

### UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ PRO-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA

MARCELO DOS SANTOS

ANÁLISE DE ERROS NA SOLUÇÃO NUMÉRICA DO MODELO COMPUTACIONAL DE DIFUSÃO DE CONHECIMENTO

> ILHÉUS-BA 2015

### MARCELO DOS SANTOS

### ANÁLISE DE ERROS NA SOLUÇÃO NUMÉRICA DO MODELO COMPUTACIONAL DE DIFUSÃO DE CONHECIMENTO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Estadual de Santa Cruz, como parte dos requisitos necessários à obtenção de Título de Mestre em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia.

Linha de pesquisa: Modelagem Matemática e Computacional Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Flávio Pietrobon Costa

Ilhéus-BA 2015

Inclui referências e apêndices. 1. Conhecimento científico – Modelos matemáticos. 2. Si- mulação (computadores). 3. Computação científica. I. Costa, Flávio Pietrobon. II. Título. CDD – 004.0151	S237	Santos, Marcelo dos. Análise de erros na solução numérica do modelo computa- cional de difusão de conhecimento / Marcelo dos Santos Ilhéus : UESC, 2015. 87f. : il. Orientador : Flávio Pietrobon Costa. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Programa de Pós-graduação em Modelagem Computa- cional em Ciência e Tecnologia.
<ol> <li>Conhecimento científico – Modelos matemáticos. 2. Si- mulação (computadores). 3. Computação científica. I. Costa, Flávio Pietrobon. II. Título.</li> <li>CDD – 004.0151</li> </ol>	•	Inclui referências e apêndices.
CDD – 004.0151		<ol> <li>Conhecimento científico – Modelos matemáticos. 2. Si- mulação (computadores). 3. Computação científica. I. Costa, Flávio Pietrobon. II. Título.</li> </ol>
		CDD – 004.0151

### MARCELO DOS SANTOS

## ANÁLISE DE ERROS NA SOLUÇÃO NUMÉRICA DO MODELO COMPUTACIONAL DE DIFUSÃO DE CONHECIMENTO

Ilhéus-BA, 16/06/2015

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Flávio Pietrobon Costa UESC (Orientador)

Prof. Dr. Francisco Bruno Souza Oliveira UESC

Prof. Dr. Jairo Rocha de Faria UFPB

Aos meus pais José Augusto e Doralice, aos meus irmãos João José e Rogério Augusto e ao meu filho João Henrique.

### AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, que é caminho, verdade e vida, por ter mantido esta chama acesa na direção desejada, mesmo quando ventos desfavoráveis tentaram apagá-la e me dando a coragem necessária para enfrentar os momentos difíceis.

A minha amada família: minha mãe Doralice dos Santos, meu pai José Augusto dos Santos, meus irmãos João José e Rogério Augusto por sempre acreditarem em mim e pela força ao longo de todos estes anos de minha formação.

Ao meu filho João Henrique.

A minha esposa Gilayane Ferreira Santos, que em todos os momentos de dificuldade me deu muito amor, carinho e tranquilidade.

Ao professor Flávio Pitrobon Costa, meu orientador, pelas conversas matemáticas, incentivos, ensinamentos, amizade, escolha do tema e toda sua dedicação que, em todo tempo, demonstrou acreditar em minha capacidade.

Aos meus colegas de turma: Anderson Souza, Cássio Almeida, Elinaldo Santos, Everton Costa, Gislan Silveira, Gustavo Monné, Jorge Fabrício, Manoel Alves, Silvana Amorim e Valdex Santos pelas conversas, críticas construtivas e amizade.

Ao professor Jorge Henrique Sales pelo incentivo que me deu para estudar mais e por ser um professor esclarecedor dos meus questionamentos.

Aos professores do programa PPGMC que contribuíram de forma significativa na minha formação.

Aos meus amigos e alunos do IFBA-Campus Eunápolis pelas várias conversas.

A agência de fomento Capes pelo apoio financeiro.

Na tentativa de não omitir nenhum nome: a todos amigos do Salobrinho, dos colégios: CEAMEV, Professora Horizontina Conceição, Paulo Américo de Oliveira, Estadual do Basílio, SENAI e da UESC, pelo apoio, compreensão e carinho, pelas piadas e pela força durante minha caminhada até aqui.

O que é bonito? É o que persegue o infinito; Mas eu não sou Eu não sou, não... Eu gosto é do inacabado, O imperfeito, o estragado, o que dançou. O que dançou... Eu quero mais erosão Menos granito. Namorar o zero e o não, Escrever tudo o que desprezo E desprezar tudo o que acredito. Eu não quero a gravação, não, Eu quero o grito. Que a gente vai, a gente vai E fica a obra, Mas eu persigo o que falta Não o que sobra. Eu quero tudo que dá e passa. Quero tudo que se despede, Se despede, e despedaça. O que é bonito... (Lenine e Bráulio Tavares)

"vida é um algo multidimensional cuja imprevisível curvatura temporal só é conhecida quando se experimenta os fatos a cada dia e, mesmo assim, não se consegue prever com exatidão a curvatura temporal dos fatos seguintes, mesmo que se expanda esta (a curvatura futura) numa vizinhança em torno do fato no instante presente"(Lucas M. Alves)

### **RESUMO**

A difusão é um processo comum na natureza, que ocorre quando um determinado sistema tende ao seu estado de equilíbrio, em um meio com dispersão não-convectiva, de uma concentração de massa, energia, ou outra quantidade inicialmente concentrada em parte do domínio físico deste sistema. É possível simular o processo de difusão, e em particular o processo de propagação do conhecimento em um meio científico, por meio de generalizações da equação de difusão. A presente proposta considera, para esta equação, um modelo matemático transiente, unidimensional no espaço, não convectivo, com geração de conhecimento, para estudar o fenômeno considerando termos de difusão de 2ª e 4ª ordens. Empregando técnicas e métodos numéricos, é efetuado um tratamento variacional para a construção do modelo computacional, sendo desenvolvida uma formulação discreta em diferenças finitas, para solução numérica computacional do problema. Sobre este modelo são construídas exemplos (aplicações), e efetuada análise de convergência da solução, viabilizando a análise dos erros da solução, tendo como base, a verificação de erros gerados através do truncamento da expansão na série de Taylor, de convergência da solução numérica, análise aplicada a equação de difusão para propagação do conhecimento. Nesse sentido, buscamos uma solução numérica com análise de erros, por meio de uma discretização em diferenças finitas, que reduz o problema contínuo em um problema discreto com um número finito de variáveis, podendo ser resolvido computacionalmente, para equação diferencial de Difusão com acréscimo de novos termos gerando o modelo de difusão de conhecimento de 4ª ordem.

