte forma:

No Capítulo 2 são apresentadas características dos fluidos newtonianos e não-newtonianos, bem como a classificação dos fluidos não-newtonianos. Entre os fluidos não-newtonianos, alguns modelos pseudoplásticos e viscoplásticos são discutidos.

As características do escoamento sanguíneo com ênfase em sua viscosidade aparente são discutidas no Capítulo 3, bem como modelos existentes na literatura. Em seguida, no Capítulo 4, é proposto um modelo constitutivo para o sangue escoando em vasos de diâmetro entre 20 μm e 300 μm . Assim, considerando o modelo proposto e as equações da conservação da massa e da quantidade de movimento, é enunciado o Problema de Stokes Generalizado para o sangue.

No Capítulo 5 é apresentado uma breve discussão sobre a formulação de elementos finitos utilizada para resolver o problema proposto.

Os resultados numéricos obtidos são discutidos no Capítulo 6, onde são analisados os perfis de velocidade, a viscosidade aparente e a pressão vascular para alguns valores de hematócritos. Também são feitas comparações com outros modelos de viscosidade sanguínea existentes na literatura.

2 ESCOAMENTOS NÃO-NEWTONIANOS

O comportamento de fluidos não-newtonianos é encontrado em vários substâncias utilizadas nas indústrias, em experimentos laboratoriais e afins. As equações constitutivas são essenciais para a tradução dos fenômenos associados ao comportamento desses fluidos. Essas equações expressam relações existentes no fluido entre a tensão e a taxa de deformação.

Neste capítulo são apresentadas as definições de fluidos newtonianos e não-newtonianos. Além disso, será feita uma breve explanação da classificação dos fluidos não newtonianos, bem como de alguns modelos pseudoplásticos e viscoplásticos.

2.1 Tipos de Escoamentos

A compreensão da viscosidade surgiu a partir do conceito de Newton da resistência que um fluido oferece para escoar, e que define os fluidos newtonianos. Uma ilustração desse conceito pode ser feita da seguinte forma: considerando-se um fluido confinado entre duas placas planas e paralelas e aplicando uma força \vec{F} paralela às placas, essa placa se movimentará em relação a que se encontra em repouso, gerando um movimento da camada laminar do fluido mais próxima da placa, esse movimento será transmitido para as placa adjacentes, sendo que a camada laminar mais veloz tende a acelerar a camada mais lenta em contato com ela. Isso é devido a movimentação de partículas que resultam em transferência de energia de uma camada para outra, esse movimento produz uma variação na velocidade do fluido que vai continuamente de zero, na interface com a placa inferior, até o valor máximo representado pela velocidade da placa em que foi aplicada a força. Portanto, observa-se que a tensão de cisalhamento, gerada pela força aplicada, é proporcional à variação da velocidade.

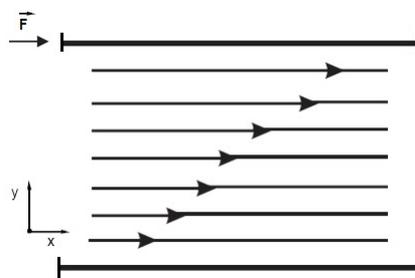


Figura 1 – Esquema ilustrativo de um fluido entre duas placas paralelas utilizadas no experimento de Newton de onde surgiu a Lei de Newton da Viscosidade.

Essa relação é denominada de Lei de Newton da viscosidade e descrita matema-

ticamente como:

$$\tau = \mu_n \dot{\gamma}, \quad (1)$$

onde τ é a tensão de cisalhamento, $\dot{\gamma} = \frac{\partial u}{\partial y}$ é a taxa de variação da velocidade na direção ortogonal ao escoamento ou taxa de deformação do fluido e μ_n é a viscosidade.

Portanto, para escoamentos newtonianos, ou seja, que obedecem a relação descrita na Equação 1, a viscosidade (μ_n), denominada de viscosidade absoluta, é considerada constante para um dado fluido sem variação de temperatura e pressão.

Como exemplo, na Figura 2 estão descritas as curvas da relação entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação para os fluidos newtonianos: óleo de cozinha e xarope de milho (CHHABRA; RICHARDSON, 1999). Observa-se que o gráfico é uma reta que passa pela origem, na qual a declividade angular, da reta de proporcionalidade entre τ e $\dot{\gamma}$, é o valor da viscosidade absoluta, sendo ela constante em toda a curva.

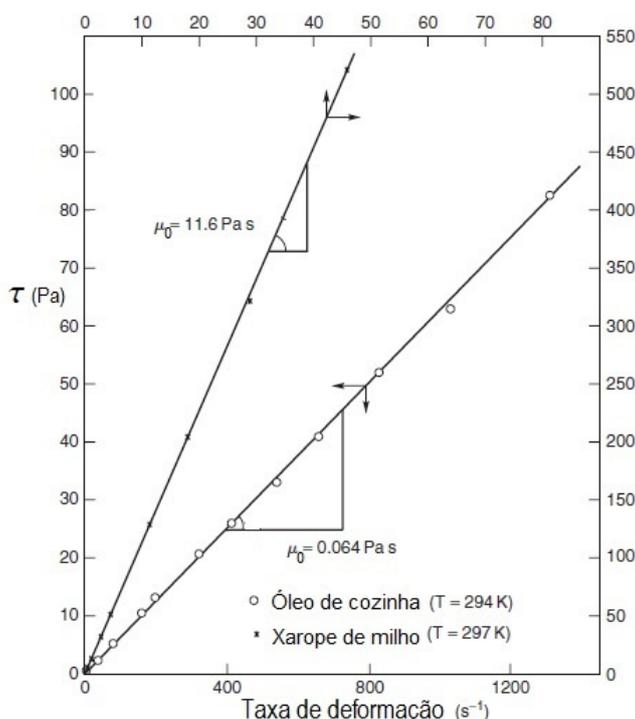


Figura 2 – Relação entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação para fluidos newtonianos como o óleo de cozinha e o xarope de milho.

Fonte: Chhabra e Richardson (1999).

Existem fluidos que sob escoamento cisalhante não podem ser modelados pela Lei de Newton da viscosidade (Equação 1), esses são denominados de fluidos não-newtonianos, pois exibem um comportamento não constante para a viscosidade, denominada de viscosidade aparente. Assim, a variação dessa viscosidade aparente pode ser influenciada por diversas condições do escoamento, tais como: taxa de deformação,

tempo de aplicação da tensão de cisalhamento, concentração de substâncias e formato das partículas em suspensão, variação do diâmetro do domínio do escoamento, entre outras.

Portanto, a classificação para fluidos não-newtonianos é descrita de acordo com o fator que influencia a variação da viscosidade. Assim, segundo [Bird et al. \(1924\)](#), tem-se os dependentes do tempo que são subdivididos em reopéticos e tixotrópicos, os independentes do tempo com tensão limite e sem tensão limite e os viscoelásticos.

Os fluidos viscoelásticos possuem características de líquido viscoso, com propriedades elásticas, e de sólidos, com propriedades viscosas. Esses fluidos quando submetidos a tensões de cisalhamento sofrem deformações e quando estas cessam, ocorre recuperação de parte da deformação sofrida (comportamento elástico) ([CHHABRA; RICHARDSON, 1999](#)). Esse comportamento pode ser visto em massas de farinha de trigo, gelatinas, queijos, glicerina, saliva, mel, óleos pesados, entre outros. Em [Marques e Creus \(2012\)](#) podem ser vistas equações constitutivas que descrevem o comportamento reológico dos fluidos viscoelásticos.

Os fluidos dependentes do tempo apresentam uma relação temporal na tensão de cisalhamento, de forma que a viscosidade possa variar com o tempo ([SKELLAND, 1967](#)). Quando há uma diminuição na viscosidade com o tempo de aplicação da tensão de cisalhamento, classifica-se o fluido como tixotrópico, caso contrário, tem-se os não-tixotrópicos ou reopéticos.

Os fluidos independentes do tempo são materiais em que a taxa de deformação, em certo ponto, independe do histórico da tensão de cisalhamento no tempo, ou seja, a taxa de deformação depende da tensão instantânea naquele ponto. E como já dito anteriormente, eles são classificados em: fluidos sem tensão limite e fluidos com tensão limite.

Os fluidos com tensão limite são denominados de viscoplásticos e os sem tensão limite são subdivididos em pseudoplásticos e dilatantes. Nos dilatantes, a viscosidade aumenta com o aumento na taxa de deformação. Como exemplo de substâncias desse tipo temos: açúcares em solução, farinha de milho em suspensão etc. As características e algumas equações constitutivas dos fluidos viscoplásticos e pseudoplásticos serão apresentadas nas próximas seções, visto que esses fluidos serão a base para a descrição do modelo constitutivo que será proposto para o sangue.

2.2 Fluidos Pseudoplásticos

Os fluidos pseudoplásticos são caracterizados por uma relação decrescente da viscosidade aparente com relação a taxa de deformação.

Assim como em outros fluidos, em alguns modelos pseudoplásticos é possível observar a existências de limitantes da viscosidade, ou seja, quando a taxa de deformação assume um valor alto ou um valor bem próximo a zero, a viscosidade aparente torna-se constante. Será denotado por μ_0 e μ_∞ os limitantes superior e inferior da viscosidade para baixas e altas taxas de deformação, respectivamente. Esse comportamento pode ser observado em escoamentos com partículas que, após seu estado de repouso, assumem uma ordenação na direção do escoamento, devido ao aumento na taxa de deformação, gerando uma redução na viscosidade do fluido.

2.2.1 Modelos Matemáticos para Fluidos Pseudoplásticos

O modelo matemático mais difundido para a descrição do comportamento de fluidos pseudoplásticos é conhecido como Lei da Potência ou *Power-Law*, proposto por Ostwald-de-Waele (BIRD et al., 1924) que baseados na Lei de Newton da Viscosidade desenvolveram o seguinte modelo para a viscosidade aparente,

$$\mu(\dot{\gamma}) = k\dot{\gamma}^{\alpha-2}, 1 < \alpha < 2, \quad (2)$$

onde k é chamado índice de consistência, α é o índice de potência e $\dot{\gamma}$ é a taxa de deformação. Pode-se observar que a limitação existente no parâmetro α gera um expoente negativo em $\dot{\gamma}$, isto possibilita um limitante inferior da viscosidade que se aproxima assintoticamente a zero, mas não apresenta um limitante superior. Portanto, para altas taxas de deformação a viscosidade do modelo *Power-Law* tende a zero.

Pode-se notar que se $\alpha > 2$ a Equação 2 assume o comportamento dos fluidos dilatantes, que é o oposto do comportamento dos fluidos pseudoplásticos. Mas, se $\alpha = 2$ a Equação 2 torna-se a Lei de Newton da Viscosidade, Equação 1. Esses comportamentos estão descritos na Figura 3, onde estão os gráficos da tensão de cisalhamento do modelo *Power-law* para $\alpha = 1.5, 2$ e 2.5 e $k = 1$.

A partir da Lei da Potência (Equação 2) diversos modelos pseudoplásticos foram propostos, como é o caso do modelo do tipo Sisko que surgiu na busca do ajuste no limitante inferior da viscosidade para altas taxas de deformação. Esse modelo é visto em (BARNES et al., 1993) como:

$$\mu(\dot{\gamma}) = \mu_\infty + k\dot{\gamma}^{\alpha-2}, \quad (3)$$

onde μ_∞ é denominada de viscosidade infinita, k é chamado índice de consistência e α de índice de potência.

Em Wang e Stoltz (1994b) são propostas equações para modelar os parâmetros μ_∞ , k e α para o modelo do tipo Sisko e k e α para o modelo de *Power-Law*, objetivando descrever o comportamento do escoamento sanguíneo na corrente vascular. Assim, baseado no trabalho de Wang e Stoltz (1994a), na Tabela 1 estão descritos os valores

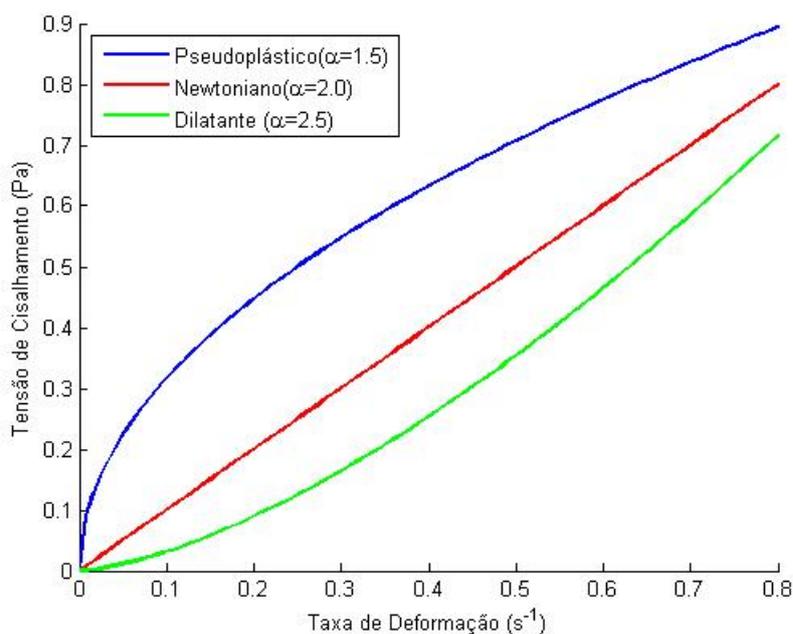


Figura 3 – Gráficos da Lei de Potência que relacionam tensão e taxa de deformação para $\alpha = 1.5$, comportamento pseudoplástico, $\alpha = 2$ comportamento newtoniano e $\alpha = 2.5$ comportamento dilatante.

obtidos para os parâmetros do modelo do tipo Sisko que foram utilizados para gerar o gráfico visto na Figura 4.

Outro modelo pseudoplástico bastante difundido é o Modelo de Carreau, no qual Carreau, em 1972, incorporou à Lei da Potência os limitantes da viscosidade, $\mu_\infty < \mu(\dot{\gamma}) < \mu_0$, da seguinte forma, como em (BIRD et al., 1924):

$$\mu(\dot{\gamma}) = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty)(1 + (k\dot{\gamma})^a)^{\frac{n-1}{a}}, 0 < n < 1 \text{ e } 0 < a. \quad (4)$$

Se considerarmos $n = 1$ e $k = 0$ teremos a viscosidade aparente igual a μ_0 caracterizando um comportamento newtoniano.

Gijzen et al. (1999) comparam resultados numéricos e experimentais do escoamento sanguíneo utilizando os modelos Newtoniano e Não-Newtoniano, sendo este o modelo de Carreau (Equação 4) com a especificação dos parâmetros descritos na Tabela 1.

Na Figura 4 estão ilustrados os gráficos dos modelos *Power-Law*, Wang-Stoltz (Equação 3), Carreau (Equação 4) e o Newtoniano (Equação 1) com $\mu_n = 3.45 \text{ mPas}$ (JOHNSTON et al., 2003b). Para a geração desses gráficos foram considerados os valores dos parâmetros coletados em experimento com escoamento sanguíneo como exposto na Tabela 1.

Tabela 1 – Parâmetros dos modelos de *Power-Law* de Carreau e de Wang-Stoltz obtidos, respectivamente, por (GIJSEN et al., 1999) e (WANG; STOLTZ, 1994a) a partir de experimentos com escoamento sanguíneo.

Modelo Reológico	Parâmetros
<i>Power-Law</i> $\mu = k\dot{\gamma}^{\alpha-1}$	$k = 35mPas$ $\alpha = 0.6$ (JOHNSTON et al., 2003a).
Wang-Stoltz $\mu = \mu_n(\mu_\infty + \alpha\dot{\gamma}^{-1/2})$	$\mu_n = 1.22mPas, \mu_\infty = 2.57mPas$ $\alpha = 13.6mPas^{1/2}$ (WANG; STOLTZ, 1994b).
Carreau (Equação 4)	$a = 0.644, n = -0.392, k = 0.11s$ $\mu_0 = 22.0mPas, \mu_\infty = 2.2mPas$ (GIJSEN et al., 1999).

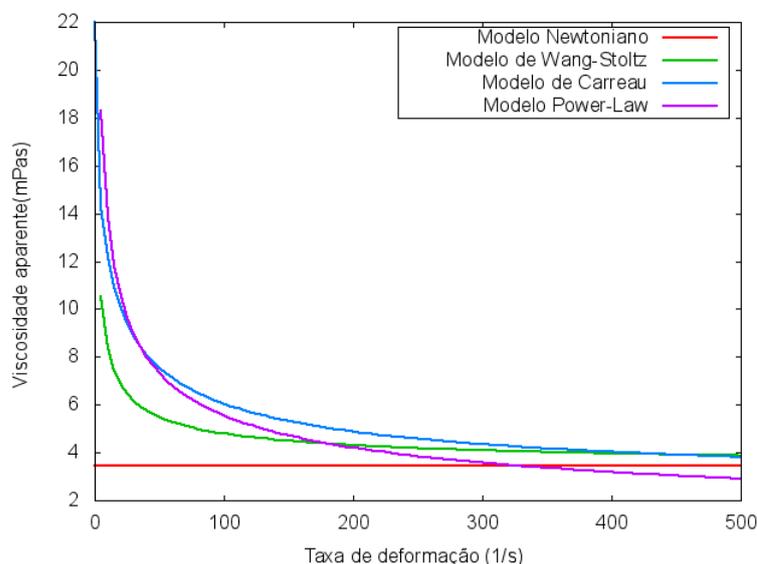


Figura 4 – Gráficos dos modelos: *Power-Law*, de Wang-Stoltz, de Carreau e Newtoniano ($\mu_n = 3.45mPas$), para dados descritos na Tabela 1

2.3 Fluidos Viscoplásticos

Os fluidos independentes do tempo que apresentam tensão limite foram denominados, por Bingham em 1916, como viscoplásticos. Esses fluidos foram assim chamados devido ao seu comportamento plástico, que é caracterizado por demonstrar pouca ou nenhuma deformação até um certo nível de tensão. Acima dessa tensão limite o material escoava como um fluido newtoniano. Tinta de parede e substâncias alimentícias como maionese, margarina e ketchup são exemplos de materiais viscoplásticos, (MACOSKO, 1994).

O perfil de velocidade dos fluidos viscoplásticos é caracterizado por uma região onde a tensão de cisalhamento, gerada pela força aplicada ao fluido, não supera a

tensão limite existente nessa região, fazendo com que o fluido se comporte como um movimento de corpo rígido, ou seja, a taxa de deformação nessa região é nula. Essa região é denominada de zona rígida e está ilustrada na Figura 5.

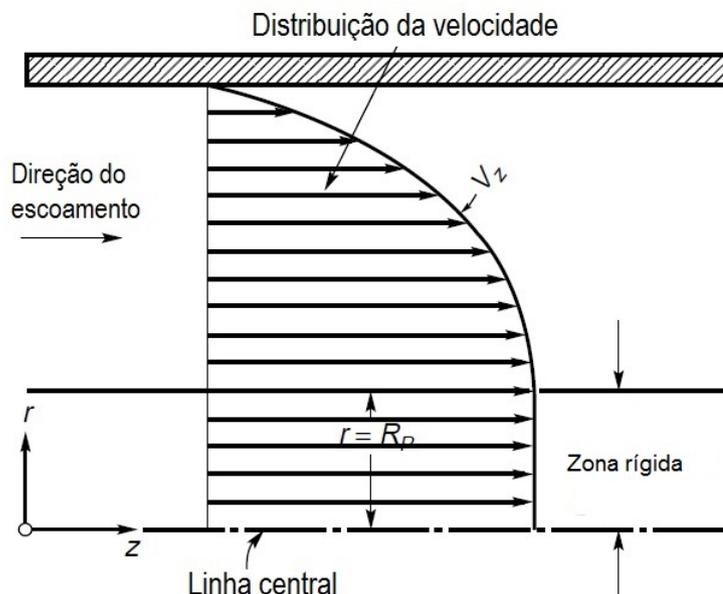


Figura 5 – Esquema de um perfil de velocidade para um escoamento laminar de um fluido viscoplástico em um tubo.

Fonte: [Chhabra e Richardson \(1999\)](#).

2.3.1 Modelos Matemáticos para Fluidos Viscoplásticos

Um modelo matemático para fluidos viscoplásticos foi proposto por Bingham, em 1922, que posteriormente foi denominado de equação constitutiva para os Fluidos de Bingham. Esse modelo é dado por

$$\mu(\dot{\gamma}) = \begin{cases} \tau_0 \dot{\gamma}^{-1} + \mu_n & \tau > \tau_0 \\ \infty & \tau \leq \tau_0. \end{cases} \quad (5)$$

onde τ_0 é a tensão limite e μ_n a viscosidade absoluta, ambas são constantes e determinadas pela substância fluida.

Pode-se notar que para $\tau < \tau_0$ tem-se a taxa de deformação nula que é gerada pela viscosidade aparente infinita definindo assim, a zona rígida, que foi vista na Figura 5.

Um outro modelo para fluidos viscoplásticos é o Modelo de Herschel-Bulkley, uma generalização do modelo de Bingham, que estabelece uma relação não linear entre

a viscosidade e a taxa de deformação da seguinte forma:

$$\mu(\dot{\gamma}) = \begin{cases} \tau_0 \dot{\gamma}^{(-1)} + k \dot{\gamma}^{\alpha-2}, & \tau > \tau_0, \\ \infty, & \tau \leq \tau_0, \end{cases} \quad (6)$$

onde $1 < \alpha < 2$ é chamado de índice da potência e k é denominado de índice de consistência.