Palavras-chave: Erros numéricos. Diferenças Finitas. Propagação de conhecimento.

### ABSTRACT

Diffusion is a process common in nature, which occurs when a given system tends to its state of equilibrium in a medium with non-convective dispersion, a concentration of mass, energy, or other quantity initially concentrated on part of the physical domain of the system. It is possible to simulate the diffusion process, particularly the process of knowledge propagation in a scientific way by means of diffusion equation generalizations. This proposal considers, for this equation, a transient mathematical model, one-dimensional space, not convective, generating knowledge, to study the phenomenon considering the diffusion of 2nd and 4th orders. Employing techniques and numerical methods, variational one treatment is carried out to build the computer model, being developed a discrete finite difference formulation for computing numerical solution of the problem. About this model examples are built (applications), and performed analysis of the solution convergence, enabling the analysis of errors solution, based on the verification of errors generated by truncation of the expansion in Taylor series, convergence of numerical solution, analysis applied to diffusion equation for propagation of knowledge. In that sense, we seek a numerical solution with error analysis, by means of a discretization in finite differences, which reduces ongoing problem in a discrete problem with a finite number of variables, which can be solved computationally for Broadcast differential equation with an increase of new terms generating the model of diffusion of knowledge 4th order.

Keywords: Numerical errors. Finite Difference. Spread of knowledge.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Condução do calor numa barra de metal	9
Figura 2.2 – Fluxograma do processo de modelagem matemática	12
Figura 2.3 – Teorema do Valor Médio de Lagrange	15
Figura 2.4 – Malha de discretização da barra	19
Figura 2.5 – Placa retangular mantida temperatura nas extremidades $0^{\circ}$ C	21
Figura 2.6 – Distribuição de temperatura em uma placa para um passo h=0.25	23
Figura 2.7 – Distribuição de temperatura em uma placa para um passo h=0.5	24
Figura 2.8 – Variação da temperatura em função da posição para h=0,25	24
Figura 2.9 – Variação da temperatura em função da posição para h=0,5	25
Figura 3.1 – Comunicação das Células de Conhecimento	27
Figura 3.2 – Região retangular de pontos no plano xt	29
Figura 5.1 – Alta geração com relação a permeabilidade cognitiva.	49
Figura 5.2 – Taxa de geração de novos conhecimentos nula.	50
Figura 5.3 – Alta permeabilidade cognitiva e alta geração.	51
Figura 5.4 – Alta permeabilidade, impedância cognitiva unitária e geração nula.	51
Figura 5.5 – Baixa impedância cognitiva.	54
Figura 5.6 – Alta impedância cognitiva.	54
Figura 5.7 – Alta densidade de conhecimento inicial.	56
Figura 5.8 – Alta densidade de conhecimento inicial com alta geração de novos conheci-	
mentos.	57
Figura 5.9 – $c_p = 1, r = 100, K_1 = 100.$	58
Figura 5.10– $c_p = 1, r = 10, K_1 = 10.$	58
Figura 5.11– $c_p = 35, r = 10, K_1 = 10$	59
Figura 5.12– $c_p = 45, r = 10, K_1 = 10$	59
Figura 5.13– $c_p = 75, r = 0, 5, K_1 = 10$	60
Figura 5.14– $c_p = 100, r = 0, 5, K_1 = 0, 5$	60
Figura 5.15–Baixa permeabilidade e baixa retenção cognitiva com alta geração.	61
Figura 5.16–Retenção cognitiva mil vezes maior que a permeabilidade cognitiva.	62
Figura 5.17–Retenção cognitiva igual a taxa de geral e mil vezes menor que a permeabilidade.	62
Figura 5.18– $(d_1)$	63
Figura 5.19–Baixa permeabilidade e geração nula.	65
Figura 5.20–Permeabilidade igual a retenção cognitiva e geração nula.	66
Figura 5.21–Alta permeabilidade, alta retenção, alta geração e impedância unitária.	67
Figura 5.22–Alta permeabilidade, alta retenção, taxa de geração nula e impedância unitária.	67
Figura 5.23–Permeabilidade e retenção cognitiva iguais com geração nula.	69
Figura 5.24–Permeabilidade e retenção cognitiva iguais ao parâmetro de geração	69

Figura 5.25–Caso geral com alta permeabilidade, baixa retenção cognitiva e baixa geração	
de novos conhecimentos	71
Figura 5.26–Caso simples com alta permeabilidade cognitiva e baixa geração de novos	
conhecimentos	71
Figura 5.27–Norma do erro para o caso simples	75
Figura 5.28–Norma do erro para o caso geral terceira e quarta coluna da tabela 5.24	77
Figura 5.29–Norma do erro para o caso geral e simples, tabela 5.25	78

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Resultado da equação do calor para h=0,25	22
Tabela 2.2 – Resultado da equação do calor para h=0,5	22
Tabela 2.3 – Erro cometido no processo de aproximação para h=0,5	22
Tabela 2.4 – Erro cometido no processo de aproximação para h=0,25	23
Tabela 5.1 – Tabela de resultados para $K_1 = 0.0005, r = 0.5, \ldots, \ldots, \ldots$	52
Tabela 5.2 – Tabela de resultados para $K_1 = 0.0005, r = 0. \dots \dots \dots \dots \dots \dots$	52
Tabela 5.3 – Tabela de resultados para $K_1 = 100, r = 100$	53
Tabela 5.4 – Tabela de resultados para $K_1 = 100, r = 0 c_p = 1. \ldots \ldots \ldots$	53
Tabela 5.5 – Tabela de resultados para $K_1 = 100, r = 100 c_p = 0,0001.$	55
Tabela 5.6 – Tabela de resultados para $K_1 = 100 = r c_p = 10.$	55
Tabela 5.7 – Tabela de resultados para $K_1 = 100, r = 0 c_p = 0, 01. \dots \dots \dots$	56
Tabela 5.8 – Tabela de resultados para $K_1 = 100, r = 100 c_p = 0, 1. \dots \dots$	57
Tabela 5.9 – Tabela de resultados para o caso geral com $K_1 = 0.0005 = K_2, r = 100 c_p =$	
$0.01. \ldots \ldots$	63
Tabela 5.10–Tabela de resultados para o caso geral com $K_1 = 0.0005 = r, K_2 =$	
$0.5, c_p = 0.01.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	64
Tabela 5.11–Tabela de resultados para o caso geral com $K_2 = 0.0005 = r, K_1 =$	
$0.5, c_p = 0.01.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	64
Tabela 5.12–Tabela de resultados para o caso geral com $K_2 = 0.0005, K_1 = 0.5 = r c_p =$	
$0.01. \ldots \ldots$	65
Tabela 5.13–Tabela de resultados para o caso geral com $K_1 = 0.0005, K_2 = 0.5, r =$	
$0, c_p = 0.01. \ldots \ldots$	66
Tabela 5.14–Tabela de resultados para o caso geral com $K_1 = 0.5 = K_2, r = 0, c_p = 0.01$ .	66
Tabela 5.15–Tabela de resultados para o caso geral com $K_1 = 100, K_2 = 25, r = 25, c_p =$	
1	68
Tabela 5.16–Tabela de resultados para o caso geral com $K_1 = 25, K_2 = 100, r = 0, c_p = 1.$	68
Tabela 5.17–Tabela de resultados para caso geral, permeabilidade e retenção cognitiva	
iguais com geração nula.	70
Tabela 5.18–Tabela de resultados para o caso geral, permeabilidade e retenção cognitiva	
iguais ao parâmetro de geração.	70
Tabela 5.19–Tabela de resultados para o caso geral com alta permeabilidade, baixa reten-	
ção cognitiva e baixa geração de novos conhecimentos.	72
Tabela 5.20–Caso simples com alta permeabilidade cognitiva e baixa geração de novos	
conhecimentos.	72
Tabela 5.21–Tabela de autovalores para a matriz de amplificação para o primeiro exemplo.	74
Tabela 5.22–Norma do erro para o primeiro exemplo do caso simples	75

Tabela 5.23–Tabela de autovalores para a matriz de amplificação para o primeiro exemplo	
em sua forma geral.	76
Tabela 5.24–Norma do erro para o primeiro exemplo do caso geral	76
Tabela 5.25–Norma do erro para o caso simples e geral com os respectivos autovalores.	77

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

- UESC Universidade Estadual de Santa Cruz
- DCET Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas
- PPGMC Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia
- MDF Método de Diferenças Finitas
- MEF Método dos Elementos Finitos
- EDP Equação Diferencial Parcial
- EDO Equação Diferencial Ordinária
- EDF Equação de Diferenças Finitas

# LISTA DE SÍMBOLOS

Ω	Domínio contínuo
$\Omega_e$	Subdomínio de $\Omega$
$\partial \Omega$	Fronteira de um domínio contínuo $\Omega$
$C(\Omega)$	Espaço de funções contínuas
$c_i$	Constantes reais
h	Parâmetro que representa o tamanho de uma malha
$\alpha^2$	Condutividade térmica ou coeficiente de difusão
λ	Taxa de transferência de conhecimento
$c_p$	Capacidade de aprendizado
r	Taxa de geração de conhecimento
$K_1$	Permeabilidade cognitiva
$K_2$	Retenção cognitiva
<i>C</i> <sub>0</sub>	Criatividade em uma cadeia de conhecimento
σ	Investimentos ou incentivos em uma cadeia
$t_0$	Tempo inicial
$t_f$	Tempo final
$\Delta t$	Intervalo de tempo
$\Delta x$	Variação espacial
С	Capacidade térmica quando na equação do calor
ρ	Massa específica quando na equação do calor
$\epsilon$	Valor real suficientemente pequeno
$R_n$	Resíduo na aproximação de Taylor
$P_n$	Polinômio de Taylor
$C^n$	Espaço das funções com derivadas contínuas até a ordem $n$

- au Erro de truncamento local
- $\mathbb{R}$  Conjunto dos números reais
- ℕ Conjunto dos números naturais
- $\phi_i$  Funções reais
- $\Delta$  Operador laplaciano

# SUMÁRIO

1 – INT	RODUÇÃO	1
2 – PRI	ELIMINARES	6
2.1	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS	6
	2.1.1 EDP's Parabólicas	7
	2.1.2 Condições de Contorno e Iniciais	8
	2.1.3 A Equação do Calor	9
2.2	MÉTODOS NUMÉRICOS	10
	2.2.1 Erros absolutos e relativos	12
	2.2.2 O Polinômio de Taylor	15
	2.2.3 Diferenças Finitas	17
3 – O N	IODELO MATEMÁTICO: Uma representação unidimensional e transiente.	26
3.1	FORMULAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO	27
3.2	FORMULAÇÃO EM DIFERENÇAS FINITAS	29
	3.2.1 Método implícito: O método de Crank-Nicolson	32
3.3	ESTABILIDADE E CONSISTÊNCIA DO MDF	34
	3.3.1 Critério de Von Neumann	37
4 – AN	ÁLISE DO ERRO DE APROXIMAÇÃO NUMÉRICA POR ANALOGIA	
CO	M O CRITÉRIO DE ANÁLISE PARA O MÉTODO DE ELEMENTOS FI-	
NIT	<u>'OS</u>	41
4.1	LEMA DE CÉA	42
4.2	ESTIMATIVA DE ERRO	42
	4.2.1 Aproximação de Ritz - Galerkin	44
5 – RES	SULTADOS E DISCUSSÕES	48
5.1	RESULTADOS NUMÉRICOS	48
	5.1.1 Análise de erros	73
6 – CO	NCLUSÃO	79
Referê	icias	81

Apêndices	84
APÊNDICE A – Código em Matlab para distribuição de temperatura em função do	
tempo e da posição dentro de uma placa	85
APÊNDICE B – Código em Matlab para distribuição de conhecimento em uma cadeia	87

## 1 INTRODUÇÃO

Na atual sociedade, conhecida como "sociedade da informação ou do conhecimento", a informação é uma componente natural a tudo o que um meio ou cadeia científica produz, e nesse processo de construção do conhecimento é essencial a transformação de informação em conhecimento. Essa transformação ocorre quando um meio científico busca informações em outros meios com um propósito definido, na tentativa de encontrar algo que possibilite ampliar o seu nível de conhecimento, seleciona e processa a informação, e neste processo muda a capacidade de conferir sentido à experiência criando significados (FUJINO; HYODO, 2006).

Segundo o Dicionário Aurélio Ferreira (1993), conhecimento é o ato ou a atividade de conhecer, realizado por meio da razão ou da experiência. Conhecimento impacta todas as ações da sociedade sendo responsável pela sobrevivência e desenvolvimento da raça humana. O conhecimento é tanto causa quanto solução para as mudanças do ser humano em um meio e no desenvolvimento científico e tecnológico. É transmitido por uma complexa rede aninhada, relacionado com à geração de conhecimento humano. A análise e soluções de como o conhecimento é gerado e permeia uma cadeia de inovação ainda carece de pesquisa e investigação, principalmente no contexto de compreensão, geração e difusão de conhecimentos, e dos processos de transferência de conhecimento. O presente trabalho busca contribuir na compreensão do fenômeno de propagação e difusão do conhecimento.