Outro modelo muito utilizado para a descrição de suspensões, especialmente para o escoamento sanguíneo em artérias, é o Modelo de Casson (FUNG, 1993), apresentado como

$$\mu(\dot{\gamma})^{1/2} = \begin{cases} \tau_0^{1/2} \dot{\gamma}^{-1/2} + \mu_n^{1/2} & \tau > \tau_0, \\ \infty, & \tau \leq \tau_0, \end{cases} \quad (7)$$

Nas Figuras 6 e ?? estão ilustrados, respectivamente, os gráficos da tensão de cisalhamento e da viscosidade aparente em função da taxa de deformação para os modelos de Bingham (Equação 5), Herschel-Bulkley (Equação 6) e Casson (Equação 7), considerando os coeficientes dos modelos, descritos na Tabela 2, extraídos de Chhabra e Richardson (1999) para dados coletados em experimentos com soluções de polímeros.

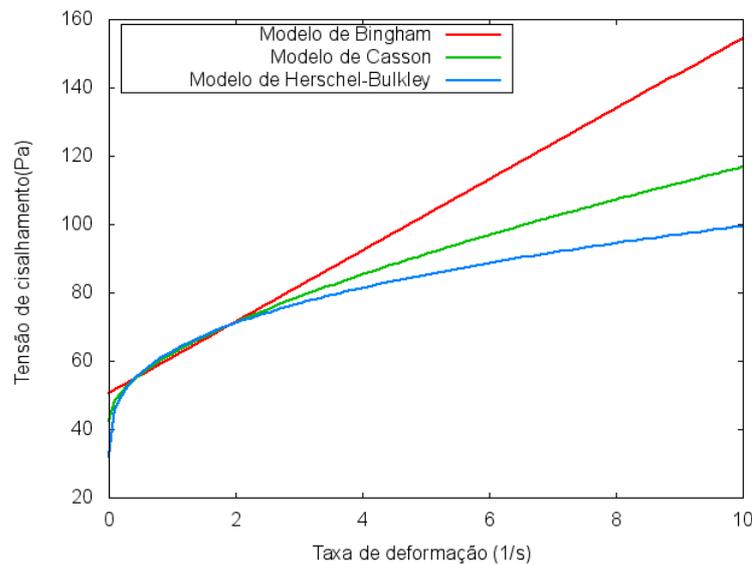


Figura 6 – Relação entre tensão e taxa de deformação da velocidade para os Modelos de Bingham, Herschel-Bulkley e Casson, considerando os valores dos parâmetros na Tabela 2.

Observando a Figura 6 é possível ver que para a taxa de deformação igual a zero a tensão assume um valor maior do que zero, sendo esse o valor da tensão limite. A partir da tensão limite os gráficos assumem um comportamento crescente.

Tabela 2 – Parâmetros obtidos a partir de experimentos com solução de polímeros dos modelos de Bingham, de Hershel-Bulkley e de Casson.

Modelo Reológico	Parâmetros
Bingham (Equação 5)	$\mu_n = 10.41Pas, \tau_0 = 50.45Pa$
Hershel-Bulkley (Equação 6)	$k = 30.79Pas, \alpha = 1.34, \tau_0 = 32Pa$
Casson (Equação 7)	$\mu_n = 1.83Pas, \tau_0 = 42.58Pa$

Fonte: (CHHABRA; RICHARDSON, 1999).

Nas Equações 5, 6 e 7 é possível observar que, para $\tau \leq \tau_0$, a viscosidade dos modelos viscoplásticos tende ao infinito, assim, não há limitantes superiores para a viscosidade. Porém, para a taxa de deformação tendendo ao infinito os limitantes inferiores para os modelos de Bingham, de Herschel-Bulkley e de Casson são, respectivamente, $\mu_n, 0$ e $\mu_n^{1/2}$.

2.3.2 Regularizações

A existência da tensão limite nos modelos para escoamentos viscoplásticos gera uma restrição de desigualdade na viscosidade aparente, vista nas Equações 5, 6 e 7. Essa restrição inviabiliza a condição de regularidade exigida no espaço de solução da velocidade do escoamento. A fim de sanar esse problema, em FRIGAARD I.A. and NOUAR (2005) são examinadas soluções regularizadas por meio de equações contínuas que aproximam-se dos modelos de viscosidade para fluidos viscoplásticos. Portanto, a função de viscosidade regularizada é definida como $\mu_\epsilon : \Omega \subset R^+ \rightarrow R^+$, com o parâmetro de regularização $\epsilon > 0$ tal que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mu_\epsilon = \mu$$

sendo $\mu : \Omega \subset R \rightarrow R^+$ a viscosidade aparente de um fluido viscoplástico.

Existem inúmeras funções regularizadoras da viscosidade proposta na literatura. A mais simples, algebricamente, é dada por, ALLOUCHE M. and FRIGAARD (2000),

$$\mu_\epsilon = \tau_0(\dot{\gamma} + \epsilon)^{-1} + \mu_0, \epsilon > 0. \quad (8)$$

onde esse modelo de regularização é chamada de modelo Simples. Na Figura 7 estão ilustrados os gráficos da tensão de cisalhamento em função da taxa de deformação para os modelos de Bingham clássico (Equação 5) e Bingham regularizado pelo modelo Simples, para os valores de $\epsilon = 1, 0.5, 0.2, 0.1$ e 0.01 . Pode-se observar a boa aproximação existente entre o modelo de Bingham clássico e o modelo de Bingham regularizado para valores de ϵ cada vez menores.

Outros dois modelos regularizadores da viscosidade são o de Bercovier e Engleman (1980) dado por,

$$\mu_\epsilon = \mu_0 + \tau_0 \left(\sqrt{\epsilon^2 + \dot{\gamma}^2} \right)^{(-1)}, \quad (9)$$

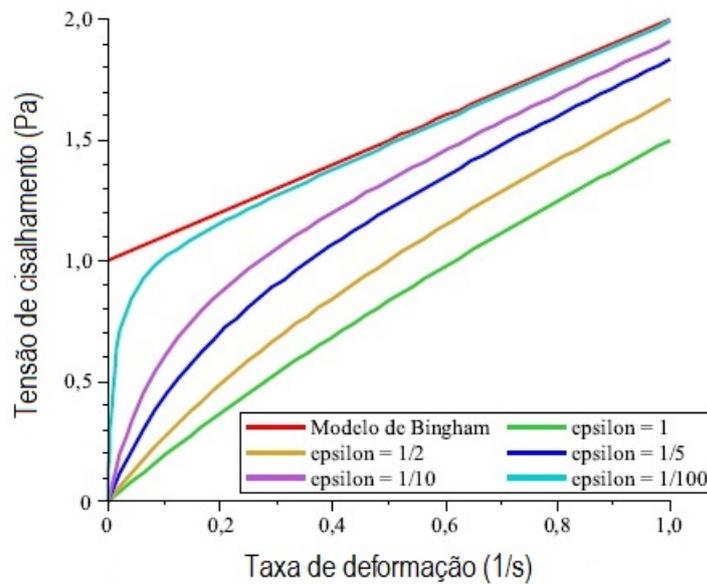


Figura 7 – Gráficos da tensão de cisalhamento em função da taxa de deformação dos modelos de Bingham e de Bingham regularizado pelo Modelo Simples para $\epsilon = 1, 0.5, 0.2, 0.1$ e 0.01 .

e o de Papanastasiou, apresentado por Papanastasiou (1987),

$$\mu_{\epsilon} = \mu_0 + \tau_0 \left(1 - \exp\left[-\frac{\dot{\gamma}}{\epsilon}\right]\right) \dot{\gamma}^{-1}. \quad (10)$$

As Figuras 8 e 9 ilustram os gráficos da tensão de cisalhamento, em função da taxa de deformação, para os modelos regularizadoras de Bercovier-Engleman (Equação 9) e de Papanastasiou (Equação 10), respectivamente, para $\epsilon = 1, 0.5, 0.2, 0.1$ e 0.01 , $\mu_0 = 1$ e $\tau_0 = 1$. Assim, observa-se nessas duas figuras que quando ϵ tende a zero o gráfico da tensão regularizada aproxima-se da tensão de Bingham sem regularização.

Com a finalidade de comparar os três modelos de regularização, na Figura 10 são ilustrados os gráficos das equações da tensão de cisalhamento regularizada; e na Figura 11 estão ilustrados os gráficos das Equações (8), (9) e (10) da viscosidade regularizada. Pode-se observar nos gráficos da Figura 11 a existência do limite superior nos gráficos da viscosidade regularizada e a não existência no modelo de Bingham sem regularização.

Pode-se notar que nas Figuras 10 e 11 que quanto maior a taxa de deformação o modelo de Papanastasiou terá uma melhor aproximação do modelo de Bingham sem regularização. Porém para valores menores da taxa de deformação o modelo de regularização que melhor se aproxima do modelo de Bingham é o de Bercovier-Engleman.

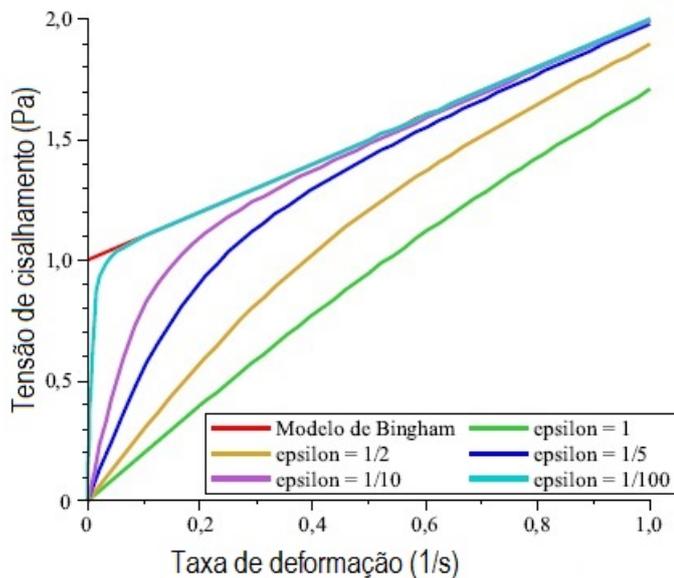


Figura 8 – Gráficos da tensão de cisalhamento em função da taxa de deformação dos modelos de Bingham e de Bingham regularizado pelo Modelo Bercovier-Engleman para $\epsilon = 1, 0.5, 0.2, 0.1$ e 0.01 .

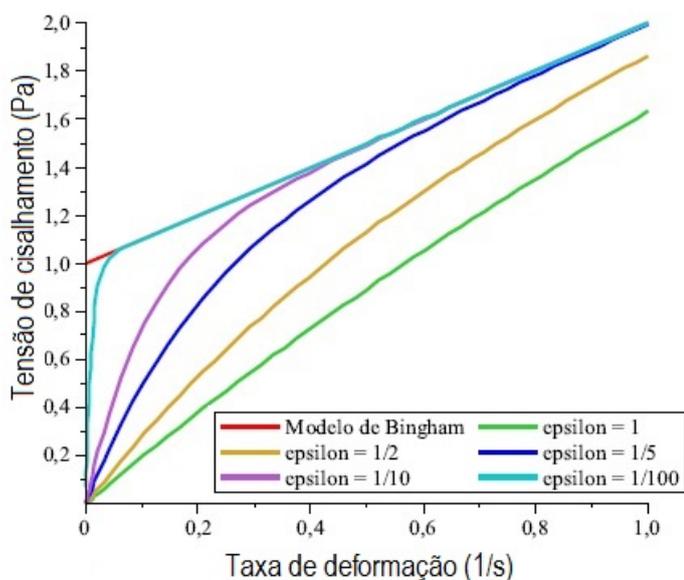


Figura 9 – Gráficos da tensão de cisalhamento em função da taxa de deformação dos modelos de Bingham e de Bingham regularizado pelo Modelo Papanastasiou para $\epsilon = 1, 0.5, 0.2, 0.1$ e 0.01 .

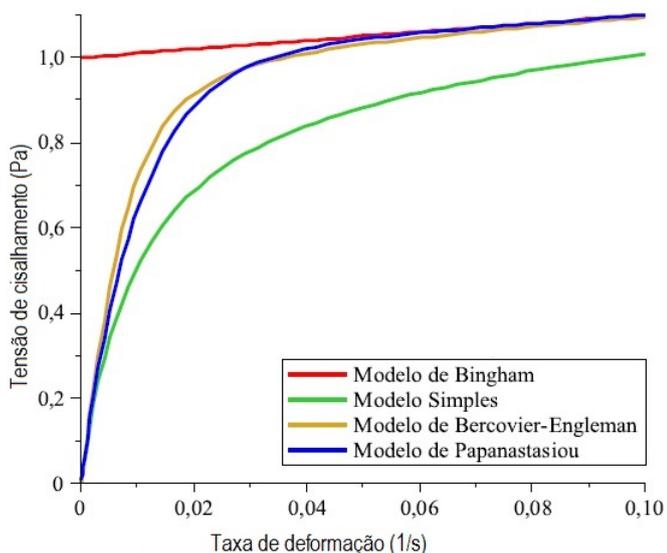


Figura 10 – Gráficos da tensão de cisalhamento em função da taxa de deformação dos modelos de Bingham e Bingham regularizado pelos Modelos Simples, Bercovier-Engleman e Papanastasiou para $\epsilon = 0.1$ e $\tau_0 = 1.0$.

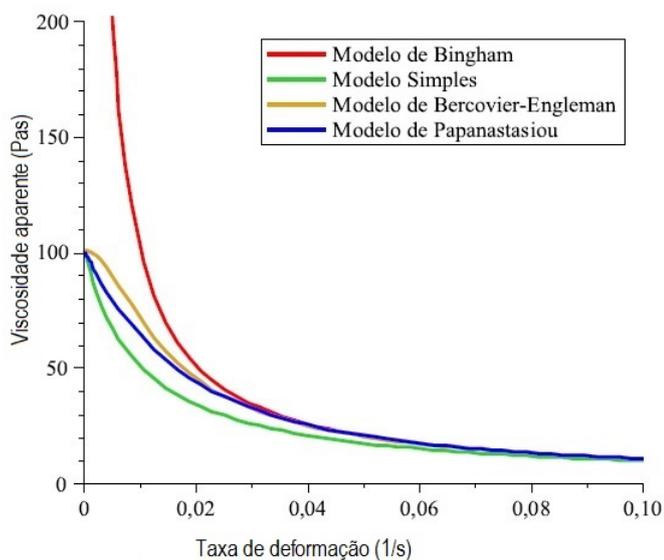


Figura 11 – Gráficos da viscosidade aparente em função da taxa de deformação da velocidade dos modelos de Bingham e Bingham regularizado pelos Modelos Simples, Bercovier-Engleman e Papanastasiou para $\epsilon = 0.1$ e $\tau_0 = 1.0$.

3 O SANGUE

Neste capítulo serão tratados alguns fatores que influenciam a viscosidade aparente do sangue. Serão também discutidos modelos de viscosidade sanguínea existentes na literatura e por fim será proposto um modelo para a viscosidade do sangue considerando o escoamento sanguíneo em vasos de diâmetro entre $20\mu m$ e $300\mu m$.

3.1 Composição Sanguínea

O sangue é uma suspensão predominantemente pseudoplástica de células no plasma, sendo o plasma composto de 90% de água e o restante de substâncias orgânicas, inorgânicas e proteicas. Na composição celular temos células vermelhas, também chamadas de eritrócitos, células brancas (leucócitos) e plaquetas. As células vermelhas estão presentes com maior abundância, ocupando cerca de 50% do volume sanguíneo (FUNG, 1993).

O papel fisiológico fundamental do plasma é o transporte das substâncias que compõem o sangue. Os leucócitos de formato aproximadamente esférico desempenham um papel importante no sistema imunológico agindo como um mecanismo de proteção contra invasores. As plaquetas são as principais responsáveis pela coagulação do sangue, sendo seu formato arredondado ou oval.

Os eritrócitos, por sua vez, possuem formato bicôncavo, quando não deformados (Figura 12), e dimensões aproximadas de $8\mu m$ por $2\mu m$ na borda e $1\mu m$ no centro, como descritas em How (1996). Devido a necessidade dos eritrócitos de escoar em tubos com diâmetros inferiores aos seus diâmetros, eles são extremamente deformáveis e assumem diversas formas em resposta a tensão de cisalhamento. Sua função é a troca entre oxigênio e dióxido de carbono com as células.

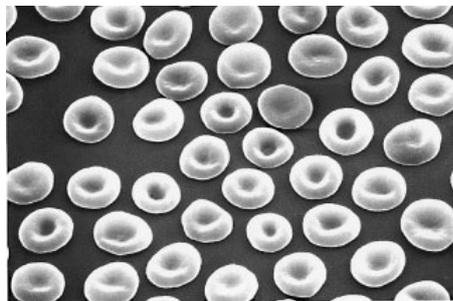


Figura 12 – Eritrócitos sem deformação por microscópio eletrônico de varredura.

3.2 Viscosidade Aparente do Sangue

A viscosidade aparente do sangue, uma das principais características do fluxo sanguíneo, encontra-se sujeita a variações devido aos diversos fatores influenciadores, sendo alguns desses tratados nesta seção, como exemplo: a concentração, agregação e deformabilidade eritrocitária; o diâmetro vascular e a tensão de cisalhamento.

É importante observar que quando for tratado de viscosidade relativa do sangue, esta é calculada pela razão da viscosidade aparente pela viscosidade do plasma.

A porcentagem de células existentes no volume total do sangue é denominada de hematócrito. A influência do hematócrito na viscosidade aparente do sangue é notória em diversos estudos, como exemplo, [Fung \(1993\)](#) propõe uma equação que relaciona de forma crescente a viscosidade relativa do sangue e o hematócrito, como a seguinte:

$$\mu = 1 + aH + bH^2, \quad (11)$$

sendo a e b constantes positivas.

O hematócrito pode ser influenciado por vários fatores. Neste trabalho, estamos interessados na relação do hematócrito com o diâmetro do vaso, onde observa-se que o hematócrito diminui a medida que o diâmetro decresce, ([BARBEE; COKELET, 1971](#)). Esse fenômeno é chamado de efeito *Fahraeus* e deve-se ao fato do deslocamento celular ser mais rápido do que deslocamento plasmático. Isso ocorre devido ao afastamento celular das paredes tubulares, onde a resistência ao fluxo é maior devido a condição de não deslização entre a parede e o fluido. Esse efeito é descrito em [Pries et al. \(1990\)](#) por meio de uma equação que relaciona o hematócrito e o diâmetro do vaso (d), da seguinte forma:

$$H = H_d^2 + H_d(1 - H_d)(1 + 1.7 \exp(-0.35d) - 0.6 \exp(-0.01d)). \quad (12)$$

sendo H o hematócrito do vaso e H_d o hematócrito de referência dos vasos de grande calibre, como ilustrado na [Figura 13](#). Nesta figura os reservatórios representam os vasos com maiores diâmetros, onde o hematócrito considerado é o de referência, e o canal ilustra os vasos de pequeno calibre, no qual chama-se hematócrito do vaso.

Na [Figura 14](#) estão ilustrados os gráficos da Equação 12 para $H_d = 0.35, 0.45$ e 0.55 . É possível observar a relação crescente entre o hematócrito do vaso, o diâmetro e o hematócrito de referência.

Com esse afastamento celular forma-se a região de plasma, próxima à parede do tubo e a região de células no centro.

[Sharan e Popel \(2001\)](#) estudaram a relação entre o comprimento da camada de plasma com o diâmetro tubular considerando o escoamento sanguíneo newtoniano. [Bortoloti e Karam-F. \(2015\)](#) generalizaram esse estudo considerando o escoamento

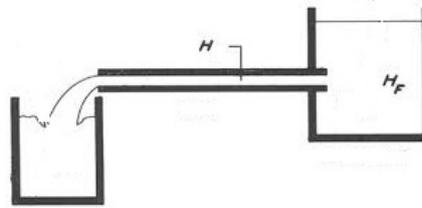


Figura 13 – Figura ilustrativa do hematócrito de referencia (H_d) e do hematócrito do vaso (H).

Fonte: Cokelet et al. (1976)

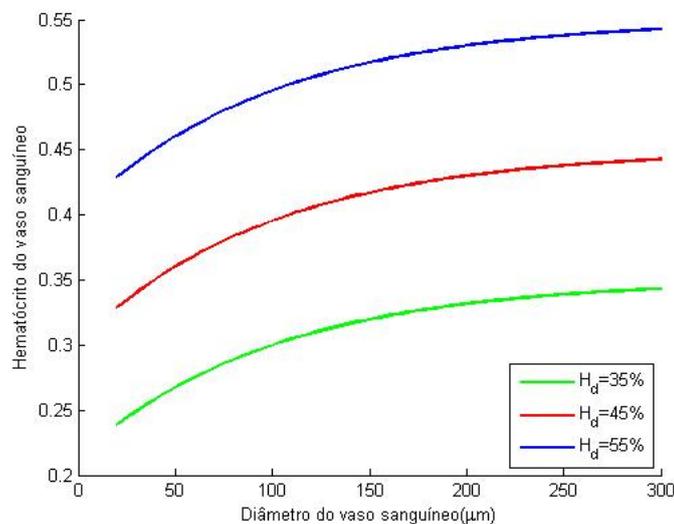


Figura 14 – Gráfico que representa a Equação 12 para $H_d = 0.35, 0.45$ e 0.55 .

sanguíneo pseudoplástico e modelado pela equação constitutiva *Power-Law* (Equação 2), onde na Figura 15 estão ilustrados os gráficos da relação entre a camada de plasma e o diâmetro tubular considerando o modelo *Power-Law* (Equação 2) com dados de Wang e Stoltz (1994b) e de Cho e Kensey (1991) comparado ao modelo newtoniano dado em Sharan e Popel (2001). Nesses, pode-se notar que abaixo de um certo valor do diâmetro, próximo a $100\mu\text{m}$, há um crescimento na camada do plasma à medida que o diâmetro tubular aumenta. Porém, para valores maiores do diâmetro, há uma redução na camada de plasma.

Tratando-se da influência do diâmetro do vaso na viscosidade do sangue, Karam-F. e Bortoloti (2006) discutem a existência de uma faixa de diâmetros intermediária com relação à macro e micro circulação, definindo a mesocirculação e Bortoloti (2006) estabelece a faixa de valores para essa classificação como na Tabela 3.