A palavra difusão procede do verbo latino *diffundere*, que representa a disseminação de algo num ambiente ou num espaço. A difusão é um processo comum na natureza e ocorre quando um determinado sistema tende ao seu estado de equilíbrio em um meio com dispersão nãoconvectiva de uma concentração de massa, energia, ou outra quantidade inicialmente concentrada em parte do domínio físico deste sistema. Esse processo pode ser entendido como o potencial químico de uma substância igualando-se em todos os pontos do sistema com o passar do tempo, ocorrendo em regiões com potencial maior para regiões com menor potencial. É possível simular o processo de difusão e em particular o processo de propagação do conhecimento em um meio científico por meio de generalizações da equação de difusão.

Criar e gerir conhecimento tem sido um dos grandes desafios dos últimos tempos. Entretanto, torna-se pertinente caracterizar o que se entende por conhecimento, expressão amplamente utilizada, mas nem sempre sob o mesmo enfoque. Nesse contexto, os mais variados pensadores tem dividido o conhecimento em quatro grandes grupos, os quais podemos citar como:

- Conhecimento Empírico;
- Conhecimento Filosófico;

- Conhecimento Teológico;
- Conhecimento Científico.

O conhecimento Empírico é entendido como o conhecimento adquirido a partir de observações, ou seja, o senso comum. O conhecimento Filosófico é visto como o conhecimento das interrogações, preocupa-se em questionar as relações dos indivíduos com o meio em que se encontram inseridos. O conhecimento Teológico baseia-se na suposição e aceitação de axiomas da fé, procura-se provar a existência de Deus. Por sua vez, o conhecimento Científico é entendido como o tipo de conhecimento que se embasa na investigação e busca de respostas para problemas reais.

Para Pereira (2006) a teoria da difusão das inovações proporciona um quadro conceitual de análise do processo de transferência e difusão do conhecimento científico e da inovação. Para a autora o crescimento do conhecimento científico e da inovação na gestão do conhecimento está amplamente relacionado com o processo de difusão, através do qual, os indivíduos e a sociedade em seu conjunto, incorporam conceitos e técnicas inovadoras nos processos e práticas estabelecidos.

No contexto de nosso trabalho estamos interessados no caso específico de "Conhecimento Científico". Esse será abordado por meio da análise do processo de disseminação ou propagação do mesmo em uma rede que aqui chamaremos de cadeia do conhecimento. Essa cadeia é vista como um conjunto de pesquisadores organizados com o objetivo de construir e transferir novos conhecimentos ou tecnologias acerca de temas específicos.

Segundo Nonaka e Takeuchi (1997) o estudo do conhecimento humano é tão antigo quanto sua própria história. Os autores afirmam que esse estudo tem sido um dos temas centrais da filosofia e epistemologia desde o período grego. Os autores ainda destacam pensadores como Peter Drucker e Alvin Toffler como principais articuladores da importância do conhecimento como recurso e poder gerencial, enfatizando uma gama crescente de pesquisadores das diversas áreas buscando teorizar a administração do conhecimento.

Para muitos pensadores, como o filósofo Vygotski (1989) em seu artigo "Formação social da mente" o conhecimento é resultante da interação social e cultural, em que o sujeito é, sobretudo, social; logo, o conhecimento será também um produto social. Essa relação entre homem e mundo se estabelece sendo mediada por sistemas simbólicos entre o sujeito e o meio.

Já para Piaget (1985), o "conhecimento não procede nem da experiência única dos objetos nem de uma programação inata pré-formada no sujeito, mas de construção sucessiva com elaborações constantes de estruturas novas". Numa perspectiva construtivista, essa abordagem responde às questões: "como se forma o conhecimento?" e "como evolui o conhecimento?".

Nesse sentido, há um crescimento alarmante na tentativa de se explicar o significado da palavra conhecimento, sendo nas últimas décadas considerado a unidade básica dos avanços

sociais e tecnológicos. Nesse sentido, o conhecimento assume outra subdivisão em dois grandes grupos: *Conhecimento Explicito e Conhecimento Tácito*.

Os autores Nonaka e Takeuchi (1997) definem

- **Conhecimento Explícito**: tipo de conhecimento que pode ser articulado na linguagem formal, tais como afirmações gramaticais e expressões matemáticas.
- **Conhecimento Tácito**: conhecimento de difícil articulação na linguagem formal, baseado em crenças pessoais, perspectivas e sistemas de valor.

Para os autores, esses dois tipos de conhecimentos são unidades estruturais básicas que se complementam, com interações dinâmicas entre si para produção do conhecimento em um processo em forma de espiral. Nesse sentido, pressupõe-se que é preciso codificar o conhecimento existente de modo a torná-lo acessível a quem precisa usufruir de novos conhecimentos. Entretanto, tornar o conhecimento explícito em código para que possa ser utilizado sem perder suas propriedades tem sido umas das maiores dificuldades enfrentadas pelos mais variados pesquisadores.

Podemos entender os processos de transferência e codificação de conhecimento como sendo a tarefa de relacionar os conhecimentos tácitos e explícitos de modo a converte-los entre si. Entretanto, os autores Nonaka e Takeuchi (1997), quando desenvolvem a teoria de criação de conhecimento, afirmam que para a gestão efetiva do conhecimento é necessária a contínua conversão do conhecimento tácito em explícito, a qual é realizada por meio de quatro modos:

- Socialização Consiste na troca de conhecimento, "frente a frente" entre os indivíduos. Essa troca pode ocorrer por meio de conversas frequentes, observação, imitação, compartilhamento de experiências entre outros.
- Externalização Consiste na externalização do conhecimento do indivíduo, ou seja, consiste no registro do conhecimento por meio de relatórios, modelos, textos, imagens, entre outros.
- Combinação Consiste na combinação dos conhecimentos explícitos do indivíduo com os conhecimentos da sociedade na qual estão inseridos.
- Internalização Consiste no aprendizado pessoal a partir de conhecimentos expostos.

No contexto atual, com o avanço tecnológico impondo mudanças cada vez mais rápidas, com a aceleração do processo de globalização e os impactos econômicos, políticos e sociais, faz-se necessário a aquisição de novas capacitações e conhecimentos de modo que os indivíduos intensifiquem a capacidade de aprender e, consequentemente, transformarem tal aprendizado em fator de aprimoramento frente à competitividade. Assim, com mudanças muito rápidas e radicais, é de se esperar que apenas aqueles que estão envolvidos na criação do conhecimento dispõem de possibilidades reais de absorver e fazer uso desses novos recursos de uma era que se diz globalizada.

Este avanço desenfreado que viemos sofrendo ao longo de nossa história, as mudanças têm nos deixado face à uma diversidade de fenômenos, levando o homem a superar obstáculos com o intuito de ir além do desconhecido, construindo o seu conhecimento dentro de suas próprias limitações. Nessa busca incessante de informações, ideias e abstrações da realidade na tentativa de analisar e interpretar-las em uma linguagem lógica, somos conduzidos a aproximar ou transformar problemas concretos do mundo real em modelos que os simulem de forma ótima, podendo resolvê-los e permitindo retirar, de suas soluções, interpretações de forma clara.

Na linha de pensamento de Perotto e Vicari (2001) o conhecimento científico avança de tal forma que a modelagem do conhecimento ganha mais valor, na medida em que a ciência é vista como conhecimento estruturado, e técnicas de modelagem do conhecimento podem ser instrumentos muito interessantes para a descrição do raciocínio ou das interações de um cientista. Uma vez que um modelo está devidamente formulado, numa linguagem formal, e que essa linguagem é conhecida pela comunidade científica, tem-se uma ferramenta para o ensino e aprendizagem. Esse processo de ensino a aprendizagem é feito por transmissão ou transferências do conhecimento adquirido para novos cientistas, sendo que esses novos cientistas precisam compreender como se dá o raciocínio dos velhos cientistas, que variáveis estão envolvidas, que respostas eles procuram, e interpretam o modelo proposto.

Nesse sentido, pretendemos apresentar uma solução numérica com análise de erros, por meio de uma discretização em diferenças finitas, que reduz o problema contínuo em um problema discreto com um número finito de variáveis, podendo ser resolvido computacionalmente, para a equação diferencial de difusão com acréscimo de novos termos gerando o modelo de difusão de conhecimento: uma equação diferencial de 4ª ordem com termo de retenção e com termo de geração de conhecimento. O uso de métodos numéricos é hoje uma realidade para solução de problemas das mais variadas áreas das ciências. O avanço do uso de técnicas numéricas está atrelado a muitas vantagens, como: baixo custo, evolução temporal do processo, resolução de problemas em geometrias complexas, resultados rápidos dentre outros. Entretanto, uma solução numérica traz consigo algumas desvantagens, tais como: erros de truncamento e arrendondamento, instabilidade, formalização das condições de contorno, e custo computacional. Então, a atenção neste trabalho é voltada à estudar o desempenho do MDF (Método de Diferenças Finitas) na resolução numérica do problema de difusão de conhecimento, relacionando a teoria construída com os resultados numéricos gerados por simulações.

A ideia básica do método de diferenças finitas é substituir as derivadas presentes em uma equação diferencial por expressões algébricas construídas a partir da série de Taylor. Para obter uma solução via diferenças finitas de uma equação diferencial, definida sobre um domínio  $\Omega$ , é necessário discretizar o domínio, isto é, a solução numérica é obtida em pontos  $(x_i, t_j)$  do domínio considerando  $\Omega$  unidimensional no espaço, e a solução evoluindo no tempo . A escolha destes pontos irá definir o domínio discretizado, enquanto o conjunto dos pontos  $x_i$  irá definir a malha. Em particular, adotaremos uma malha retangular com espaçamento h na direção x, o passo de tempo  $\Delta t$ , pertinente à evolução do problema, é determinado pela diferença  $\Delta t = t_{j+1} - t_j$ , para os j-ésimos instantes determinados.

No Capítulo 2 faremos um breve estudo sobre os alicerces de nossa teoria definindo uma série de ferramentas da matemática para que possamos usá-las durante todo o trabalho. Nesse mesmo capítulo enfatizamos algumas definições básicas para construção do MDF.

No contexto geral, o capítulo 3 trata do modelo matemático do problema, sua formulação em diferenças finitas especificamente para o método explícito e implícito de Crank-Nicolson buscando suas soluções numéricas e uma representação matricial. No mesmo capítulo abrimos uma seção para análise de convergência e estabilidade para os métodos explícito e implícito sendo aplicado o critério de Von Neumann para o método de Crank-Nicolson.

No capítulo 4 definimos alguns conceitos da análise funcional, preocupados em avaliar a magnitude do erro gerado no processo de construção da solução numérica, via método de diferenças finitas (MDF), por uma avaliação análoga, usualmente aplicada ao método dos elementos finitos (MEF), via Galerkin. Tal transposição de avaliação via normas é possível uma vez que a formulação do MDF encontra correspondência na formulação via MEF por Galerkin, resultando em sistema matricial análogo. Buscaremos avaliar o erro de solução numérica, por meio da estimativa do erro empregando a norma  $\|.\|_0$ , definida no espaço  $L^2$ , a menos do erro de truncamento da aproximação em diferenças finitas. A importante desigualdade de Poincaré e o lema de Céa integram o capítulo, como ferrramenta para garantir a consistência do problema.

O capítulo 5 foi destinado a compôr as discussões e resultados numéricos. Tais resultados são extraídos por meio de simulações a partir de um código desenvolvido na linguagem Matlab, utilizando a condição de Dirichlet, aplicada ao modelo de transferência de conhecimento, para se obter informações acerca do processo de transmissão de conhecimento em uma cadeia científica, e sobre a evolução dessa cadeia. Isso implica que estamos supondo uma cadeia controlada por fatores internos, mantendo-se o índice de produtividade ou criatividade constantes em suas fronteiras, o que significa estarmos tratando com uma cadeia fechada, em que o conhecimento busca ser retido na própria cadeia, sem interação com grupos de pesquisa externos à cadeia considerada.

O capítulo 6 é composto das conclusões e considerações de sugestões para trabalhos futuros.

### **2 PRELIMINARES**

Neste capítulo faremos um compêndio de alguns conceitos matemáticos e da análise numérica que serão utilizados no transcorrer deste trabalho. A teoria a seguir é extremamente importante, pois está por trás de resultados e teoremas que formarão o corpo do trabalho. Alguns resultados aqui apresentados não serão demonstrados por não serem o objetivo de nosso trabalho.

## 2.1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Vários problemas das diversas áreas da Ciência podem ser formulados em termos de equações diferenciais parciais, como a determinação da velocidade e pressão de um fluido, temperatura na previsão do tempo, problemas associados a difusão dentre outras.