A relação entre viscosidade aparente e diâmetro do vaso sanguíneo é retratada

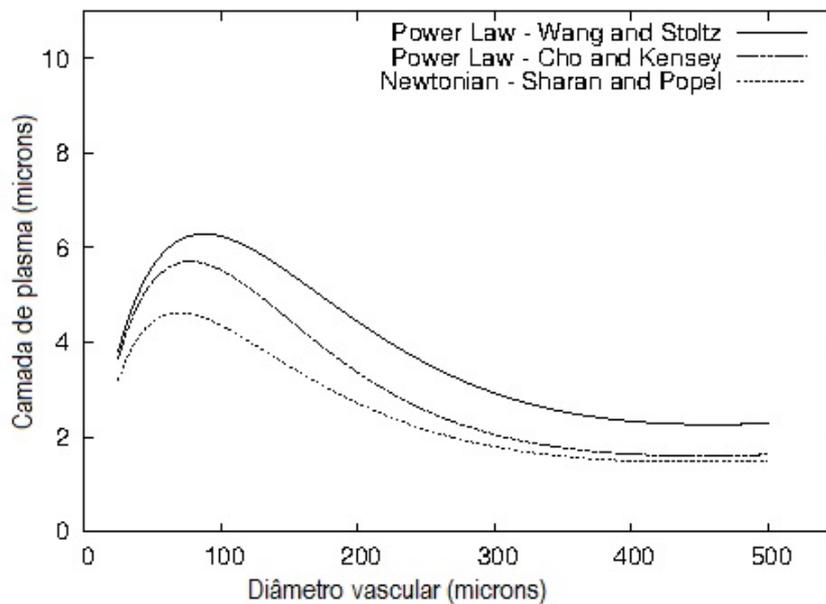


Figura 15 – Variação do comprimento da camada de plasma em relação ao diâmetro do vaso sanguíneo para o modelo de *Power-Law* (Equação 2), considerando dados de Wang e Stoltz (1994b) e de Cho e Kensey (1991), e o modelo newtoniano (SHARAN; POPEL, 2001), para um hematócrito de referência de 45%.

Fonte: Bortoloti e Karam-F. (2015)

Tabela 3 – Classificação por diâmetro dos vasos do sistema circulatório.

Classificação	Diâmetro
Microcirculação	Entre $4\mu m$ e $50\mu m$
Mesocirculação	Entre $50\mu m$ e $300\mu m$
Macrocirculação	Maiores que $300\mu m$

Fonte: Bortoloti (2006).

no efeito *Fahraeus-Lindqvist*, proposto em Fahraeus e Lindqvist (1931), para vasos de diâmetro variando entre $50\text{-}500\ \mu m$, no qual a viscosidade aparente decresce com o decréscimo do diâmetro do vaso sanguíneo. Os diversos trabalhos citados em Pries e Secomb (2005) confirmam o efeito *Fahraeus-Lindqvist* para vasos de diâmetros entre $10\text{-}500\ \mu m$. Esse efeito é ilustrado no gráfico da Figura 16 que descreve a seguinte função para a viscosidade relativa do sangue para o hematócrito do vaso igual a 45 %, proposta por Pries et al. (1990),

$$\mu_{rel0.45} = 220 \exp(-1.3d) + 3.2 - 2.44 \exp(-0.06d^{0.645}), \quad (13)$$

sendo d o diâmetro do tubo.

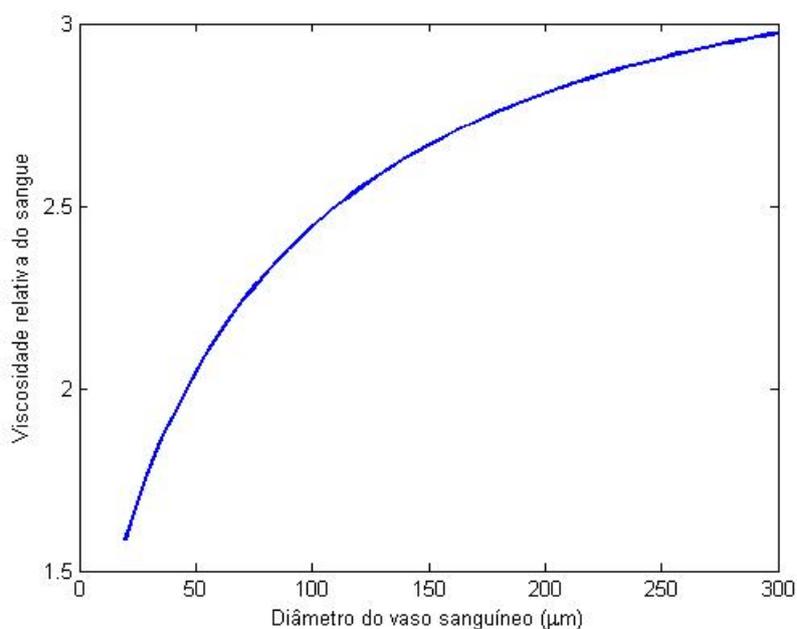


Figura 16 – Gráfico da Função 13 que relaciona a viscosidade aparente relativa do sangue com o diâmetro do vaso, caracterizando o efeito *Fahraeus-Lindqvist*.

Comportamento contrário ao efeito *Fahraeus-Lindqvist* ocorre em vasos de diâmetros menores do que $10 \mu\text{m}$, pois há um aumento na resistência ao escoamento devido ao diâmetro dos eritrócitos estarem próximos ou até maiores do que o diâmetro do vaso na microcirculação. Portanto, há um aumento súbito na viscosidade sanguínea.

Considerando o efeito *Fahraeus* juntamente com o efeito *Fahraeus-Lindqvist* conclui-se que quanto menor for o hematócrito do vaso, menor será a viscosidade aparente do sangue, confirmando assim a relação descrita pela Equação 11.

Para altos valores do hematócrito e baixas taxas de deformação tem-se a formação de agregados celulares (ver Figura 17) devido a existência de proteínas no plasma, como fibrinogênio e globulina, que favorecem a formação desses agrupamentos celulares. A formação desses agregados sob a influência de baixas taxas de deformação eleva a viscosidade aparente do sangue. Porém, com um aumento da taxa de deformação, os agregados celulares rompem-se e os eritrócitos escoam de forma ordenada, diminuindo assim, a viscosidade aparente do sangue.

Na próxima seção serão vistos alguns modelos da viscosidade aparente do sangue considerando diversos fatores que influenciam o escoamento sanguíneo, como alguns discutidos acima.



Figura 17 – Formação de agregações celulares.

Fonte: [Galdi et al. \(2000\)](#).

3.3 Modelos Reológicos para Sangue

Devido aos diversos fenômenos que ocorrem no escoamento sanguíneo, existem muitas especificações de condições para a obtenção de um modelo matemático para a viscosidade do sangue. Neste sentido modelos foram propostos em: [Pries et al. \(1990\)](#), [Pries e Secomb \(2005\)](#), [Luo e Kuang \(1992\)](#), [Chaturani e Biswas \(1984\)](#), [Tu e Deville \(1995\)](#), [Zydney e Oliver III \(1991\)](#) e [Wang e Stoltz \(1994b\)](#), sendo alguns desses discutidos nesta seção.

3.3.1 Macrocirculação

O principal papel da macrocirculação é transportar um volume considerável de sangue a partir do coração para a meso e microcirculação, ([QUARTERONI; FORMAGGIA, 2002](#)), sendo a propriedade elástica existente nas paredes de seus vasos indispensável para a manutenção do escoamento sanguíneo, pois, por sua localização ser mais próxima ao coração, são habituais elevados valores do gradiente de pressão gerado pela ação do coração. Devido a isso, altas taxas de deformação podem ser vistas na macrocirculação, possibilitando o deslocamento celular ordenado e adjacente ao escoamento plasmático. Assim, como o fluxo plasmático é newtoniano, pode-se considerar que na macrocirculação o fluxo sanguíneo obedece a lei de Newton da viscosidade, descrita na Equação 1, ([BAGCHI, 2007](#)).

Em [Johnston et al. \(2003a\)](#) é feito um estudo do escoamento sanguíneo na macrocirculação destacando que para regiões de altas taxas de deformação a viscosidade newtoniana é a que melhor descreve a viscosidade sanguínea, sendo esta $\mu = 3.45 \text{ mPas}$.

3.3.2 Mesocirculação

Com a diminuição da tensão de cisalhamento e, conseqüentemente da taxa de deformação ao longo do vaso sanguíneo na macrocirculação, observa-se a formação dos agregados celulares (vistos na seção 3.2), propiciando um aumento na viscosidade. Já na mesocirculação, o fluxo sanguíneo e a taxa de deformação, começam a aumentar desfavorecem a formação de agregados celulares e, conseqüentemente, causando uma redução na viscosidade aparente do sangue. Portanto, baseado na Seção 2.2, pode-se afirmar que essa relação decrescente entre a taxa de deformação e a viscosidade sanguínea caracteriza o escoamento na mesocirculação como pseudoplástico.

Diversos modelos constitutivos para o escoamento pseudoplástico do sangue são encontrados na literatura. Assim, na Tabela 4 estão expostos alguns desses.

Tabela 4 – Modelos constitutivos do escoamento pseudoplástico sanguíneo.

Modelo Reológico	Coefficientes
Power Law $\mu = k\dot{\gamma}^{n-1}$	$k = 8.290 - 63.11H + 195.5H^2$, $n = 1.262 - 1.833H + 1.297H^2$ (WANG; STOLTZ, 1994b).
Wang-Stoltz $\mu = \eta_p(\eta + \alpha\dot{\gamma}^{-1/2})$	$\eta = 0.652 + 7.667H - 5.647H^2$, $\alpha = 6.618 - 62.62H + 168.2H^2$, $\eta_p = 1.22 \text{ m Pa s}$ (WANG; STOLTZ, 1994b).
Carreau $\mu = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty)[1 + (\lambda\dot{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}}$	$\lambda = 3.313 \text{ s}$, $n = 0.3568$, $\mu_0 = 0.56 \text{ poise}$, $\mu_\infty = 0.0345 \text{ poise}$ (CHO; KENSEY, 1991).
Cross Modificado $\mu = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) \frac{1}{[1 + (\lambda\dot{\gamma})^m]^a}$	$\lambda = 3.736 \text{ s}$, $m = 2.406$, $a = 0.254$, $\mu_\infty = 0.0345 \text{ poise}$, $\mu_0 = 0.56 \text{ poise}$ (CHO; KENSEY, 1991).
Walburn-Schneck $\mu = C_1 \exp(HC_2) \exp\left(\frac{C_4 TPMA}{H^2}\right) \dot{\gamma}^{-100HC_3}$	$C_1 = 0.00797 \text{ mPas}^{HC_3}$, $C_2 = 0.0608$ $C_3 = 0.00499$, $C_4 = 14.585 \text{ lg}^{-1}$, $TPMA = 4.0 \text{ gl}^{-1}$ (WALBURN; SCHNECK, 1976)

As expressões dos parâmetros dos modelos de *Power-Law* e de Sisko dados por Wang e Stoltz (1994b), como descrito na Tabela 4, foram obtidas por regressões polinomiais a partir de valores da viscosidade aparente do sangue normal medidos com um viscosímetro para hematócritos variando entre 0.2 a 0.6. Nos modelos de Carreau e Cross Modificado, descritos na Tabela 4, as constantes dadas por Cho e Kensey (1991) foram também calculadas para o sangue normal.

O modelo de Walburn-Schneck (Tabela 4) foi desenvolvido usando o modelo *Power-Law* com a inserção de parâmetros que dependem do hematócrito e de proteínas

como fibrinogênio e globulina. O valor da constante $TPMA$, considerado na Tabela 4, foi tomado com base nos dados de [Brust et al. \(2014\)](#).

3.3.3 Microcirculação

Ao observar o gráfico da Figura 15, é possível ver que para valores do diâmetro do vaso menores do que $100\mu m$ há uma redução na camada de plasma, o que implica no aumento da camada celular. Assim, conclui-se que na microcirculação o sangue caracteriza-se como um fluido heterogêneo com camadas bem definidas de células e plasma.

Portanto, podemos dizer que o comportamento do escoamento sanguíneo na microcirculação caracteriza-se como viscoplástico (Seção 2.3), no qual, a camada axial celular apresenta uma zona rígida com altos valores da viscosidade e taxa de deformação próxima a zero. Isto se deve a estreita proximidade entre as células. Porém, na região do plasma, mais próxima à parede do tubo, a viscosidade aparente aproxima-se da viscosidade do plasma, caracterizando assim, o escoamento nessa região como newtoniano. A determinação do valor da tensão limite, considerando o escoamento sanguíneo, tem sido foco de estudo em muitos trabalhos científicos. Como em [Picart et al. \(1998\)](#) que propõe uma equação para tensão limite em relação ao hematócrito do vaso, com base em experimentos para hematócritos entre 0.53 a 0.95 a tensão limite, em mPa , é dada por

$$\tau_0 = 26.87H^3. \quad (14)$$

A existência da tensão limite, como descrita em [Fung \(1993\)](#), é marcadamente influenciada por macro moléculas de uma suspensão fluida. Portanto, no escoamento sanguíneo essas macro moléculas são as células, o que justifica a relação da tensão limite com o hematócrito. As forças de coesão entre as células vermelhas bem próximas inviabilizam a variação da velocidade entre elas, assim é caracterizado o movimento de corpo rígido na região densa de células vermelhas.

4 MODELO PROPOSTO

No sistema cardiovascular humano há uma quantidade bem significativa de vasos com diâmetros menores do que $300 \mu m$, sendo estes de grande importância na distribuição sanguínea. Neste trabalho, objetiva-se elaborar uma equação para a viscosidade aparente do escoamento sanguíneo na faixa de valores de diâmetros na transição da mesocirculação para a microcirculação, mais precisamente em vasos de diâmetro entre $300 \mu m$ e $20 \mu m$. Com esse objetivo é apresentada uma equação constitutiva para caracterizar o comportamento pseudoplástico na mesocirculação e o viscoplástico na microcirculação. A junção desses dois comportamentos é, aqui, controlada por parâmetros que variam de acordo com o diâmetro do vaso.

Assim, com base na Equação 3 do Tipo Sisko, proposta por Wang e Stoltz (1994b), adicionando uma tensão limite τ_0 , juntamente aos parâmetros A e B , é proposta uma função da viscosidade aparente do sangue, da seguinte forma:

$$\mu(\dot{\gamma}, d) = \begin{cases} A(d)\tau_0\dot{\gamma}^{-1} + B(d)(\mu_\infty(H) + k(H)\dot{\gamma}^{\alpha(H)-2}), & \tau > \tau_0 \\ \infty, & \tau \leq \tau_0. \end{cases} \quad (15)$$

onde d é o diâmetro do vaso sanguíneo; $\dot{\gamma}$ é a taxa de variação do fluido; H é o hematócrito no vaso; τ é a tensão de cisalhamento; τ_0 é a tensão limite descrita pela Equação 14;

$$\mu_\infty = (0.652 + 7.667H - 5.647H^2)\mu_p$$

é o limitante inferior da viscosidade, como em Wang e Stoltz (1994b), sendo $\mu_p = 1.22 mPa$;

$$k(H) = (6.618 - 62.62H + 168.2H^2)\mu_p$$

(WANG; STOLTZ, 1994b) é o índice de consistência e

$$\alpha(H) = 2.262 - 1.833H + 1.297H^2,$$

($1 < \alpha < 2$) (BORTOLOTTI, 2006), é o índice de potência.

A construção do parâmetro A , que controla a característica viscoplástica do Modelo Proposto, foi feita considerando que em vasos com diâmetros na microcirculação, a característica da viscoplasticidade seja predominante, mas em vasos com diâmetros na mesocirculação essa predominância deva ser da pseudoplasticidade. Com base nessa premissa, neste trabalho são propostos os valores descritos na Tabela 5, a partir dos quais foi feita uma aproximação, por meio de uma função exponencial, gerando a

seguinte relação:

$$A(d) = 4.644 \exp(-0.07677d), \quad (16)$$

onde d é o diâmetro do vaso sanguíneo. Na Figura 18 está ilustrado o gráfico da função A (Equação 16).

Tabela 5 – Pontos utilizados para gerar o parâmetro A por meio da aproximação de uma função exponencial.

Diâmetro(μm)	Parâmetro A
20	1.0
50	0.1
300	0.0

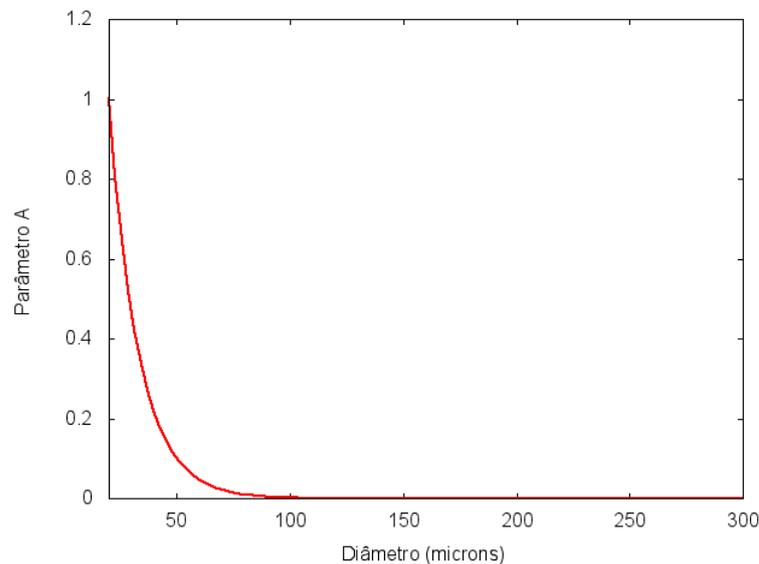


Figura 18 – Gráfico do parâmetro A em relação ao diâmetro do vaso d .

Como a função A objetiva parametrizar a tensão limite existente no Modelo Proposto e como a tensão limite (τ_0), dada na Equação 14, possui uma relação crescente em função do diâmetro do vaso (Figura 19), via Equação 12, então A deverá forçar o produto $A\tau_0$ a ter uma relação decrescente em função do diâmetro do vaso sanguíneo para que a viscoplasticidade seja evidenciada na microcirculação. Na Figura 20 está ilustrado o gráfico do produto $A\tau_0$ em função do diâmetro do vaso para $H_d = 0.45$, sendo τ_0 descrito pela Equação 14.

Da mesma forma que A , o parâmetro B é descrito por meio de uma aproximação com uma função exponencial de valores de B em relação a d . Para a obtenção desses valores utilizou-se, com base na Equação 15,

$$B(d, H) = \frac{\hat{\mu} - A(d)\tau_0(H)\dot{\gamma}^{-1}}{\mu_\infty(H) + k(H)\dot{\gamma}^{\alpha(H)-2}}, \quad (17)$$

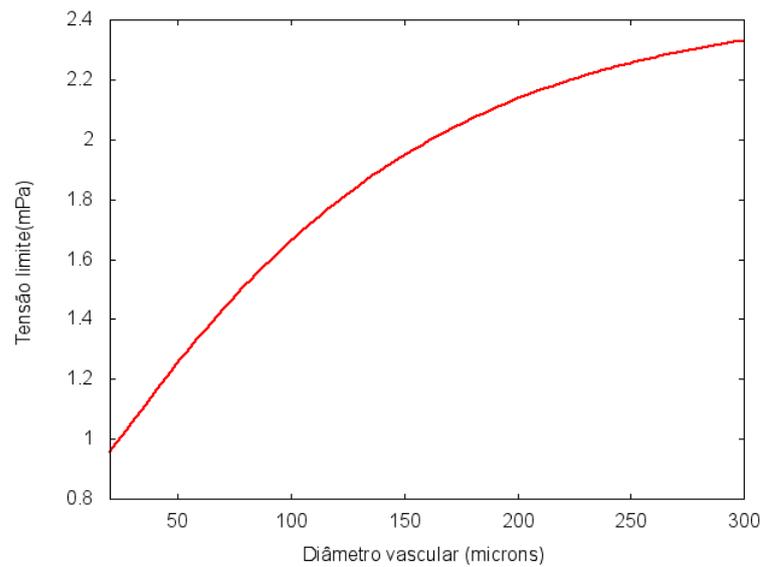


Figura 19 – Gráficos da tensão limite (Equação 14) em função do diâmetro, via Equação 12, para $H_d = 0.45$.

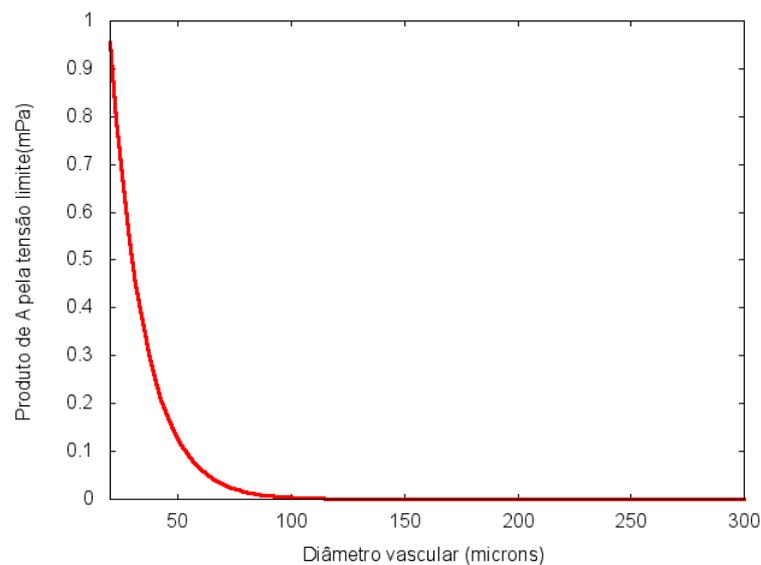


Figura 20 – Gráficos do produto do parâmetro A pela tensão limite (Equação 14) em função do diâmetro para $H_d = 0.45$.

onde as funções $A(d)$, $\tau_0(H)$, $\mu_\infty(H)$, $k(H)$ e $\alpha(H)$ são descritas acima, e para $\hat{\mu}$ foram utilizados dados de laboratório extraídos de [Fahraeus e Lindqvist \(1931\)](#), como exposto na Tabela 6.