Uma equação a derivadas parciais ou equação diferencial parcial (EDP) é uma equação envolvendo duas ou mais variáveis independentes  $x, y, z, t, \cdots$  e derivadas parciais de uma função (variável dependente)  $u = u(x, y, z, t, \cdots)$ . Isso significa que uma EDP em *n* variáveis independentes  $x_1, \cdots, x_n$  é uma equação da forma:

$$F(x_1, \cdots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \cdots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}, \cdots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}) = 0$$
(2.1)

onde  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ ,  $\Omega$  é um subconjunto aberto do  $\mathbb{R}^n$ , F é uma função dada e u = u(x) é a função a se determinar (IÓRIO, 2007).

A classificação de EDP's, segundo a ordem e linearidade, é semelhante a classificação de EDO's. A ordem de uma EDP é dada pela derivada parcial de maior ordem da equação. Uma EDP será linear se é de primeiro grau em u e em todas suas derivadas parciais, caso contrário é dita não linear.

As EDP's são ainda classificadas em três grupos distintos: Equações Parabólicas, Equações Elípticas e Equações Hiperbólicas. Na área de aplicações, as Equações Elípticas são utilizadas para modelar problemas de equilíbrio, as Equações Parabólicas problemas de difusão e as Equações Hiperbólicas problemas de convecção (FRANCO, 2006). Essa classificação tem sua importância na análise teórica, na descrição de métodos numéricos e nas aplicações.

Através das equações diferenciais é possível prever o comportamento futuro de problemas físicos importantes, com base na variação de seus valores presentes. Assim as EDP's aplicam-se à problemas que envolvem e dependem de muitas variáveis, isto é, o modelo do problema físico envolve as derivadas de cada uma destas variáveis. Estes tipos de equações são em geral mais complexas que as equações diferenciais ordinárias, porém, para ambas, raramente é possível obter

soluções exatas. Desta forma, faz-se necessário, para obter uma solução o uso de discretizações, ou seja, uma representação discreta (finita) do problema.

#### 2.1.1 EDP's Parabólicas

A classificação de EDP's pode ser vista como uma analogia à classificação das cônicas, que por sua vez está relacionada às curvas características. Essas, são linhas que revelam e propagam diversas informações ao longo do domínio  $\Omega$ . Quando essas curvas são parábolas temos uma equação diferencial parabólica. Um exemplo clássico desse tipo de equação, é a equação de difusão transiente

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$
(2.2)

Esta equação, em geral, é utilizada para representar uma difusão de massa, condução do calor, e em nosso caso específico, a difusão de conhecimento. As propriedades físicas da equação 2.2 são determinadas pelo desenvolvimento da análise de suas curvas características, que podem ser construídas através da equação

$$\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ dx & dt & 0 \\ 0 & dx & dt \end{vmatrix} = 0$$
(2.3)

 $\alpha dt^2 = 0 \Rightarrow dt = \pm 0 \Rightarrow t = constante.$ 

Sendo que as velocidades de propagação de informações ao longo dessas curvas dadas por

$$c = \frac{dx}{dt}.$$
(2.4)

De modo que as informações se propagam a uma velocidade infinita ao longo das linhas de tempo constante. Consequentemente, o fenômeno físico a ser estudado no ponto (x, t), dependerá de si em todos os pontos do domínio nos tempos anterior e atual. Isso significa que a partir dos valores considerados inicialmente das grandezas que envolvem o problema no tempo inicial  $t_0$ , é possível calcular pela solução numérica da EDP, mesmo quando não se conhece sua solução analítica, utilizando-se valores sucessivos em intervalos de tempo  $\Delta t$  até um tempo final  $t_f$  pré-determinado. Para que se tenha uma evolução temporal representativa do problema estudado é necessário que se atribua condições iniciais compatíveis com o problema. Diante disso, discutiremos abaixo alguns pontos relevantes sobre tais tópicos.

#### 2.1.2 Condições de Contorno e Iniciais

A principal diferença entre EDO's e EDP's é a informação necessária, suplementar para a unicidade de sua solução. Em EDO's lineares sua solução aparece com constantes arbitrárias, de modo que possam ser determinadas impondo condições iniciais. Isso é feito fixando os valores da solução e de suas derivadas até certa ordem em um determinado ponto. No caso de intervalos finitos, a unicidade da solução poderá ser obtida impondo condições nos extremos dos intervalos, chamadas condições de contorno.

No caso de EDP's o espaço das variáveis independentes é multidimensional. Como procuramos soluções definidas em um aberto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , é natural substituir os extremos do intervalo (caso n = 1) pelo bordo  $\partial\Omega$  da região  $\Omega$ . Quando impomos condições sobre o valor da solução, e de suas derivadas, no bordo da região temos um problema de valores de contorno. Condições de contorno aparecem naturalmente na descrição de fenômenos físicos estacionários (independente do tempo), na maioria das vezes encontramos condições do tipo:

$$\alpha u(x) + \beta \frac{\partial u}{\partial n}(x) = f(x), \quad x \in \partial \Omega.$$
 (2.5)

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes dadas, f é uma função dada em  $\partial\Omega$  e  $\frac{\partial u}{\partial n}(t)$  é a derivada de u na direção normal a  $\partial\Omega$ . No caso em que  $\beta = 0$ , a condição 2.5 é conhecida condição de Dirichlet, no caso em  $\alpha = 0$ , temos uma condição de Neumann (IÓRIO, 2007).

Como no caso de EDP's temos mais de uma variável dependente, por exemplo x e t, é natural fixar uma das variáveis, por exemplo t = 0, e impor o valor da solução e de suas derivadas parciais em relação à variável fixa como função das outras variáveis. Por exemplo  $u(x,0) = f(x) e u_t(x,0) = g(x)$ , para f e g funções dadas.

Em problemas físicos dependentes do tempo , como é o caso de fenômenos de difusão e fenômenos oscilatórios, é muitas vezes conveniente separar a variável temporal t das variáveis espaciais x, y, z. O que ocorre muitas vezes é que os valores da solução e de suas derivadas em relação ao tempo até a ordem k - 1 são descritos no instante t = 0 como função de x, y, z, estabelecendo uma condição inicial, ao mesmo tempo que são impostas condições de contorno, para todo  $t \ge 0$  em relação as variáveis espaciais. Esses problemas são chamados de problemas mistos (IÓRIO, 2007).

**Exemplo 2.1.** Seja  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  um aberto limitado ( $\Omega$  é interior de um sólido  $\overline{\Omega}$ ). Denotando do X = (x, y, z) os pontos de  $\mathbb{R}^3$  e por  $\Delta$  o laplaciano em  $\mathbb{R}^3$ . Então o problema

$$u_t = \alpha^2 \Delta u \ em \ \Omega \times (0, +\infty) \tag{2.6}$$

$$u(X,t) = 0, X \in \partial\Omega, t \ge 0$$
(2.7)

$$u(X,0) = f(X), X \in \Omega$$
(2.8)

é um problema misto em que a condição u(X,t) = 0 para  $X \in \partial\Omega$  e  $t \ge 0$  é uma condição de contorno, enquanto que a condição u(X,0) = f(X) para  $X \in \overline{\Omega}$  é uma condição inicial. A função f é dada,  $\alpha^2$  é uma constante positiva e procuramos uma solução  $u \in C(\overline{\Omega} \times [0, +\infty)) \cap$  $C^2(\Omega \times (0, +\infty))$ , logo f tem que estar em  $C(\overline{\Omega})$  (IÓRIO, 2007).