Pode-se observar também que na Função 17 é necessário obter uma função que descreva a taxa de deformação ($\dot{\gamma}$) em relação ao diâmetro do vaso. Assim, foi feita uma aproximação por meio de uma função exponencial dos valores coletados em [Bagchi](#)

Tabela 6 – Dados da viscosidade relativa do sangue.

Diâmetro(μm)	Viscosidade Relativa
47	2.95
81	4.453
120	4.3
175	5.7584
277	6.2

Fonte: [Fahraeus e Lindqvist \(1931\)](#).

(2007) como exposto na Tabela 7, cuja função gerada foi

$$\dot{\gamma} = 442.3 \exp(-0.02133d) + 10.28 \exp(0.004712d).$$

Obtendo todas as informações necessárias para a Equação 17, os valores de B são

Tabela 7 – Dados da taxa de deformação do escoamento sanguíneo em relação ao diâmetro do vaso sanguíneo.

Diâmetro(μm)	Taxa de Deformação(s^{-1})
20	285
40	237
80	63
150	43
300	40

Fonte: [Bagchi \(2007\)](#)

obtidos para os diâmetros na faixa de $20\mu m$ a $300\mu m$ e para o hematócrito de referência igual a 45%, pois estamos considerando a média do hematócrito para o sangue saudável, ([FUNG, 1993](#)). A partir daí, foi gerada a seguinte:

$$B(d) = 0.6874 \exp(0.0002484d) - 0.008882 \exp(-0.004519d), \quad (18)$$

onde d é o diâmetro do vaso. Pode-se notar que B é uma função crescente em relação ao diâmetro do vaso, o que evidencia o comportamento pseudoplástico do escoamento na mesocirculação. O gráfico da Função B está ilustrado na Figura 21.

Pode-se observar na Figura 21 que na região da microcirculação o parâmetro B não se anula, pois com o aumento na taxa de deformação a viscosidade aparente do Modelo Proposto tende ao seu limitante inferior que é dado por $B\mu_{inf}$.

4.1 Comparação entre o Modelo Proposto e Modelos da Literatura

Com o objetivo de verificar o comportamento do Modelo Proposto serão feitas comparações com os modelos de: Casson (Equação 7); Walburn-Schneck (Tabela 4) e

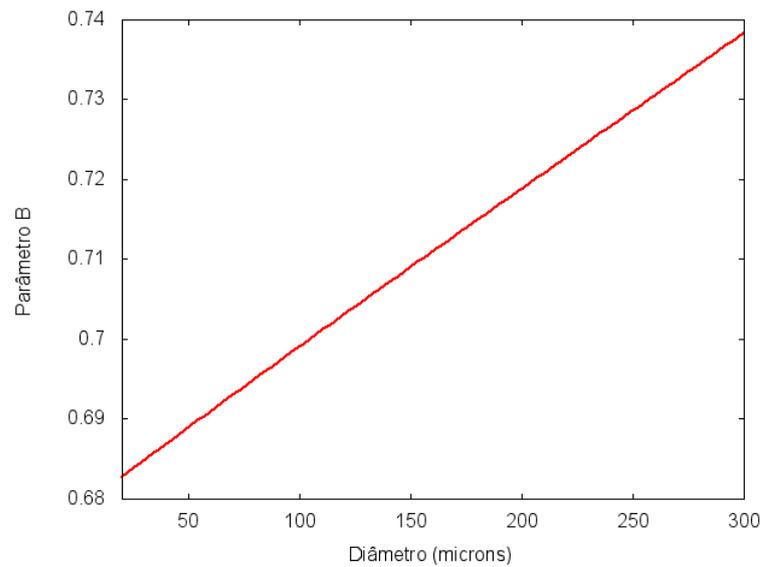


Figura 21 – Gráfico da função de ponderação B em relação ao raio do vaso sanguíneo.

Wang-Stoltz (Tabela 4).

Na Figura 22 estão ilustrados os gráficos da viscosidade aparente do sangue em função do diâmetro do vaso para o Modelo Proposto (Equação 15) e para os modelos de: Casson (Equação 7); Walburn-Schneck (Tabela 4) e Sisko (Tabela 4). Nesses gráficos é possível observar que para diâmetros maiores do que $50\mu m$ o Modelo Proposto está entre os modelos de Walburn-Schneck e Wang-Stoltz, porém para diâmetros menores o Modelo Proposto aproxima-se do modelo de Casson. Assim, a primeira análise feita ao Modelo Proposto confirma as suas características viscoplásticas e pseudoplásticas na micro e na mesocirculação, respectivamente.

Nas Figuras 23 a 26 estão ilustrados os gráficos da viscosidade aparente do Modelo Proposto (Função 15) e dos modelos de: Casson, Sisko e de Walburn-Schneck em relação a taxa de deformação para o hematócrito de referência de 45% e para os valores de diâmetros iguais a 20, 50, 100 e $300\mu m$. Pode-se observar que para os gráficos com $d = 300$ e $100\mu m$ (Figuras 23 e 24), considerando baixos valores da taxa de deformação, há uma melhor aproximação entre o Modelo Proposto e os modelos de Walburn-Schneck e Wang-Stoltz. Porém, para $d = 20\mu m$ (Figura 26) observa-se um afastamento entre os modelos. Agora, observando-se os gráficos para valores mais altos da taxa de deformação (no intervalo $[150s^{-1}, 300s^{-1}]$) é possível ver uma melhor aproximação do Modelo Proposto ao modelo de Casson. Esse comportamento do Modelo Proposto é bastante satisfatório, pois na microcirculação as taxas de deformação são mais elevadas do que na mesocirculação (Tabela 7).

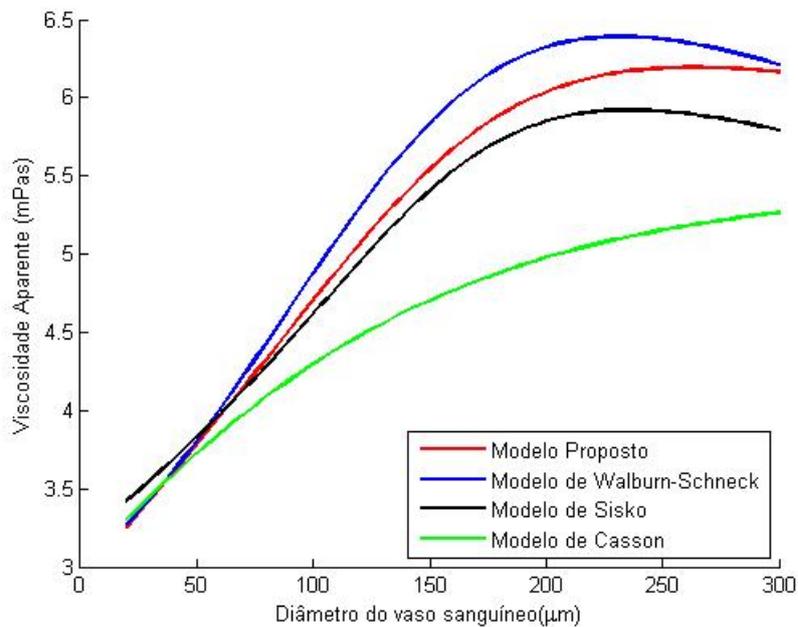


Figura 22 – Gráficos da viscosidade aparente do sangue em função do diâmetro do vaso sanguíneo, para $H_d = 45\%$, gerados a partir do Modelo Proposto (Equação 15) e dos modelos de: Casson (Equação 7), Walburn-Schneck (Tabela 4) e Sisko (Tabela 4).

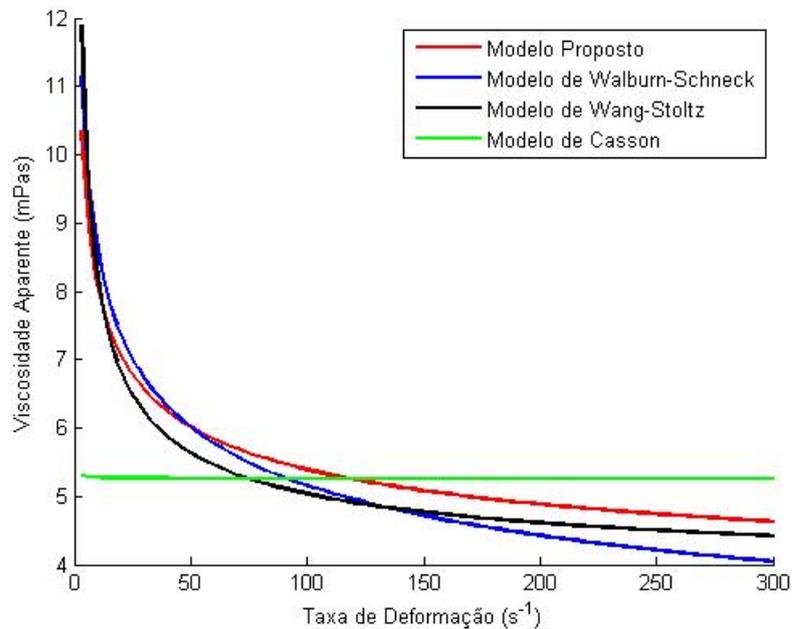


Figura 23 – Gráficos da viscosidade aparente do Modelo Proposto e dos modelos de: Casson, Wang-Stoltz e de Walburn-Schneck em relação a taxa de deformação para o hematócrito de referência de 45% e o diâmetro do vaso de $300\mu m$.

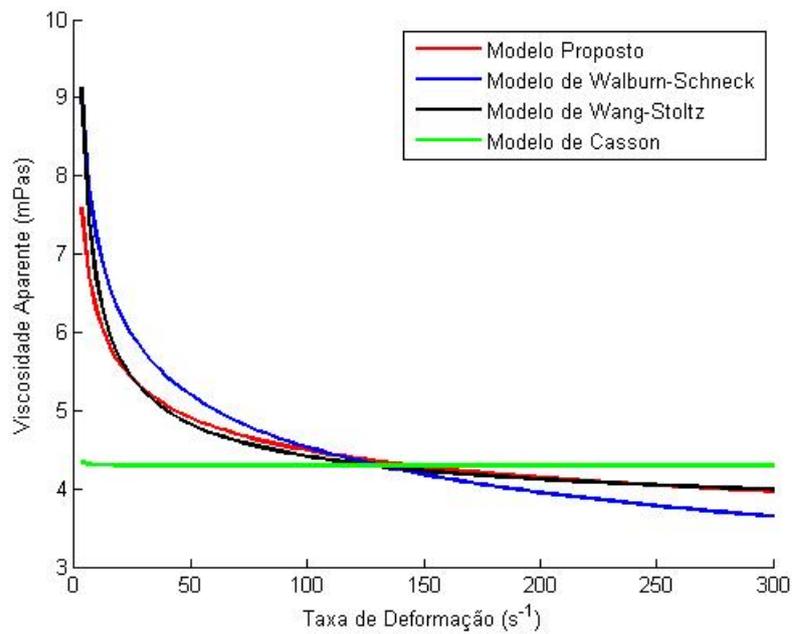


Figura 24 – Gráficos da viscosidade aparente do Modelo Proposto (Função 15) e dos modelos de: Casson, Wang-Stoltz e de Walburn-Schneck em relação a taxa de deformação para o hematócrito de referência de 45% e o diâmetro do vaso de 100 μm.

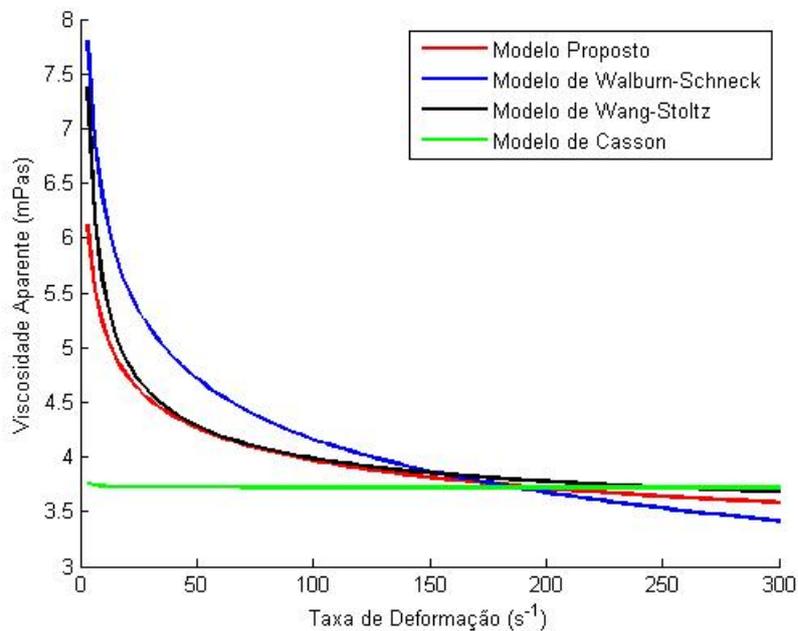


Figura 25 – Gráficos da viscosidade aparente do Modelo Proposto (Função 15) e dos modelos de: Casson, Wang-Stoltz e de Walburn-Schneck em relação a taxa de deformação para o hematócrito de referência de 45% e o diâmetro do tubo de 50 μm.

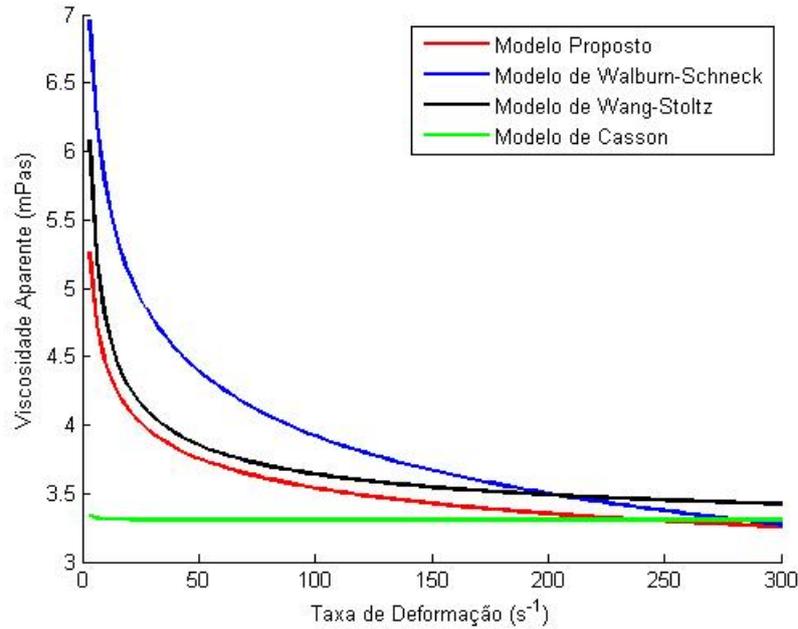


Figura 26 – Gráficos da viscosidade aparente do Modelo Proposto (Função 15) e dos modelos de: Casson, Wang-Stoltz e de Walburn-Schneck em relação a taxa de deformação para o hematócrito de referência de 45% e o diâmetro do tubo de $20\mu m$.

4.2 Viscosidade Regularizada

Devido a descontinuidade do Modelo Proposto gerada pela restrição de desigualdade, faz-se necessário a utilização de modelos regularizadores objetivando suavizar essa descontinuidade.

Baseado nos modelos regularizadores da viscosidade descritos na Seção 2.3.2 é possível escrever o Modelo Proposto com as regularizações da seguinte forma:

Regularização Simples

$$\mu_s = A\tau_0(\dot{\gamma} + \epsilon)^{-1} + B(\mu_\infty + k\dot{\gamma}^{\alpha-2}), \quad (19)$$

Regularização de Bercovier-Engleman

$$\mu_b = A\tau_0(\dot{\gamma}^2 + \epsilon^2)^{-1/2} + B(\mu_\infty + k\dot{\gamma}^{\alpha-2}), \quad (20)$$

Regularização de Papanastasiou

$$\mu_p = A\tau_0(1 - \exp(-\dot{\gamma}/\epsilon))(\dot{\gamma})^{-1} + B(\mu_\infty + k\dot{\gamma}^{\alpha-2}), \quad (21)$$

estes modelos foram baseados nas Equações 8, 9 e 10, respectivamente.

Nas Figuras 27 estão ilustrados os gráficos da viscosidade relativa do sangue em função da taxa de deformação do Modelo Proposto sem regularização (Equação 15) e com regularizações: Simples (Equação 19), Bercovier-Engleman (Equação 20) e Papanastasiou (Equação 21), para $\epsilon = 0.01$.

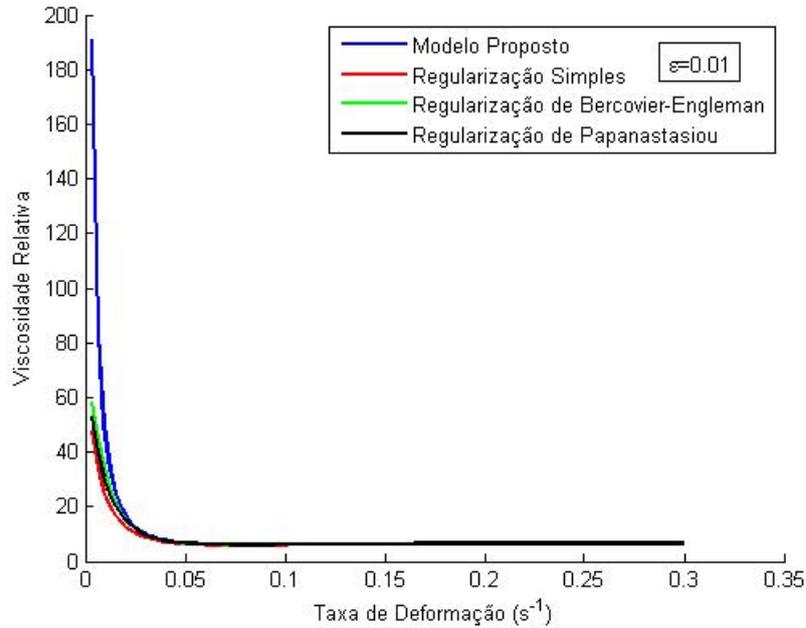


Figura 27 – Gráficos da viscosidade relativa do sangue em função da taxa de deformação do Modelo Proposto sem regularização (Equação 15) e com regularizações: Simples (Equação 19), Bercovier-Engleman (Equação 20) e Papanastasiou (Equação 21), para $\epsilon = 0.01$, $H_d = 45\%$ e $d \in [20, 300]$.

Pode-se observar nos gráficos da Figura 27 que o modelo de regularização de Bercovier-Engleman possui uma melhor aproximação. Portanto, neste trabalho, será considerado o Modelo Proposto da viscosidade regularizado pelo Modelo de Bercovier-Engleman (Equação 20).

4.3 O Problema de Stokes

O balanço das forças que agem no fluido estão descritos na equação da quantidade de movimento, e a condição de incompressibilidade do fluido é descrita na equação da conservação da massa. Antes de enunciá-las, será definido o domínio e algumas hipóteses sobre o escoamento serão estabelecidas.

O domínio considerado será definido como $\Omega \subset R^2$ e $\Gamma = \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out} \cup \Gamma_l$ a fronteira de Ω , sendo Γ_{in} o contorno de entrada do fluido, Γ_{out} o contorno de saída e Γ_l o contorno das laterais, como ilustrado na Figura 28.

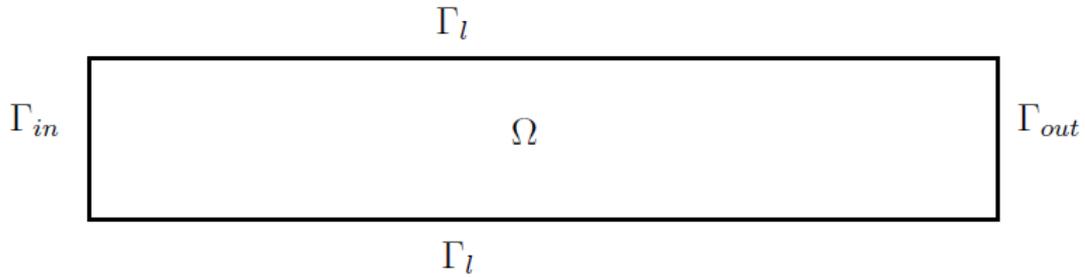


Figura 28 – Domínio Ω e contorno $\Gamma = \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out} \cup \Gamma_l$.

Como o escoamento sanguíneo considerado neste trabalho encontra-se na faixa de diâmetro entre a mesocirculação e a microcirculação, então o regime de escoamento é laminar, isso é devido aos baixos valores do número de Reynolds, como pode ser visto em [Vennemann et al. \(2007\)](#). O número de Reynolds relaciona o diâmetro (d) do domínio, a velocidade média do escoamento (v_m), a viscosidade aparente do fluido (μ) e a massa específica (ρ), da seguinte forma:

$$Re = \frac{\rho v_m d}{\mu}. \quad (22)$$

Para um escoamento lento, incompressível, em regime laminar e não transiente, considera-se:

- Equação da conservação da massa

$$\text{div} \mathbf{u} = 0 \text{ em } \Omega, \quad (23)$$

- Equação da quantidade de movimento

$$-\text{div}(\mu_\epsilon \nabla \mathbf{u}) + \nabla p = 0, \text{ em } \Omega, \quad (24)$$

sendo \mathbf{u} o campo de velocidade, p o campo de pressão, μ_ϵ a viscosidade relativa do sangue dada na Equação 20, div o operador divergente e ∇ o operador gradiente.

As duas Equações 23 e 24 juntamente com as condições de contornos de Dirichlet:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_{in} \text{ em } \Gamma_{in} \\ \mathbf{u} &= 0 \text{ em } \Gamma_l; \end{aligned} \quad (25)$$

e de Neumann:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0 \text{ em } \Gamma_{out}, \quad (26)$$

compõem o Problema de Stokes Generalizado que relaciona a velocidade e pressão que agem sobre um fluido incompressível e independente do tempo como:

Encontrar $\mathbf{u} \in C^2(\Omega)$ e $p \in C^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned}
 -\operatorname{div}(\mu_\epsilon \nabla \mathbf{u}) + \nabla p &= 0, & \text{em } \Omega, \\
 \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, & \text{em } \Omega, \\
 \mathbf{u} &= \mathbf{u}_{in}, & \text{em } \Gamma_{in} \\
 \mathbf{u} &= 0 & \text{em } \Gamma_l \\
 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} &= 0 & \text{em } \Gamma_{out},
 \end{aligned} \tag{27}$$

onde μ_ϵ é a equação da viscosidade do sangue não-newtoniana dada pela Equação 20.

Referente a condição de Dirichlet, temos na parede do tubo (Γ_l) a condição de não deslizamento devido as forças de atrito existente entre a parede e o fluido. A condição de contorno de Neumann em Γ_{out} garante a não variação da velocidade no contorno de saída do duto.

Do ponto de vista matemático soluções exatas são obtidas em casos muito específicos, onde são admitidas várias hipóteses de simplificação do problema, como por exemplo, a consideração de domínios mais simples. O desenvolvimento de simulações em domínios que representem um vaso de uma forma mais próxima do natural, como encontrado no sistema vascular, torna o problema de encontrar soluções exatas praticamente intratável. Nesse contexto os métodos para encontrar soluções numéricas são amplamente utilizados. No próximo capítulo trataremos do método numérico utilizado para resolver o Problema de Stokes Generalizado. Devido ao aspecto não-linear da viscosidade no Problema de Stokes Generalizado, soluções numéricas serão buscadas usando métodos numéricos com a utilização de uma formulação variacional de Elementos Finitos que garante estabilidade e convergência das soluções numéricas.

5 O MÉTODO NUMÉRICO

A formulação variacional é bastante útil na resolução de problemas de valor de contorno, pois, entre outros motivos, possibilita a redução da exigência de regularidade do espaço solução do problema, proporciona métodos de resolução para a obtenção de soluções aproximadas e, através das ferramentas de análise funcional possibilita os elementos necessários ao estudo de existência, unicidade, estimativas *a priori* e *a posteriori* do erro de aproximação, (GELFAND; FOMIN, 1963).

5.1 Definições Preliminares

Dado Ω um domínio limitado em R^2 e Γ seu contorno suave, ou seja, Γ é diferenciável, tal que $\Gamma = \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out} \cup \Gamma_l$, como ilustrado na Figura 28, consideramos os seguintes espaços de Hilbert, (ADAMS, 1975):

$$L_2(\Omega) = \{v : v \text{ mensurável e } \int_{\Omega} v^2 d\Omega < \infty\}$$

e

$$H^1(\Omega) = \{v \in L_2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L_2(\Omega), i = 1, 2\};$$

e seus correspondentes produtos escalares e normas

$$(v, w) = \int_{\Omega} vw d\Omega, \quad (28)$$

$$\|v\|_{L_2(\Omega)}^2 = \left(\int_{\Omega} v^2 d\Omega \right) = (v, v); \quad (29)$$

$$(v, w)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} [vw + \nabla v \cdot \nabla w] d\Omega, \quad (30)$$

$$\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 = \left(\int_{\Omega} [v^2 + |\nabla v|^2] d\Omega \right), \quad (31)$$

onde é definido o produto interno $(A \cdot B) = tr(A^T B)$ e a norma como $|A|^2 = (A \cdot A)$, onde A e B são tensores de segunda ordem. Faz-se necessário definir também,

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ em } \Gamma\},$$

com a norma e produto interno do espaço H^1 .

5.2 O Método de Galerkin

Com o objetivo de reduzir a exigência de regularidade dos espaços de soluções tanto para a velocidade quanto para a pressão, escreveremos o Problema de Stokes Generalizado na sua forma fraca. Inicialmente será considerada a forma variacional mista clássica de Galerkin, sendo que, logo após, será discutida a formulação de elementos finitos do tipo Petrov-Galerkin, que será utilizada na modelagem computacional deste trabalho. Para isso, faz-se necessário considerar os seguintes espaços de funções da velocidade e pressão, respectivamente, como:

$$U = H_0^1(\Omega)$$

e

$$W = L_2(\Omega).$$

Para a obtenção da formulação variacional é necessário efetuar o produto interno de uma função peso ou de ponderação, $q \in W$, com a equação da conservação de massa (Equação 23) e a função $\mathbf{v} \in U$ com a equação do momento linear do Problema de Stokes (Equação 24) da seguinte forma:

$$(\mathbf{f}, \mathbf{v}) = (-\operatorname{div}(\mu_\epsilon \nabla \mathbf{u}) + \nabla p, \mathbf{v}) = -(\operatorname{div}(\mu_\epsilon \nabla \mathbf{u}), \mathbf{v}) + (\nabla p, \mathbf{v}). \quad (32)$$

Aplicando na Equação 32 a Identidade de Green:

$$\int_{\Omega} (\nabla \mathbf{v}) : (\nabla \mathbf{u}) d\Omega = \int_{\Gamma} (\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{n}}) d\Gamma - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} d\Omega,$$

sendo $\frac{d\mathbf{u}}{dn} = \frac{d\mathbf{u}}{dx_1} n_1 + \frac{d\mathbf{u}}{dx_2} n_2$ a derivada normal em Γ . A seguinte formulação variacional mista de Galerkin para o Problema de Stokes da seguinte forma:

Problema G_m : Encontrar $(\mathbf{u}, p) \in U \times W$, tal que

$$\begin{aligned} (\mu_\epsilon(\mathbf{u}) \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) - (p, \operatorname{div} \mathbf{v}) &= \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{v} \in U \\ (\operatorname{div} \mathbf{u}, q) &= \mathbf{0} \quad \forall q \in W, \end{aligned} \quad (33)$$

onde, por motivo de simplificação na notação estamos fazendo $\mu_\epsilon(\mathbf{u}) = \mu(|\nabla \mathbf{u}|)$ e assim considerando $\mu_\epsilon : R^+ \rightarrow R^+$.

Em Hughes (2000) pode ser visto que a solução do problema diferencial contínuo é também solução do problema na sua forma variacional e vice-versa. Conseqüentemente, pode ser verificado que o Problema 33 é equivalente ao Problema 27. Para a implementação do problema variacional (Equação 33) é necessário sua discretização espacial, pois o cálculo numérico da solução do problema é feito para uma quantidade finita de pontos do domínio. Para implementar tal procedimento, o método para a discretização espacial do domínio utilizado neste trabalho é o Método de Elementos Finitos que possui a capacidade de modelar matematicamente domínios complexas devido a sua característica de adaptatividade.

5.3 O Método de Elementos Finitos

O Método de Elementos Finitos consiste em dividir o domínio contínuo do problema variacional em um número finito de sub-regiões, como na Figura 29, onde essas sub-regiões são chamadas de elementos e podem assumir diversas formas geométricas (triângulos, quadriláteros etc.). Para a realização dessa discretização do domínio, mais especificamente do domínio do problema variacional, precisa-se construir espaços de dimensões finitas para U e W .

Portanto, considere Ω subdividido em triângulos $T_h = \{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N\}$, tal que os elementos Ω_i não se sobrepõem e o vértice de cada elemento coincide com o vértice do elemento adjacente (Figura 29), tal que

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{\epsilon=1}^N \bar{\Omega}_\epsilon, \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \forall i \neq j,$$

onde $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, Γ é o contorno de Ω e Ω_i é um conjunto aberto.

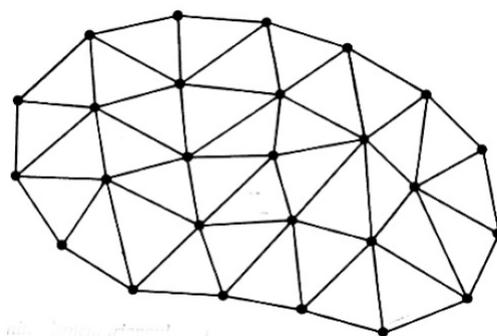


Figura 29 – Representação de um domínio bidimensional contínuo discretizado por triângulos.

Fonte: Johnson (1987)

Para a construção dos espaços de soluções, serão utilizados os polinômios interpoladores de Lagrange que são definidos como

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)L_i^{(n)}(x)$$

onde

$$L_i^{(n)}(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = i \\ 0 & \text{se } k \neq i, \end{cases} \tag{34}$$

que implica em $L_i^{(n)}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$.

Assim, $P_n(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, 2, \dots, n$, no qual podemos concluir que P_n é o polinômio interpolador de f , relativamente aos pontos x_0, x_1, \dots, x_n , sendo n o grau do polinômio. Em [Atkinson \(1978\)](#) pode ser vista uma demonstração do teorema de existência e unicidade de P_n .

Seja $S_h^k(\Omega)$ o espaço de elementos finitos formado por polinômios de Lagrange de grau k e $Q_h^l(\Omega)$ o espaço de elementos finitos gerado por polinômios de Lagrange de grau l , sendo h o parâmetro de malha tal que

$$h = \max h_\varepsilon,$$

onde $\varepsilon = 1, \dots, N_\varepsilon$ e N_ε é o número máximo de elementos da malha e h_ε é a diâmetro do elemento ε . Com base nos espaços $S_h^k(\Omega)$ e $Q_h^l(\Omega)$ serão descritas as aproximações conformes de elementos finitos para os espaço do campo de velocidade U e de pressão W , respectivamente:

$$U_h = (S_h^k(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^2 \subset U \quad (35)$$

e

$$W_h = (Q_h^l(\Omega) \cap L^2(\Omega)) \subset W.$$

As soluções $\mathbf{v} \in U$ e $p \in W$ serão aproximadas, respectivamente, por $v_h \in U_h$ e $p_h \in W_h$ e são escritas como

$$v_h = \sum_{i=1}^n v_i \phi_i(x)$$

e

$$p_h = \sum_{i=1}^n p_i \psi_i(x),$$

onde n é o número de nós da malha e $\phi_i(x)$ e $\psi_i(x)$ são, respectivamente, os polinômios globais de interpolação de graus k e l . Estes polinômios de interpolação, que compõem as bases dos espaços U_h e W_h , respectivamente, são os polinômios de Lagrange definidos como na Equação 34. Assim, a formulação discreta mista de Galerkin para o Problema de Stokes é dada por:

Problema DG_m: Determinar $\{\mathbf{u}_h, p_h\} \in U_h \times W_h$, tal que

$$(\mu_\varepsilon \nabla \mathbf{u}_h, \nabla \mathbf{v}_h) - (p_h, \text{div} \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in U_h \quad (36)$$

$$(\text{div} \mathbf{u}_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in W_h, \quad (37)$$

sendo $\mu_\varepsilon : R^+ \rightarrow R^+$.

No caso do Problema de Stokes linear, a análise de convergência é baseada no Teorema de Brezzi descrito em [Brezzi \(1974\)](#), a estabilidade dessa formulação é verificada no Lema de Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi (LBB) ([BREZZI, 1974](#)), onde a condição

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in U_h} \frac{|(q_h, \text{div} \mathbf{v}_h)|}{\|\mathbf{v}_h\|_{H^1}} \geq c \|q_h\|_{L^2}, \forall q_h \in W_h \quad (38)$$

deve ser satisfeita, sendo c uma constante que precisa ser verificada para cada escolha de U_h e W_h . Portanto, a determinação dos espaços U_h e W_h para a validação da LBB (Equação 38) é um fator crucial para garantir a existência e unicidade da formulação.

Em Karam-F. (1989) são apresentados alguns resultados numéricos para o problema de Stokes linear, discretizado pelo método misto de Galerkin, para diversas combinações de interpolação para os termos da velocidade e da pressão. Assim, é possível observar a existência de muitas combinações de polinômios de interpolação para a velocidade e a pressão que não obedecem a LBB (Equação 38) gerando resultados instáveis nos campos de soluções; como exemplo tem-se os polinômios de mesma ordem para os termos da velocidade e da pressão.

No entanto, o problema abordado nesta dissertação apresenta a viscosidade não constante, fazendo com que torne-se não-linear de modo que a análise de convergência seja desenvolvida com base no Teorema de Scheurer (SCHEURER, 1977).

Bortoloti (2006) propõe uma formulação de elementos finitos do tipo Petrov-Galerkin, para os Problemas de Stokes Generalizados, utilizando o mesmo grau de interpolação tanto para a pressão quanto para a velocidade, com interpolações descontínuas para a pressão, garantindo assim, precisão tanto no campo de velocidade quanto no campo de pressões. As soluções numéricas, geradas neste trabalho, foram obtidas considerando essa formulação de elementos finitos do tipo Petrov-Galerkin que será discutida na próxima seção.

5.4 O Método do tipo Petrov-Galerkin

O método de elemento finito utilizado neste trabalho é definido como uma formulação mista de elementos finitos com interpolações de mesma ordem, sendo descontínuas para a pressão e contínuas para a velocidade. Assim, sem perda de generalização, a descrição desse método do tipo Petrov-Galerkin, será feita, neste trabalho, para o caso particular de $\Omega \subset R^2$.

Considere $\bar{Q}_h^l(\Omega)$ o espaço de funções de grau l formado por polinômios de Lagrange que são descontínuos em todo Ω e contínuo no interior do elemento, e $\bar{W}_h = \bar{Q}_h^l(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ o espaço de aproximação da pressão. Considere também o espaço de aproximação da velocidade U_h como definido na Equação 35.

Então, a formulação do tipo Petrov-Galerkin proposta por Bortoloti (2006) é descrita para o Problema de Stokes Generalizado dado pelas Equações 36 e 37, da seguinte forma:

Problema PG: Encontrar $\mathbf{U}_h = (\mathbf{u}_h, p_h) \in U_h \times \bar{W}_h$ tal que

$$(A_h(\mathbf{U}_h), \mathbf{V}_h) + B_h(p_h, \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \quad \mathbf{V}_h = (\mathbf{v}_h, q_h) \in U_h \times \bar{W}_h \quad (39)$$

$$B_h(\mathbf{u}_h, q_h) = 0 \quad \forall \quad q_h \in \bar{W}_h, \quad (40)$$

onde

$$(A_h(\mathbf{U}_h), \mathbf{V}_h) = (\mu_\epsilon(\mathbf{u}_h) \nabla \mathbf{u}_h, \nabla \mathbf{v}_h) + \delta_2 \vartheta (\text{div} \mathbf{u}_h, \text{div} \mathbf{v}_h) + \frac{\delta_1 h^2}{\vartheta} (-\Delta_\mu \mathbf{u}_h + \nabla p_h, -\Delta_\mu \mathbf{v}_h + \nabla q_h), \quad (41)$$

$$B_h(p_h, \mathbf{v}_h) = -(p_h, \text{div} \mathbf{v}_h), \quad (42)$$

$$\mu_\epsilon(\mathbf{u}_h) = A\tau_0(|\nabla \mathbf{u}_h|^2 + \epsilon^2)^{-0.5} + B(\mu_\infty + k|\nabla \mathbf{u}_h|^{(\alpha-2)}), \quad (43)$$

onde δ_1 e δ_2 são constantes positivas denominadas de parâmetro de estabilização, $\Delta_\mu \mathbf{u}_h = \text{div}(\mu_\epsilon(\mathbf{u}_h) \nabla \mathbf{u}_h)$ e ϑ é uma constante positiva dimensional. Pode-se observar que se considerarmos $\delta_1 = \delta_2 = 0$, a formulação de Petrov-Galerkin se reduz à formulação mista de Galerkin, que é instável para interpolação de mesma ordem.

Em [Bortoloti e Karam-F. \(2012\)](#) são feitos estudos de estabilidade e convergência dessa formulação para o Problema de Stokes Generalizado com viscosidade descrita pela equação de Wang-Stoltz e, também, resultados numéricos são apresentados confirmando a análise matemática de estabilidade e convergência do método. Considerando a equação da viscosidade proposta (Equação 43), é possível observar que para $A = 0$, isto é, para regiões do diâmetro entre 100 e 300 μm , o Modelo Proposto aproxima-se do modelo de Wang-Stoltz, a menos de um parâmetro (B). Assim, os resultados obtidos em [Bortoloti e Karam-F. \(2012\)](#) confirmam que a utilização dessa formulação (Equação 42), considerando o Modelo Proposto para a viscosidade na faixa de diâmetro entre 100 e 300 μm , gera resultados estáveis tanto para os campos de pressão e de velocidade.

Para regiões do domínio onde $A \neq 0$, ou seja, para diâmetros entre 20 e, aproximadamente, 100 μm , a formulação do tipo Petrov-Galerkin, para a viscosidade descrita como no Modelo Proposto, é validada pelos estudos feitos em [Faria et al. \(2006\)](#), onde são testados baixos valores da tensão limite, para o modelo viscoplástico de Bingham, chegando a conclusão de soluções estáveis tanto para a pressão quanto para a velocidade. Os valores da tensão limite utilizados neste trabalho são $\tau_0 = 0.024485, 0.0447$ e $0.0737 Pa$, se enquadrando nos estudos feitos em [Faria et al. \(2006\)](#).

5.4.1 Algoritmo Iterativo

Devido a não linearidade da viscosidade considerada no Problema, faz-se necessário a utilização de um algoritmo iterativo com o objetivo de linearizar o problema. Assim, como em [Bortoloti \(2006\)](#), o método iterativo utilizado foi o de Picard, no qual o termo de viscosidade é atrasado em relação aos outros termos da seguinte forma:

Dado $\mathbf{u}_h^0 \in U_h$ determinar $\mathbf{u}_h^n \in U_h$, com $n > 0$, tal que

$$(A(\mathbf{u}_h^{n-1}) - BC^{-1}B^T(\mathbf{u}_h^{n-1}))\mathbf{u}_h^n = \mathbf{0}, \quad (44)$$

sendo a pressão calculada como

$$p_h^n = -C^{-1}B^T(\mathbf{u}_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n, \quad (45)$$

onde

$$A(\mathbf{u}_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n = (\mu_\epsilon(\mathbf{u}_h^{n-1})\nabla\mathbf{u}_h^n, \nabla\mathbf{v}_h) + \delta_2\vartheta(\operatorname{div}\mathbf{u}_h^n, \operatorname{div}\mathbf{v}_h) + \frac{\delta_1 h^2}{\vartheta}(\operatorname{div}(\mu_\epsilon(\mathbf{u}_h^{n-1})\nabla\mathbf{u}_h^n), \Delta_\mu\mathbf{v}_h)_h,$$

$$B^T(\mathbf{u}_h^{n-1})\mathbf{u}_h^n = (\operatorname{div}\mathbf{u}_h^n, q_h) - \frac{\delta_1 h^2}{\vartheta}(\operatorname{div}(\mu_\epsilon(\mathbf{u}_h^{n-1})\nabla\mathbf{u}_h^n), \nabla q_h)_h,$$

$$Bp_h^n = (p_h^n, \operatorname{div}\mathbf{v}_h) - \frac{\delta_1 h^2}{\vartheta}(\nabla p_h^n, \nabla q_h)_h,$$

$$Cp_h^n = \lambda(p_h^n, q_h) + \frac{\delta_1 h^2}{\vartheta}(\nabla p_h^n, \nabla q_h)_h.$$

O termo $\lambda(p_h^n, q_h)$, $0 < \lambda \ll 1$, na definição de C , foi introduzido somente para garantir a unicidade da solução da pressão.

A tolerância para a aproximação do campo de velocidade é dada por

$$\frac{\|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}\|}{\|\mathbf{u}_h^{n-1}\|} < \varepsilon_1,$$

onde $0 < \varepsilon_1 \ll 1$. Sendo a atualização do campo de velocidade da seguinte forma:

$$\mathbf{u}_h^n = \mathbf{u}_h^{n-1} + \rho(-\Delta_\mu\mathbf{u}_h^{n-1} + \nabla p_h^{n-1}),$$

até a satisfação residual

$$\|-\Delta_\mu\mathbf{u}_h^{n-1} + \nabla p_h^{n-1}\| < \varepsilon_2,$$

onde $\rho > 0$ controla a influência da atualização em cada passo de iteração e $0 < \varepsilon_2 \ll 1$ controla a tolerância do esquema iterativo.

6 RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados os resultados numéricos obtidos a partir da modelagem computacional do Problema de Stokes Generalizado para um fluido incompressível considerando uma viscosidade não-newtoniana. Essa viscosidade é uma caracterização dos comportamentos pseudoplástico e viscoplástico com base no modelo de Wang-Stoltz adicionada uma tensão limite. A partir dessa viscosidade, objetiva-se modelar as características do escoamento sanguíneo entre vasos de diâmetro de 20 a 300 μm , como descrito no Capítulo 3.

Para a modelagem computacional do Problema de Stokes Generalizado, foi utilizada a formulação de elementos finitos do tipo Petrov-Galerkin (BORTOLOTTI, 2006), apresentada no Capítulo 5, que garante convergência e estabilidade nas soluções obtidas para os graus dos polinômios de interpolação da pressão e da velocidade iguais e maiores que dois, considerando os parâmetros de estabilização $\delta_1 = 1$ e $\delta_2 = 10000$. Essa combinação dos valores de δ_1 e δ_2 garante a estabilidade nas soluções, visto que, o alto valor de δ_2 é influenciado pela tensão limite existente no modelo, esse fato pode ser visto em Faria et al. (2006).

O domínio considerado para o Problema de Stokes Generalizado está descrito na Figura 30, que representa uma seção transversal de um vaso sanguíneo com o diâmetro variando entre 20 e 300 μm . A discretização desse domínio foi feita utilizando elementos quadriláteros de nove nós gerando uma malha com 17.141 elementos e 42.000 nós.

As condições de contorno de Dirichlet foram de não deslizamento ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$) nas paredes do tubo, ou seja, no contorno Γ_l e em Γ_{in} (ver Figura 30) a velocidade considerada foi de $100\mu m/s$ na direção longitudinal e zero na direção radial.