#### 2.1.3 A Equação do Calor

Aqui, daremos ênfase a um problema relativo a distribuição de temperatura em uma barra. Esse problema que é denominado problema de valor de contorno, é descrito por uma equação diferencial parcial linear de segunda ordem. Nosso enfoque que será abordado na seção 2.2.3, tem por objetivo determinar soluções de EDP's substituindo suas derivadas parciais por expressões algébricas, obtidas por aproximações da série de Taylor. Por simplicidade iremos abordar o problema na forma unidimensional e transiente. Para tanto, tomaremos como exemplo a distribuição de temperatura em uma barra de metal de comprimento L, cujas extremidades são mantidas a temperaturas conhecidas e termicamente isoladas ao longo do comprimento, como na figura 2.1.



Figura 2.1 – Condução do calor numa barra de metal

Considerando um elemento diferencial dx no comprimento da barra de seção A, e tomando u para representar a temperatura em qualquer ponto da barra, sendo o calor transmitido no sentido da esquerda para direita sobre a influência do gradiente de temperatura  $\frac{\partial u}{\partial x}$ . Tomandose o balanço do fluxo de calor na entrada 2.9 e na saída 2.10 do elemento diferencial, com K representando a condutividade térmica do material, temos:

$$-KA\frac{\partial u}{\partial x}, \quad para\,x=0,$$
 (2.9)

$$-KA\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx\right), \quad para\,x = L.$$
(2.10)

A diferença entre a entrada e saída do fluxo de calor do elemento diferencial nos dá a taxa de calor absorvida pelo elemento e é equivalente à variação de calor, u(x, t), no tempo. Tal fenômeno podemos representar por:

$$-KA\frac{\partial u}{\partial x} - \left[-KA\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx\right)\right] = c\rho\frac{\partial u}{\partial t}.$$
(2.11)

Onde as constantes c,  $\rho \in t$  representam a capacidade térmica, a massa específica e o tempo, respectivamente. Simplificando a equação 2.11 obtemos:

$$K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c\rho \frac{\partial u}{\partial t}.$$
(2.12)

A equação 2.12 é um modelo matemático para regimes não permanentes. Esse modelo foi idealizado para fluxo de calor. Entretanto, pode ser utilizado para representar difusão de material, fluxo de fluídos em regime laminar, fluxo ou compartilhamento de conhecimento que é o foco de nosso trabalho, dentre outros.

Como K é constante a equação 2.12 pode ser reescrita como:

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}.$$
(2.13)

 $\cos \alpha^2 = \frac{K}{c\rho}$ , que é uma constante que representa a condutividade térmica do material sendo um parâmetro tabelado que depende do material da barra. As condições de contorno para esse caso são:

$$u(0,t) = \overline{u}_1, \qquad u(L,t) = \overline{u}_2. \tag{2.14}$$

Para  $\overline{u}_1 \in \overline{u}_2$ , valores conhecidos prescritos. Como a distribuição de temperatura ao longo da barra depende da temperatura no instante inicial ( $t_0 = 0$ ), temos a seguinte condição inicial:

$$u(x,0) = f(x),$$
 (2.15)

e uma condição de compatibilidade dada por:

$$u(0,0) = f(0) = 0 = f(L).$$
(2.16)

A equação 2.13 pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis. Entretanto, nosso objetivo que será discutido na seção 2.2.3 é aplicar a substituição de suas derivadas parciais por diferenças finitas.

## 2.2 MÉTODOS NUMÉRICOS

Na maioria das vezes, problemas que envolvem equações diferenciais mais complexas necessitam de uma variedade de ferramentas para sua resolução. Além das soluções analíticas, quando existirem, métodos de aproximação numérica podem ser empregados para estimar soluções de EDPs. Dentre os diversos métodos podemos citar o método de diferenças finitas, elementos finitos, elementos de contorno e volumes finitos.

O aparecimento do Cálculo e a criação dos logaritmos, no século XVII, vieram dar um grande impulso ao desenvolvimento de procedimentos numéricos. Os novos modelos matemáticos propostos não podiam ser resolvidos de forma explícita e assim tornava-se imperioso o desenvolvimento de métodos numéricos para obter soluções aproximadas. O próprio Newton criou vários métodos numéricos para a resolução de muitos problemas, métodos esses que possuem, hoje, o seu nome. Tal como Newton<sup>1</sup>, muitos vultos da matemática dos séculos XVIII e XIX trabalharam na construção de métodos numéricos. Dentre eles podemos destacar Leonhard Euler (1707-1783), Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) e Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1875) (ARAÚJO, 2012).

De um modo geral, um método numérico é entendido como um conjunto de regras organizadas por uma sequência de operações elementares que conduzem a uma solução do problema. Com a era da informatização, e a popularização crescente dos computadores de alta capacidade de processamento, diversas atividades, dos mais variados ramos das Ciências, têm recorrido de forma cada vez mais intensa aos métodos e técnicas computacionais para resolução de problemas reais, para os quais soluções exatas são quase que impossíveis, ou demandam elevado tempo de execução.

Para se utilizar as técnicas dos métodos numéricos em um problema físico, em geral faz-se necessário modelar a física do mesmo. Essa modelagem consiste em determinar quais as grandezas físicas atuantes sobre o problema, e como elas o afetam. Considerando as leis de conservação, de massa, energia e momento adequadas ao fenômeno, elabora-se o modelo que será expresso por equações ou um conjunto de equações que relacionam suas grandezas relevantes para um contínuo espaço de tempo. Seguindo essa linha de pensamento Alves (2007) define:

Um sistema de equações diferenciais constitui um modelo contínuo, que possui infinitos graus de liberdade, uma vez que as variáveis se distribuem continuamente em todo o domínio do problema. Com exceção de alguns casos mais simples, em geral não é possível encontrar soluções analíticas para o problema. Recorre-se, então, aos modelos discretos (ou numéricos), obtidos dos modelos contínuos através de hipóteses simplificadoras: As variáveis que constituem infinitos graus de liberdade, são expressos em termos de um número finito de graus de liberdade. Esses graus de liberdade são incógnitas dos modelos discretos dos sistemas equivalentes e são determinados a partir da solução de um sistema de equações algébricas.