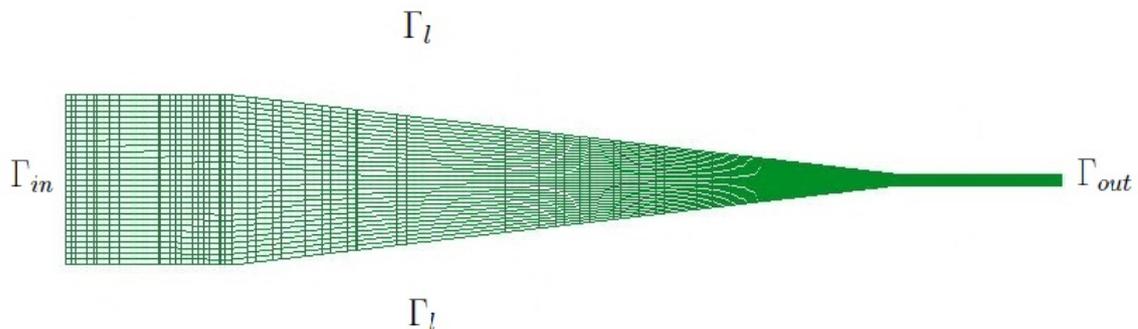


Figura 30 – Malha de elementos finitos do domínio considerado para o Problema de Stokes.

Para os resultados que serão mostrados, os hematócritos de referência considerados foram $H_d = 35\%$, 45% , e 55% . Já para a variação do diâmetro vascular foram

considerados valores que estão descritos na Tabela 8 e classificados de acordo com a Tabela 3.

Tabela 8 – Classificação do diâmetro para valores de x no domínio.

$x(\mu m)$	Diâmetro (μm)	Classificação do diâmetro
300	300	Macrocirculação
600	286	Mesocirculação
1000	230	
2000	90	
2600	20	Microcirculação

Serão analisados as viscosidades, os perfis de velocidade e a pressão, para um escoamento sanguíneo considerando a viscosidade aparente do sangue como descrito no Modelo Proposto (Equação 15). Para efeitos de comparação, resultados dos modelos de Casson (Equação 7), de Walburn-Schneck e de Wang-Stoltz (descritos na Tabela 4) são também expostos juntamente com os gráficos do Modelo Proposto.

6.1 Viscosidade

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos para a viscosidade aparente do sangue considerando os vasos de diâmetros iguais a 20, 90, 230, 286 e 300 μm como ilustrado nos gráficos das Figuras 31 a 41.

Fixando o hematócrito de referência e variando o diâmetro do vaso, como nos gráficos da Figura 36, é possível observar que quanto menor o diâmetro do vaso, menores serão os valores da viscosidade aparente do sangue, caracterizando o efeito *Fahraeus-Lindquist*, sendo que o menor valor atribuído ao diâmetro é de 20 μm . Agora, fixando o diâmetro do vaso e variando o hematócrito de referência (Figuras 31 a 35) observa-se que quanto maior for o hematócrito, maiores serão os valores da viscosidade. Portanto, com base neste comportamento e no efeito *Fahraeus-Lindquist* temos a relação crescente entre o diâmetro e o hematócrito, confirmando o efeito *Fahraeus* como descrito na Seção 3.2.

Pode-se observar nos gráficos das Figuras 31 a 35 que o menor valor da viscosidade localiza-se próximo à parede do tubo. A partir daí, a variação da viscosidade é pequena e ao passo que se aproxima do centro do tubo há um aumento na viscosidade até assumir seu valor máximo no centro do tubo. Assim, é evidente os platôs de viscosidade (vistos na Seção 2.2) tanto nas proximidades da parede do tubo quanto no centro do tubo, onde observa-se, respectivamente, altos e baixos valor da taxa de deformação. Isso é devido ao comportamento pseudoplástico do escoamento sanguíneo caracterizado pelo Modelo Proposto.

Nas Figuras 37 a 41 estão ilustrados os gráficos da viscosidade do Modelo Proposto e dos modelos de Casson (Equação 7) para a tensão limite descrita como $\tau_0 = (0.625H)^3$ (FUNG, 1993), de Walburn-Schneck e de Wang-Stoltz descritos na Tabela 4. Pode-se observar que os valores da viscosidade do Modelo Proposto estão entre os modelos de Walburn-Schneck e Wang-Stoltz para os diâmetros do vaso iguais a $300\mu m$ (Figura 37), $286\mu m$ (Figura 38), $230\mu m$ (Figura 39) e $90\mu m$ (Figura 41). Sendo que com uma diminuição no diâmetro do vaso há uma maior aproximação entre os gráficos do Modelo Proposto e o modelo de Walburn-Schneck. Por fim, quando o diâmetro do vaso assume $20\mu m$ o Modelo Proposto aproxima-se do modelo de Walburn-Schneck no centro do tubo e quando tende à parede a aproximação é com o modelo de Casson.

A distribuição da viscosidade em todo o domínio é vista nas Figuras 42 a 45 para o Modelo Proposto e para os modelos de Casson, de Walburn-Schneck e de Wang-Stoltz.

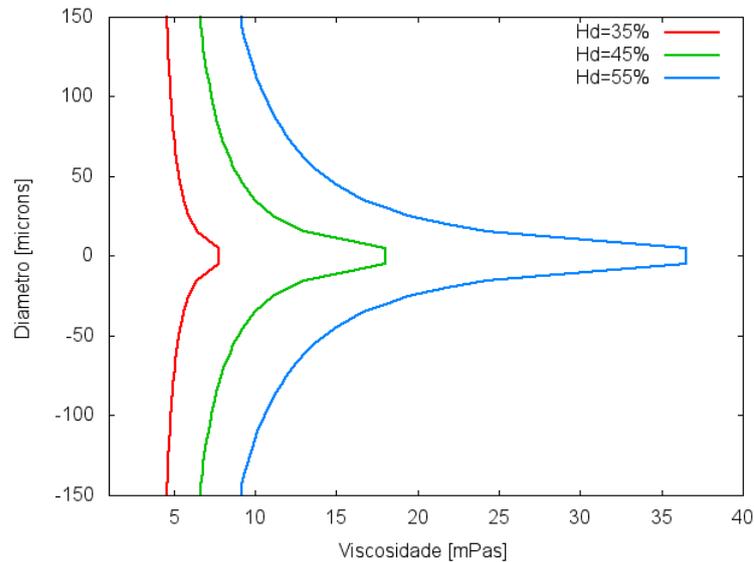


Figura 31 – Perfis de viscosidade para $d = 300\mu m$ e hematócritos $H_d = 35\%$, 45% e 55% .

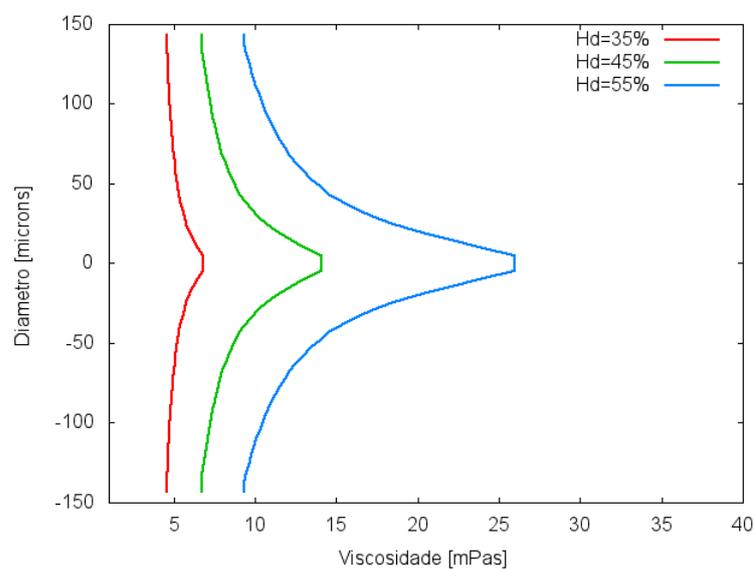


Figura 32 – Perfis de viscosidade para $d = 286\mu m$ e hematócritos $H_d = 35\%$, 45% e 55% .

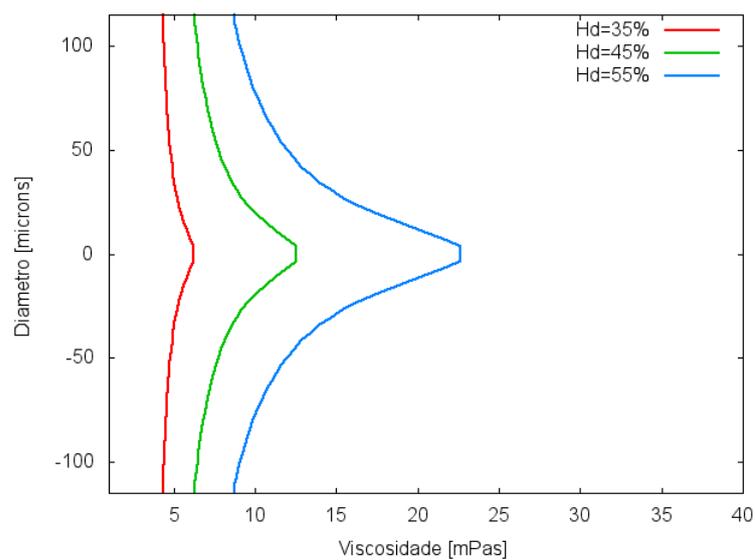


Figura 33 – Perfis de viscosidade para $d = 230\mu m$ e hematócritos $H_d = 35\%$, 45% e 55% .

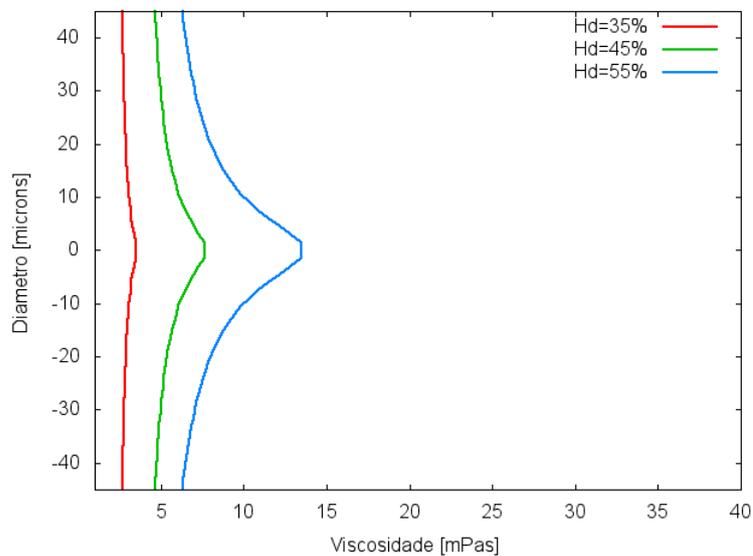


Figura 34 – Perfis de viscosidade para $d = 90\mu m$ e hematócritos $H_d = 35\%$, 45% e 55% .

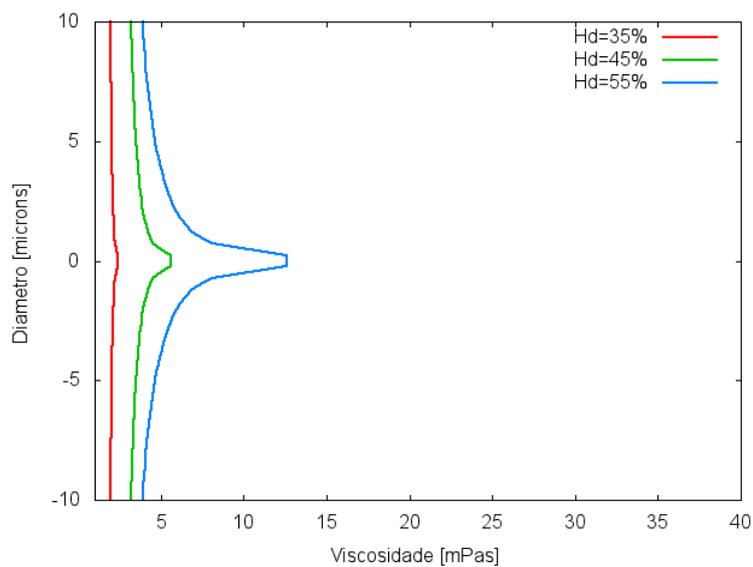


Figura 35 – Perfis de viscosidade para $d = 20\mu m$ e hematócritos $H_d = 35\%$, 45% e 55% .

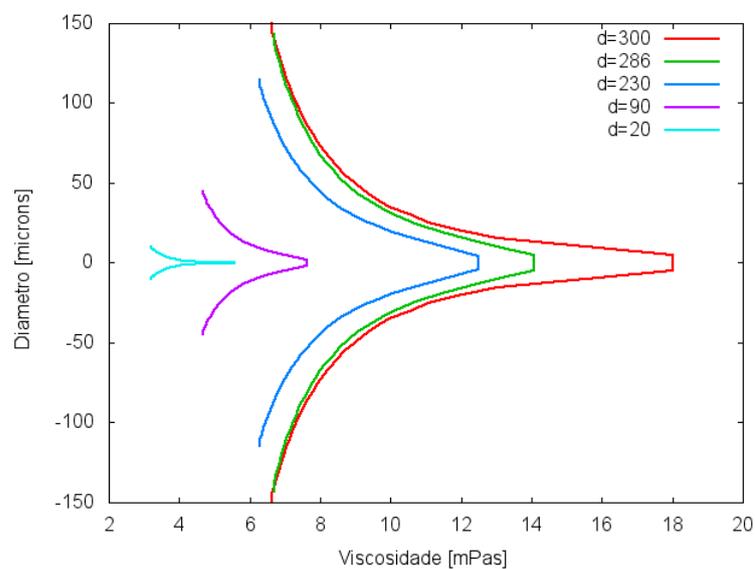


Figura 36 – Perfis de viscosidade para $H_d = 45\%$ com variação no diâmetro tubular.

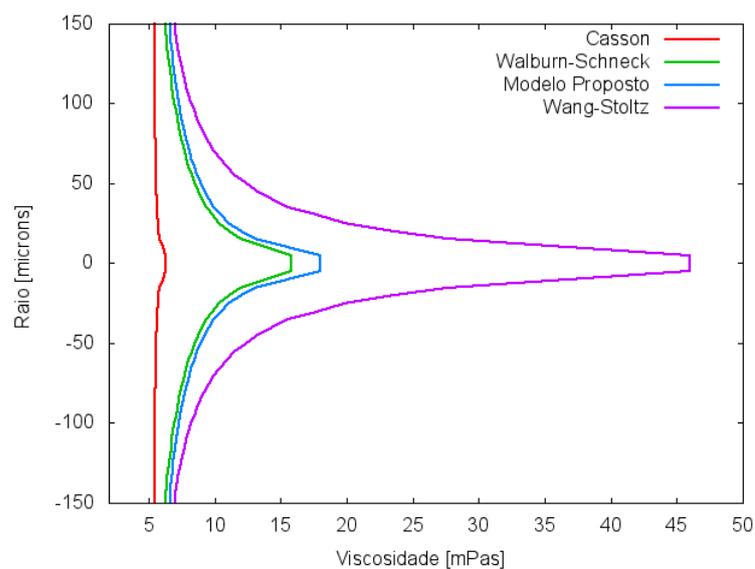


Figura 37 – Perfis de viscosidade para $H_d = 45\%$ e $d = 300\mu m$ dos modelos de Casson, Walburn-Schneck, Wang-Stoltz e o Modelo Proposto.

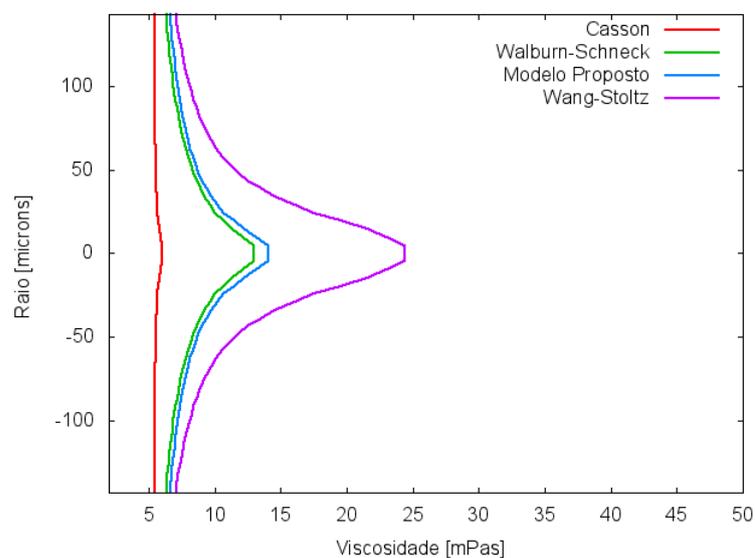


Figura 38 – Perfis de viscosidade para $H_d = 45\%$ e $d = 286\mu m$ dos modelos de Casson, Walburn-Schneck, Wang-Stoltz e o Modelo Proposto.

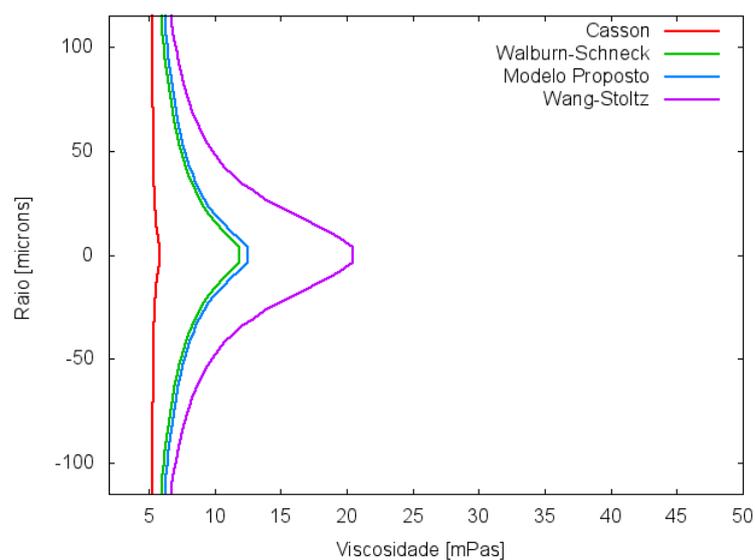


Figura 39 – Perfis de viscosidade para $H_d = 45\%$ e $d = 230\mu m$ dos modelos de Casson, Walburn-Schneck, Wang-Stoltz e o Modelo Proposto.

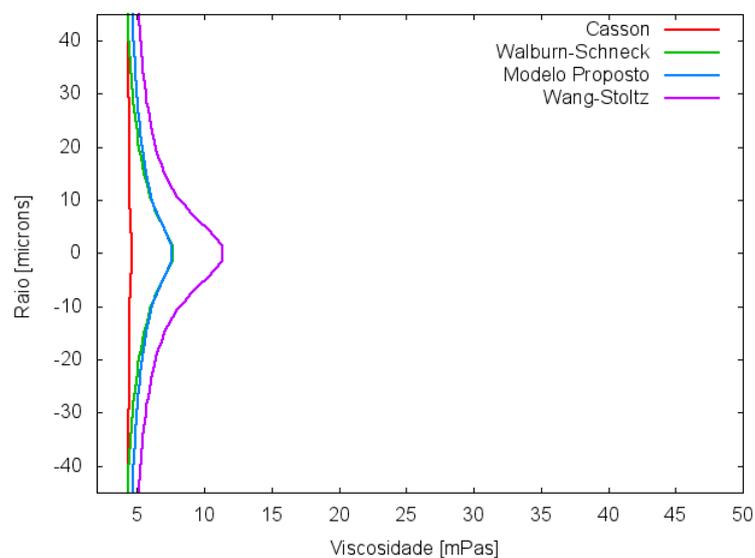


Figura 40 – Perfis de viscosidade para $H_d = 45\%$ e $d = 90\mu m$ dos modelos de Casson, Walburn-Schneck, Wang-Stoltz e o Modelo Proposto.

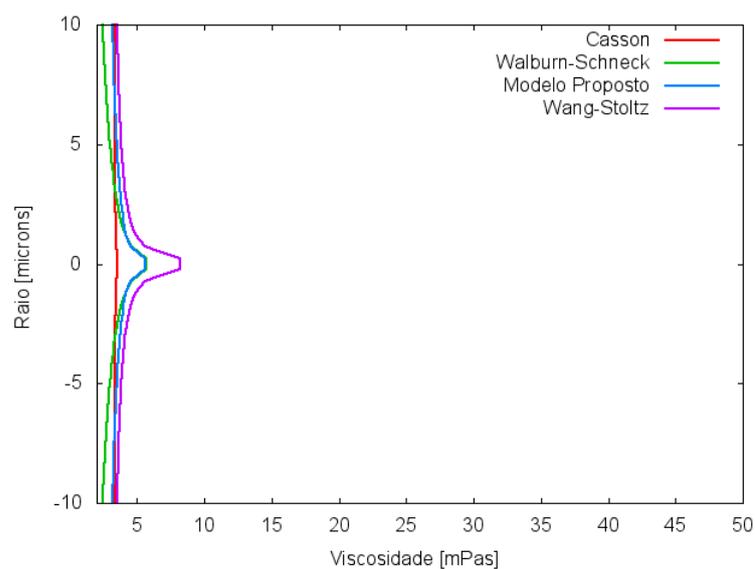


Figura 41 – Perfis de viscosidade para $H_d = 45\%$ e $d = 20\mu m$ dos modelos de Casson, Walburn-Schneck, Wang-Stoltz e o Modelo Proposto.

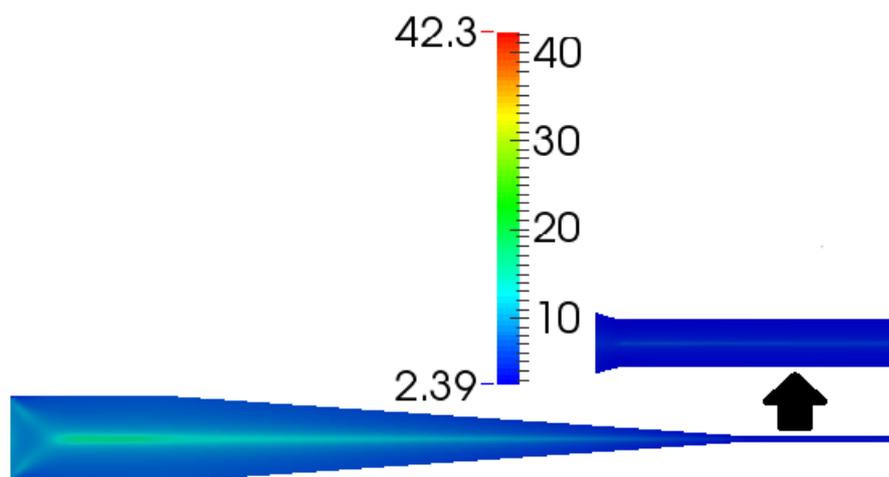


Figura 42 – Viscosidade aparente do modelo de Casson para $H_d = 45\%$.

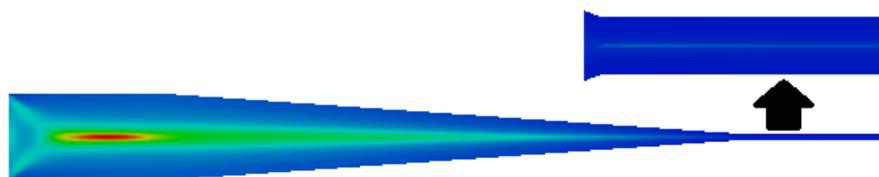


Figura 43 – Viscosidade aparente do modelo de Walburn-Schneck para $H_d = 45\%$.

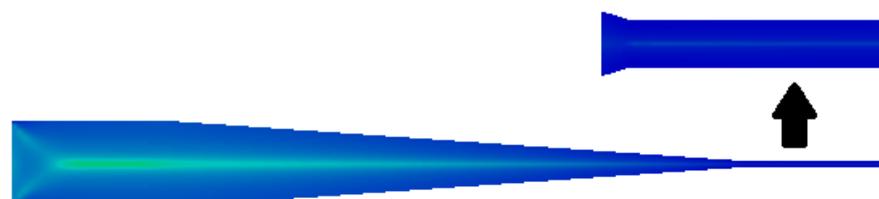


Figura 44 – Viscosidade aparente do modelo de Wang-Stoltz para $H_d = 45\%$.

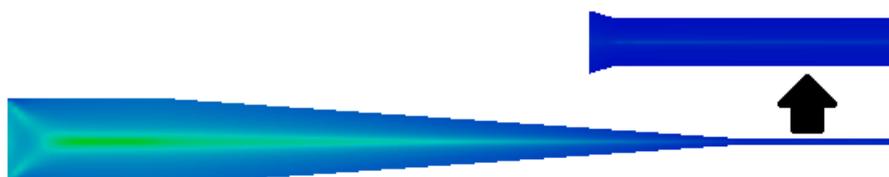


Figura 45 – Viscosidade aparente do Modelo Proposto para $H_d = 45\%$.

6.2 Velocidade

A partir dos valores da velocidade, obtidos da solução numérica, foram traçados perfis de velocidades do Modelo Proposto para valores distintos do diâmetro vascular e de hematócrito de referências, onde estão expostos nas Figuras 46 a 51.

Observando os perfis de velocidade nas Figuras 46 a 50 é possível concluir que, para qualquer valor fixado do diâmetro, quanto maior for o valor do hematócrito menor será o valor da velocidade nas regiões próximas ao centro do tubo. Essa redução da velocidade está associada com a relação crescente entre o hematócrito e a viscosidade (ver Figuras 31 a 35). Ou seja, quanto maior a viscosidade menor será a velocidade.

Comparando os perfis de velocidade para diferentes H_d , pode-se observar que, diferentemente no centro do tubo, os valores da velocidade próximos à parede tubular são constantes. Esse fato confirma a existência da região de plasma, pois os valores da velocidade próximos à parede do tubo não sofrem influência do hematócrito.

Fixando o hematócrito e fazendo variar o diâmetro do vaso, como na Figura 51, observa-se um aumento na velocidade com a diminuição do diâmetro. Esse fato está relacionado com a redução da viscosidade aparente em função da diminuição do diâmetro (efeito *Fahraeus-Lindquist*), como ilustrados nos gráficos da Figura 36.

Para efeitos de comparação, as Figuras 52 a 56 exibem os perfis de velocidade do Modelo Proposto juntamente com os modelos de Casson, Walburn-Schneck e Wang-Stoltz. Pode-se observar que para os diâmetros de $300\mu m$ (Figura 52) e $286\mu m$ (Figura 53), o perfil de velocidade do Modelo Proposto encontra-se entre os perfis de velocidade de Walburn-Schneck e Wang-Stoltz. Já para os diâmetros de 230, 90 e $20\mu m$ (Figuras 54, 55 e 56) o perfis de velocidade do Modelo Proposto encontra-se entre os perfis dos modelos de Casson e Wang-Stoltz, sendo que no diâmetro de $20\mu m$ o perfil do Modelo Proposto está bem mais próximo do perfil de velocidade do modelo de Casson. Esse comportamento do Modelo Proposto confirma o objetivo que lhe foi descrito na Seção 3.3, ou seja, esperava-se que para valores do diâmetro na mesocirculação o Modelo Proposto se aproximasse do comportamento pseudoplástico (modelos Walburn-Schneck e Wang-Stoltz) e na microcirculação do comportamento viscoplástico (modelo de Casson).

Nas Figuras 57 a 60 são vistas a distribuição da norma do campo de velocidade em todo o domínio do Modelo Proposto e dos modelos de Casson, Walburn-Schneck e Wang-Stoltz.

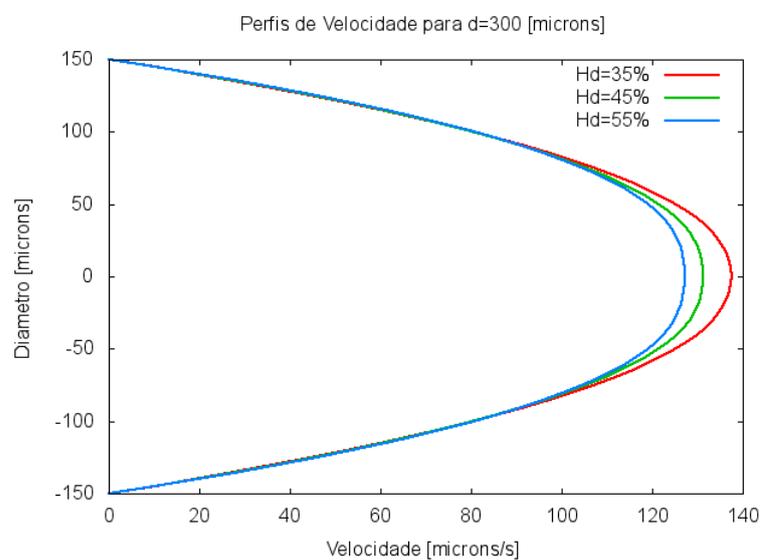


Figura 46 – Perfis de velocidade para $d = 300\mu m$ e hematócritos $H_d = 35\%$, 45% e 55% .

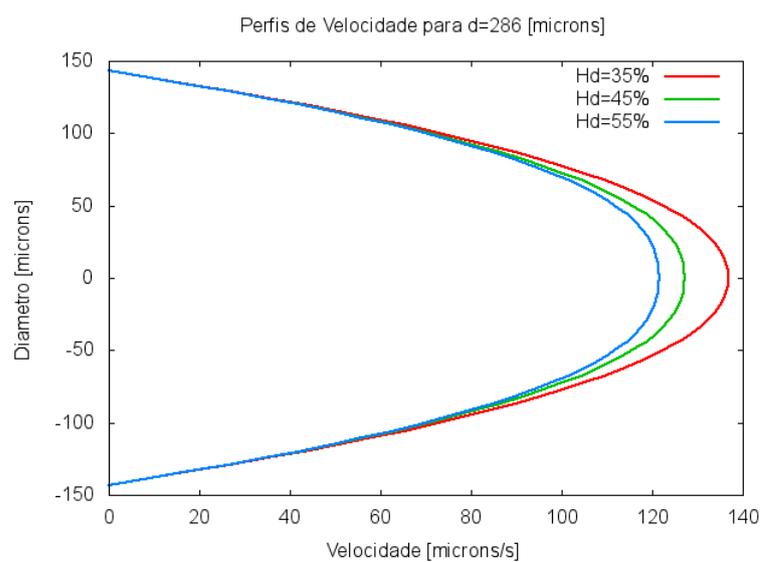


Figura 47 – Perfis de velocidade para $d = 286\mu m$ e hematócritos $H_d = 35\%$, 45% e 55% .

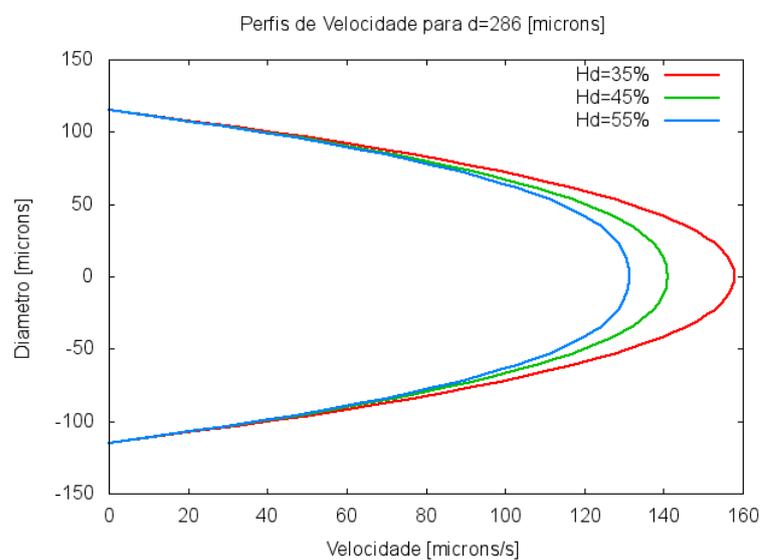


Figura 48 – Perfis de velocidade para $d = 230\mu m$ e hematócritos $H_d = 35\%$, 45% e 65% .

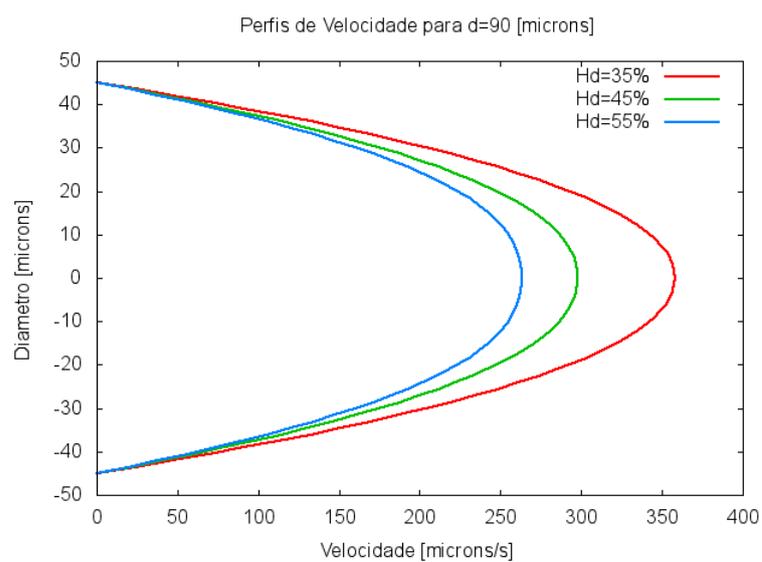


Figura 49 – Perfis de velocidade para $d = 90\mu$ e hematócritos $H_d = 35\%$, 45% e 65% .

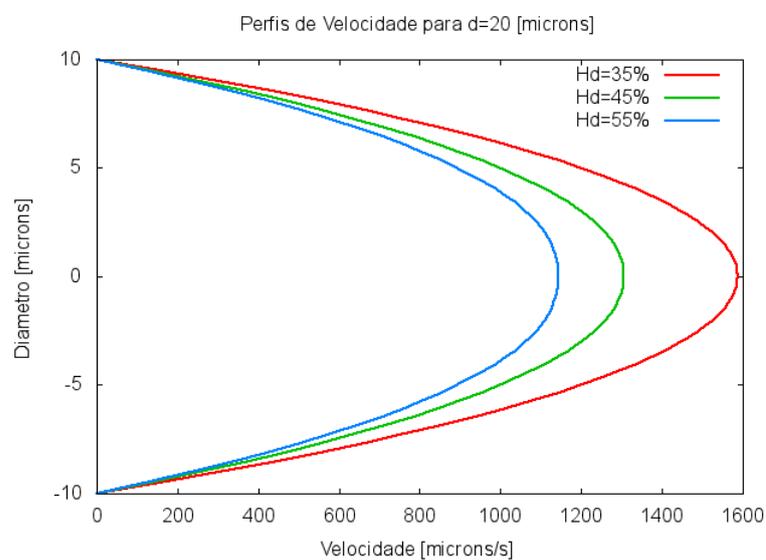


Figura 50 – Perfis de velocidade para $d = 20\mu m$ e hematócritos $H_d = 35\%$, 45% e 65% .

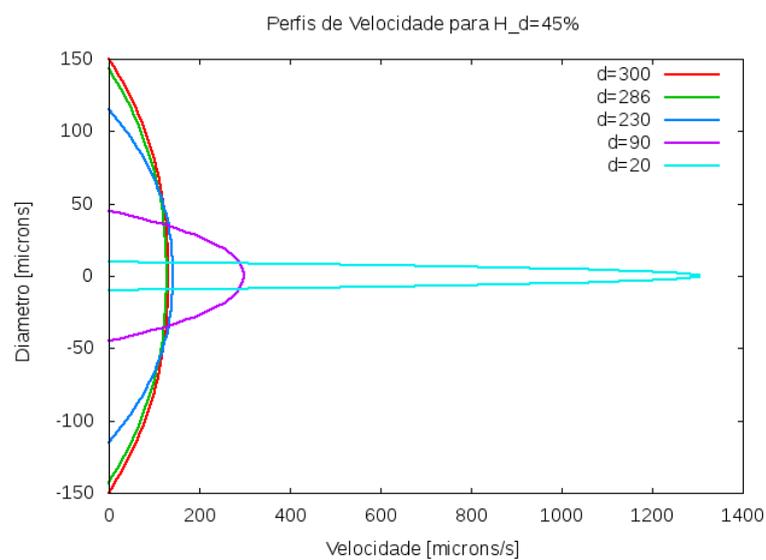


Figura 51 – Perfis de velocidade para $H_d = 45\%$ para $d = 20, 90, 230, 286$ e 300 .

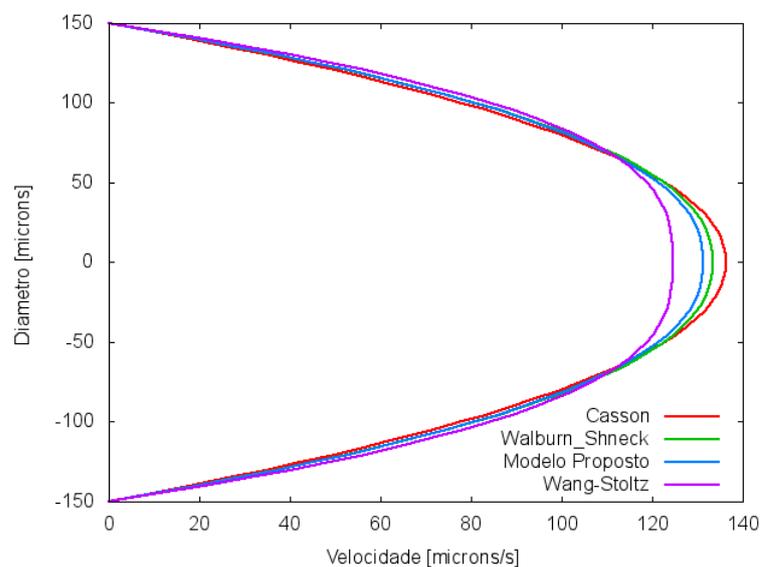


Figura 52 – Perfis de velocidade para $H_d = 45\%$ e $d = 300\mu m$ dos modelos de Casson, de Walburn-Schneck, de Wang-Stoltz e do Modelo Proposto.

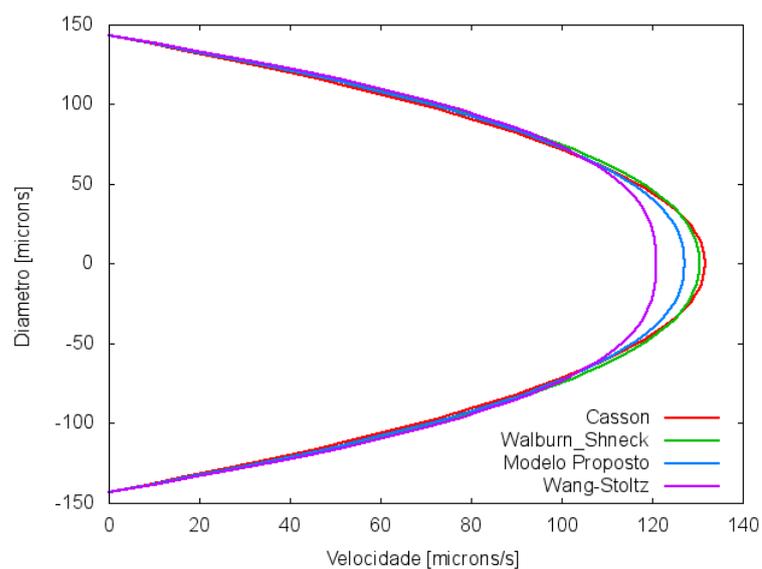


Figura 53 – Perfis de velocidade para $H_d = 45\%$ e $d = 286\mu m$ dos modelos de Casson, de Walburn-Schneck, de Wang-Stoltz e do Modelo Proposto.

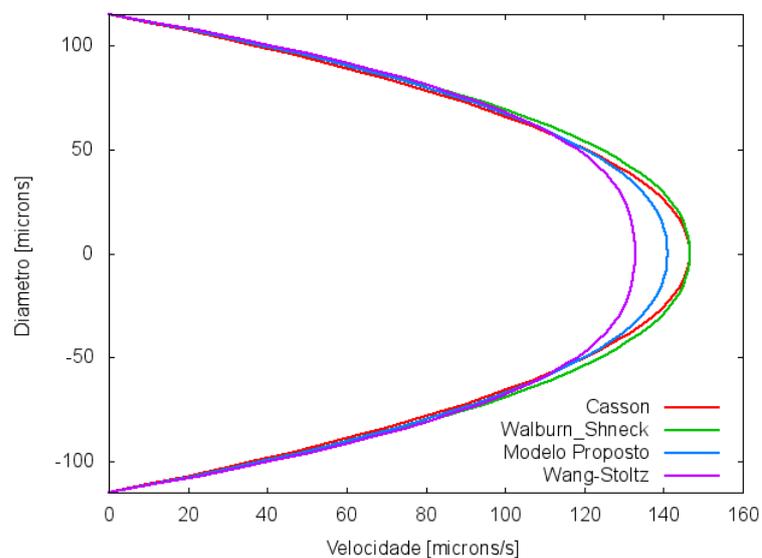


Figura 54 – Perfis de velocidade para $H_d = 45\%$ e $d = 230\mu m$ dos modelos de Casson, de Walburn-Schneck, de Wang-Stoltz e do Modelo Proposto.

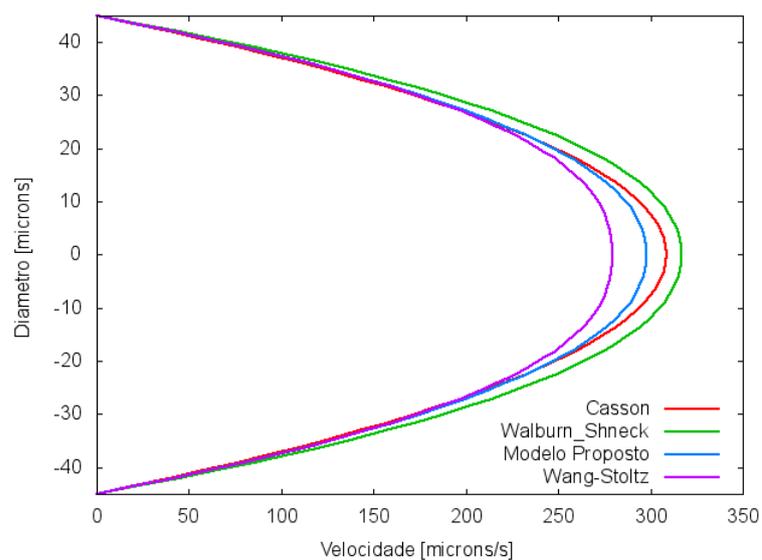


Figura 55 – Perfis de velocidade para $H_d = 45\%$ e $d = 90\mu m$ dos modelos de Casson, de Walburn-Schneck, de Wang-Stoltz e do Modelo Proposto.

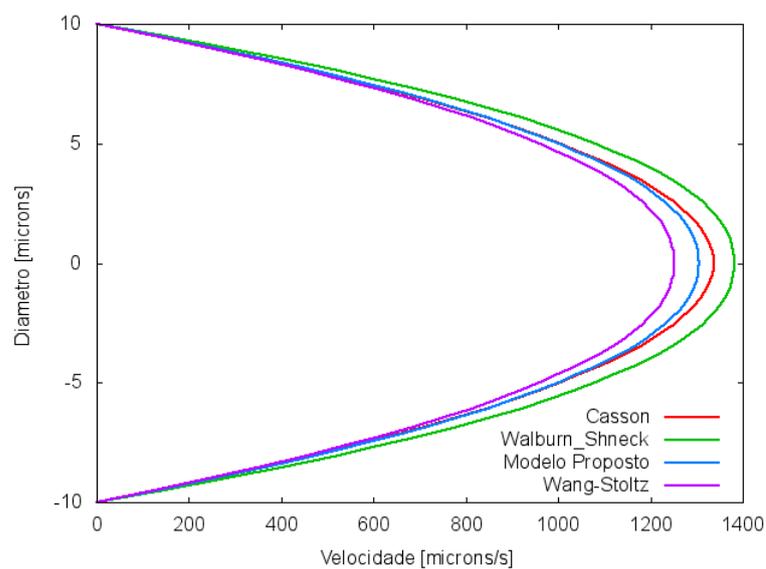


Figura 56 – Perfis de velocidade para $H_d = 45\%$ e $d = 20\mu m$ dos modelos de Casson, de Walburn-Schneck, de Wang-Stoltz e do Modelo Proposto.

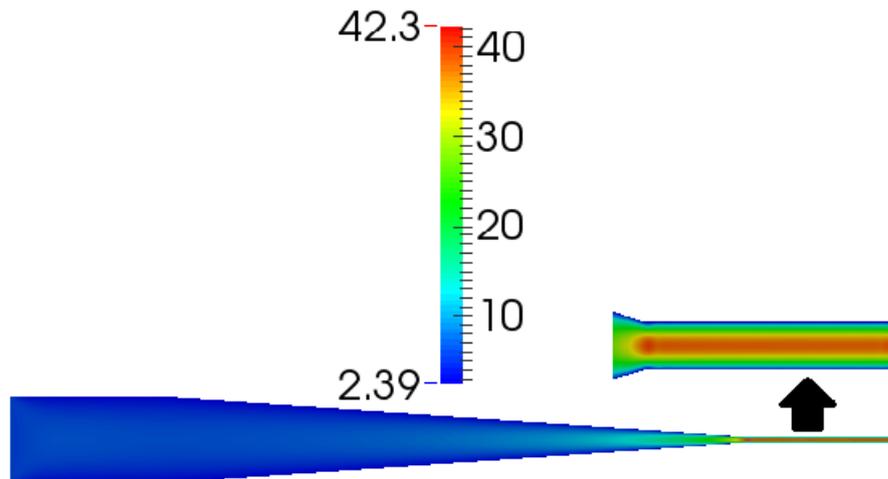


Figura 57 – Norma do campo de velocidade do modelo de Casson para $H_d = 45\%$.

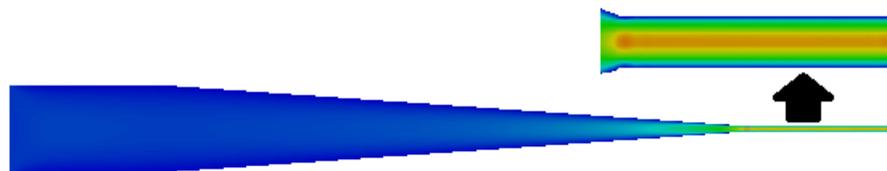


Figura 58 – Norma do campo de velocidade do modelo de Walburn-Schneck para $H_d = 45\%$.



Figura 59 – Norma do campo de velocidade do modelo de Wang-Stoltz para $H_d = 45\%$.

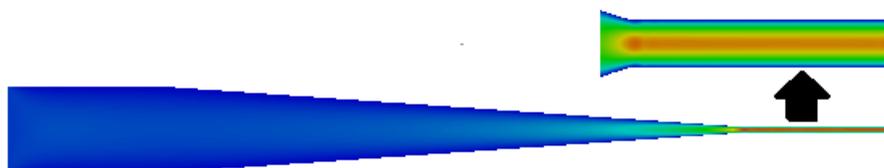


Figura 60 – Norma do campo de velocidade do Modelo Proposto para $H_d = 45\%$.

6.3 Pressão

Na Figura 61 estão descritos os gráficos da pressão do escoamento sanguíneo ao longo do centro do tubo para hematócritos $H_d = 35\%$, 45% e 55% . Pode-se observar

que de $x = 0$ a, aproximadamente, $x = 2500\mu m$ a variação da pressão é pequena. Porém para valores maiores do que $x = 2500\mu m$ há uma queda considerável de pressão. Isso é devido ao aumento da resistência ao fluxo por conta da redução do diâmetro vascular na microcirculação ($d = 20\mu m$).

A relação crescente entre a pressão e o hematócrito, vista na Figura 61, é devido ao aumento da viscosidade relacionado com o aumento do hematócrito. Assim, quanto maior a viscosidade maior será a pressão.

Na Figura 62 temos os gráficos da pressão, ao longo do centro do tubo, do Modelo Proposto e dos modelos de Casson, Walburn-Schneck e Wang-Stoltz. Pode-se observar que o gráfico da pressão do Modelo Proposto aproxima-se melhor dos valores do modelo de Casson. O menor gradiente de pressão é visto no modelo de Walburn-Schneck, ao passo que no modelo de Wang-Stoltz o gradiente de pressão é o maior.

A distribuição da pressão ao longo do domínio considerando o Modelo Proposto e os modelos de Casson, Walburn-Schneck e Wang-Stoltz podem ser vistas, respectivamente, nas Figuras 66, 63, 64 e 65.

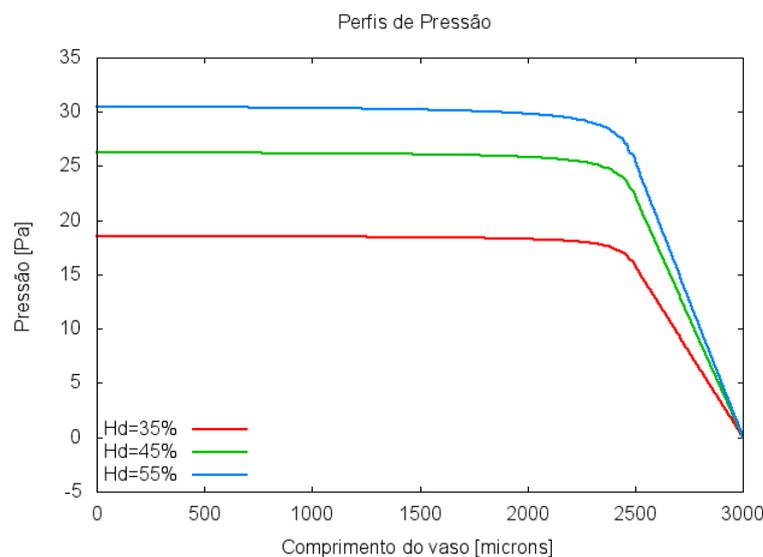


Figura 61 – Gráficos da pressão ao longo do centro do tubo para valores do hematócrito $H_d = 35\%$, 45% e 55% .

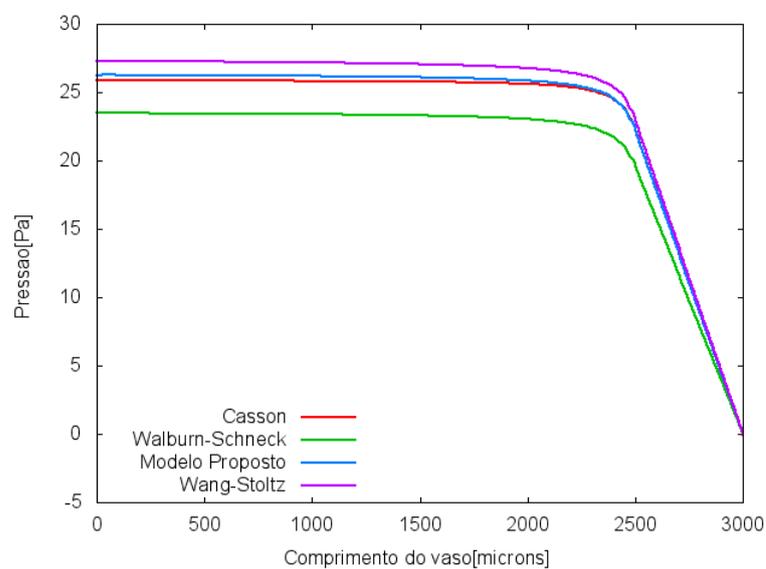


Figura 62 – Gráficos da pressão ao longo do centro do tubo para $H_d = 45\%$ do Modelo Proposto e dos modelos de Casson, de Walburn-Schneck e de Wang-Stoltz.

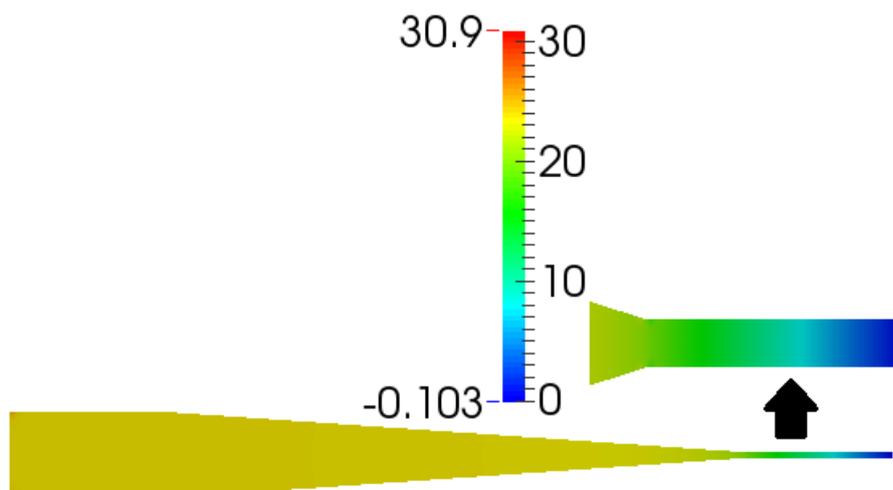


Figura 63 – Distribuição da pressão do modelo de Casson para $H_d = 45\%$.



Figura 64 – Distribuição da pressão do modelo de Walburn-Schneck para $H_d = 45\%$.



Figura 65 – Distribuição da pressão do modelo de Wang-Stoltz para $H_d = 45\%$.



Figura 66 – Distribuição da pressão do Modelo Proposto para $H_d = 45\%$.

7 CONCLUSÕES

Nesta pesquisa foi proposta uma equação constitutiva para o sangue humano com base nas características pseudoplásticas e viscoplásticas controladas pelo diâmetro vascular entre 20 e 300 μm . O modelo proposto foi comparado com modelos existentes na literatura como: Casson (FUNG, 1993), Walburn-Schneck (WALBURN; SCHNECK, 1976) e Wang-Stoltz (WANG; STOLTZ, 1994b).

O modelo proposto é uma modificação do modelo de Wang-Stoltz adicionado a uma tensão limite. Para ajustar os comportamentos pseudoplástico e o viscoplástico foram utilizados dois parâmetros A e B , sendo A o parâmetro da tensão limite e B do modelo de Sisko.

O parâmetro A está em função do diâmetro, sendo seu valor máximo 1.0, assumido para o diâmetro do vaso igual a 20 μm , e seu menor valor é zero em 300 μm . Portanto, a viscoplasticidade é evidenciada na microcirculação. Em contrapartida, a função B é crescente em relação ao diâmetro vascular, assim caracterizando a pseudoplasticidade na mesocirculação.

O Problema de Stokes Generalizado para um fluido incompressível, com a viscosidade descrita pelo Modelo Proposto, foi resolvido numericamente utilizando a formulação de Elementos Finitos do tipo Petrov-Galerkin (BORTOLOTTI, 2006) que garante convergência e estabilidade para as soluções considerando uma mesma ordem de interpolação para a velocidade e para a pressão, sendo a pressão descontínua.

Os resultados gerados mostraram uma concordância do Modelo Proposto com as características existentes no escoamento sanguíneo retratadas na literatura. Quando comparado com outros modelos pseudoplásticos e com um viscoplástico, o Modelo Proposto assume valores entre os modelos pseudoplásticos, de Wang-Stoltz e de Walburn-Schneck, na região da mesocirculação e para o diâmetro de 20 μm (microcirculação) assume valores bem próximos ao modelo de Casson.

Dentre as dificuldades que surgiram no desenvolvimento deste trabalho destacamos a falta de dados experimentais da viscosidade sanguínea para a faixa de diâmetro trabalhada, pois na maioria dos trabalhos disponíveis na literatura, os dados são do escoamento sanguíneo de vasos de grande calibre.

Algumas perspectivas futuras são traçadas para este trabalho, como é o caso da inserção no Modelo Proposto de efeitos viscoelásticos evidenciados na região de diâmetro microcirculatório, isso é devido a propriedade elástica existente nos eritrócitos no interior do vaso de pequeno calibre. Paralelo ao efeito viscoelástico surge a necessidade da existência do termo temporal no modelo. Pretende-se também, testar o

Modelo Proposto em vasos com diferentes formatos e ramificações e com a presença de estenoses.

Referências

- ADAMS, R. A. **Sobolev Spaces**. London: Academic Press, 1975.
- ALLOUCHE M. AND FRIGAARD, I. Static wall layers in the displacement of two visco-plastic fluids in a plane channel. **J Fluid Mech**, n. 424, p. 243–277, 2000.
- ATKINSON, K. E. **An Introduction to Numerical Analysis Second Edition**. 2. ed. Canada: John Wiley e Sons, Inc, 1978.
- BAGCHI, P. Mesoscale simulation of blood flow in small vessels. **J. Biophysical**, v. 92, n. 3, p. 1858–1877, 2007.
- BARBEE, J. H.; COKELET, G. R. The fahraeus effect. **Microvascular Research**, n. 3, p. 6–16, 1971.
- BARNES, H.; HUTTON, J.; F., K. W. **An Introduction to Rheology**. Amsterdam: Elsevier, 1993.
- BERCOVIER, M.; ENGLEMAN, M. A finite-element method for incompressible non-newtonian flows. **J. Comp. Phys**, p. 313–326, 1980.
- BIRD, R. B.; STEWART, W. E.; LIGHTFOOT, E. N. **Transport Phenomena**. New York Chichester Weinhein Brisbane Singapore Toronto: John Wiley E Sons, 1924.
- BORTOLOTI, M. A. A.; KARAM-F., J. **An Analisis of The Plasma Layer Thickness for two Power-Law Models**. Curitiba,PR: [s.n.], 2015. 117–120 p.
- BORTOLOTI, M. A. de A. **Uma Formulação de Elementos Finitos para Problemas de Escoamento Pseudoplástico**. Tese (Doutorado) — Laboratório Nacional de Computação Científica, Rio de Janeiro, Dezembro 2006.
- BORTOLOTI, M. A. de A.; KARAM-F., J. A stabilized finite element method to pseudo-plastic flow governed by the sisko relation. **Computational and Applied Mathematics**, v. 31, n. 1, p. 19–35, 2012.
- BREZZI, F. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers. **Revue Française d'Automatique informatique et Recherche Opèrationnelle, Ser. Rouge Anal. Numér.**, v. 8, n. R-2, p. 129–151, 1974.
- BRUST, M.; AOUANE, O.; THIÉBAUD, M.; D.FLOMANN; VERDIER, C.; KAESTNER, L.; LASCHKE, M. W.; SELMI, H.; BENYOUSSEF, A.; PODGORSKI, T.; COUPIER, G.; MISBAH, C.; WAGNER, C. The plasma protein fibrinogen stabilizes clusters of red bloodcells im microcapillary flows. **Nature Scientific Reports**, v. 4, n. 4348, p. 1–6, 2014.
- CHATURANI, P.; BISWAS, D. A comparative study of poiseuille flow of a polar fluid under various boundary conditions with applications to blood flow. **Rheol. Acta**, v. 23, n. 4, p. 435–445, 1984.
- CHHABRA, R. P.; RICHARDSON, J. F. **Non-Newtonian Flow in the Process Industries: Fundamentals and Engineering Aplications**. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1999.

- CHO, Y. I.; KENSEY, K. R. Effects of the non-newtonian viscosity of blood on flows in a diseased arterial vessel. part 1: steady flows. **Biorheology**, n. 28, p. 241–262, 1991.
- COKELET, G. R.; BROOKS, D. E.; SKALAK, R.; GLIETTA, M. I. Blood rheology interpreted through the flow properties of the red cell. Springer, New York, v. 1, p. 9–76, 1976.
- FAHRAEUS, R.; LINDQVIST, T. The viscosity of the blood in narrow capillary tubes. **Am J. Physiol**, n. 96, p. 562–568, 1931.
- FARIA, C. O.; BORTOLOTTI, M. A. A.; KARAM, J. F. **Comparative Study between Bingham Model and Regularized Models**. Campinas, SP: [s.n.], 2006.
- FRIGAARD I.A. AND NOUAR, C. On the of viscosity regularisation methods for viscoplastic fluid flow computation. **Non-Newtonian Fluid Mechanical**, n. 127, p. 1–26, 2005.
- FUNG, Y. C. **Biomechanics: Mechanical Properties of Living Tissues**. 2. ed. New York: Springer, 1993.
- GALDI, G. P.; RANNACHER, R.; ROBERTSON, A. M.; TUREK, S. **Hemodynamical Flows: Modeling, Analysis and Simulation**. [S.l.]: Birkhauser Boston, 2000.
- GELFAND, I. M.; FOMIN, S. V. **Calculus of Variations**. London: Prentice-Hall, 1963.
- GIJSEN, F.; VOSSE, F. van de; JANSSEN, J. The influence of the non-newtonian properties of blood on the flow in large arteries: steady flow in a carotid bifurcation model. **Journal of Biomechanics**, n. 32, p. 601–608, 1999.
- HOW, T. V. **Advances in Hemodynamics and Hemorheology**. 1. ed. London: Jai Press inc, 1996.
- HUGHES, T. J. R. **The Finite Element Method**. New York: Dover, 2000.
- JOHNSON, C. **Numerical Solutions of Partial Differential Equations by the Finite Element Method**. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.
- JOHNSTON, B. M.; JOHNSTON, P. R.; CORNEY, S.; KILPATRICK, D. Non-newtonian blood flow in human right coronary arteries: Steady state simulations. **Journal of Biomechanics**, n. 35, p. 709–720, 2003.
- JOHNSTON, B. M.; JOHNSTON, P. R.; CORNEY, S.; KILPATRICK, D. Non-newtonian blood flow in human right coronary arteries: Transient simulations. 2003.
- KARAM-F, J. **Uma Nova Formulação de Elementos Finitos Mistos para Escoamentos Incompressíveis**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1989.
- KARAM-F, J.; BORTOLOTTI, M. A. A. Blood rheology and some non-viscometric computational experiments. e-papers Editora, Rio de Janeiro, v. 1, p. 157–177, 2006.
- LUO, X. Y.; KUANG, Z. B. A study on the constitutive equation of blood. **Biomechanics**, n. 8, p. 929–934, 1992.

- MACOSKO, C. W. **Rheology: Principles, Measurements and Applications**. [S.l.]: Wiley VCH, 1994.
- MARQUES, S. P. C.; CREUS, G. J. **Computational Viscoelasticity**. New York: Springer, 2012.
- PAPANASTASIOU, T. C. Flows of materials with yield. **J. Rheol.**, n. 31, p. 385–404, 1987.
- PICART, C.; PIAU, J. M.; GALLIARD, H. Human blood shear yield stress and its hematocrit dependence. **Journal of Rheology**, p. 1–12, 1998.
- PRIES, A. R.; SECOMB, T. W. Microvascular blood viscosity in vivo and the endothelial surface layer. **Am J Physiol**, n. 289, p. H2657–H2664, 2005.
- PRIES, A. R.; SECOMB, T. W.; GAEHTGENS, P.; GROSS, J. Blood flow in microvascular network. experiments and simulation. **Circulation Research**, n. 67, p. 826–834, 1990.
- QUARTERONI, A.; FORMAGGIA, L. **Mathematical Modelling and Numerical Simulation of the Cardiovascular System**. [S.l.]: Elsevier, 2002.
- SCHEURER, B. Existence et approximation de points selles pour certains problèmes non linéaires. **Revue Française d'Automatique informatique et Recherche Opérationnelle-Analyse Numérique**, v. 11, p. 369–400, 1977.
- SHARAN, M.; POPEL, A. S. A two-phase model for flow of blood in narrow tubes with increased effective viscosity near the wall. **Biophysical**, n. 38, p. 415–428, 2001.
- SKELLAND, A. **Non-newtonian flow and heat transfer**. New York London Sydney: John Wiley E Sons, Imc., 1967.
- TU, C.; DEVILLE, M. Pulsatile flow of non-newtonian fluids through arterial stenoses. **Biomechanics**, v. 29, n. 7, p. 899–908, 1995.
- VENNEMANN, P.; LINDKEN, R.; WESTERWEEL, J. In vivo whole-field blood velocity measurement techniques. **Springer-Verlag**, v. 42, p. 495–511, 2007.
- WALBURN, F. J.; SCHNECK, D. J. A constitutive equation for whole human blood. **Biorheology**, v. 13, p. 201–210, 1976.
- WANG, X.; STOLTZ, J. F. Characterization of pathological bloods with a new rheological relationship. **Clinical Hemorheology**, v. 14, n. 2, p. 237–244, 1994.
- WANG, X.; STOLTZ, J. F. Influence of non-newtonian properties of blood on the global transport of red blood cells. **Clinical Hemorheology**, v. 14, n. 6, p. 789–796, 1994.
- YAWATA, Y. **Cell Membrane: The Red Blood Cell as a Model**. Japão: Wiley-Vch Verlag Gmb H Co. KGaA, 2003.
- ZYDNEY, A. L.; Oliver III, J. D. A constitutive equation for the viscosity of stored red cell suspensions: Effect of hematocrit, shear rate, and suspending phase. **J. Rheol**, v. 35, n. 8, p. 1639–1680, 1991.