Para tratar o modelo computacionalmente, é necessário expressar de forma adequada as equações e a região (domínio) em que elas são válidas. Como não é possível se obter soluções numéricas sobre uma região contínua devido aos seus infinitos pontos, inicialmente o domínio é discretizado<sup>2</sup>. Sobre o domínio discretizado é que as soluções serão obtidas. A esse conjunto discretizado denomina-se de malha de pontos e/ou elementos<sup>3</sup>. (FORTUNA, 2000)

O processo de modelagem de um problema real pode ser esquematizado por meio de um

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>O método desenvolvido por ele intitulado Método de Newton é considerado por muitos autores o melhor método para encontrar aproximações de raízes (ou zeros) de uma determinada função real.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Dividir ou particionar o domínio em partes/pontos com menor complexidade, que em seu conjunto representam o domínio contínuo.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Representação do espaço físico utilizado na solução numérica.

fluxograma como segue:



Figura 2.2 – Fluxograma do processo de modelagem matemática

Aplicados ao modelo de difusão de conhecimento, equação 3.2, um modelo matemático transiente unidimensional, com uso de uma discretização uniforme, isto é, de uma malha de nós igualmente espaçados, são obtidas soluções aproximadas. Estas embutem erros de truncamento e de aproximação devido às interpolações polinomiais de aproximação, os quais são admitidos, porém exigem uma análise de sua magnitude para estimar a qualidade da solução numérica. Quanto a essa solução, necessária à compreensão de problemas complexos, é necessário estimar erros numéricos, isto é, aqueles que surgem da implementação do conjunto de métodos numéricos escolhidos para solução do problema, e que, se não reduzidos ou controlados, podem levar a soluções espúrias (indesejadas e não reais).

Para o presente trabalho foi adotado um estimador ou limitante para a expansão (e propagação) destes erros, na forma de uma norma  $L^2$ , com o objetivo de analisar a convergência da solução numérica para a exata (ainda que desconhecida), no estudo da propagação de conhecimento no decorrer do tempo.

#### 2.2.1 Erros absolutos e relativos

A solução numérica de um problema é feita pela substituição de um problema complexo por um mais simples que possua a mesma solução que o original, ou uma solução que tenha relação com a do problema original. Diante disso, as soluções numéricas são aproximações da solução original, de modo que deve-se levar em consideração precisões devido ao fato de incertezas nos dados iniciais, bem como pertubações no processo de resolução. Para melhorar a precisão da solução numérica devemos analisar essas pertubações buscando mecanismos que nos permitam determinar limites superiores para os erros obtidos no processo final de cálculo.

**Definição 2.2.** (*Erro*) Seja  $x \in \mathbb{R}^n$  um vetor (cujas componentes podem ser desconhecidas) e  $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$  um vetor cujas componentes são aproximações para as componentes correspondentes de x. Chama-se erro de  $\overline{x}$  (como aproximação a x), e representa-se por  $e(\overline{x})$ , à quantidade

$$e(\overline{x}) = x - \overline{x}.\tag{2.17}$$

Na maioria das vezes o erro é utilizado como uma norma. Sendo uma norma definida como segue:

**Definição 2.3.** (*Norma*) Seja V um espaço vetorial (real ou complexo). A aplicação  $|| \cdot || : V \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  que verifica

$$I. \ \forall x \in V, \ ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

2. 
$$\forall x \in V, \ \lambda \in \mathbb{R}(ou \ \mathbb{C}), \ ||\lambda x|| = |\lambda|.||x||,$$

3.  $\forall x, y \in V, ||x+y|| \le ||x|| + ||y||,$ 

#### é designado por norma.

Existem várias funções que verificam as três propriedades de normas vetoriais, entre elas pode-se citar a norma um (ou da soma), a norma euclidiana e a norma do máximo que são definidas por:

• 
$$||x||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|,$$
  
•  $||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2},$ 

• 
$$||x||_{\infty} = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|.$$

Dado um vetor  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $||x||_1 \ge ||x||_2 \ge ||x||_\infty$ . Também é possível provar que  $||x||_1 \le \sqrt{n}||x||_2$ ,  $||x||_2 \le \sqrt{n}||x||_\infty$ ,  $||x||_1 \le \sqrt{n}||x||_\infty$ . Então, para um dado n, as diferentes normas diferem numa constante multiplicativa e, como tal, são equivalentes, isto é, se uma delas se torna pequena, todas as outras serão proporcionalmente pequenas (ARAÚJO, 2012). Dizemos que o par  $(V, \cdot)$  forma um espaço vetorial normado.

**Definição 2.4.** (*Erro absoluto*) Seja  $x \in \mathbb{R}^n$  um vetor (cujas componentes podem ser desconhecidas)  $e \overline{x} \in \mathbb{R}^n$  um vetor cujas componentes são aproximações para as componentes correspondentes de x. Chama-se erro absoluto de  $\overline{x}$  (associado a x) à quantidade  $||e(\overline{x})||$ .

**Definição 2.5.** Dada uma sequência de elementos  $\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \subset V$ , diremos que essa é uma sequência de Cauchy se  $\forall \epsilon > 0$ , existe  $k_0 \in \mathbb{N}$ , tal que  $\forall n, m > k_0$ 

$$\|v_m - v_n\| \le \epsilon.$$

Dizemos que uma sequência  $\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \subset V$  tem limite  $v \in V$  com relação a norma  $\|\cdot\|$  se

$$\lim_{n \to \infty} \|v_n - v\| = 0.$$

**Definição 2.6.** (*Erro relativo*) Seja  $x \in \mathbb{R}^n$  um vetor (cujas componentes podem ser desconhecidas) e  $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$  um vetor cujas componentes são aproximações para as componentes correspondentes de x. Chama-se erro relativo  $\overline{x}$ , e representa-se por  $r(\overline{x})$  a quantidade

$$r(\overline{x}) = \frac{||e(\overline{x})||}{||x||}.$$
(2.18)

Como nessa definição o valor de x não é conhecido é comum considerar a aproximação

$$r(\overline{x}) \approx \frac{||e(\overline{x})||}{||\overline{x}||},\tag{2.19}$$

observando que  $||e(\overline{x})|| - ||\overline{x}|| = ||x - \overline{x}|| - ||\overline{x}|| \le ||x|| + ||\overline{x}|| - ||\overline{x}||$ . Assim,  $||x|| \ge ||e(\overline{x})|| - ||\overline{x}||$ . Logo, podemos considerar o seguinte majorante para o erro relativo:

$$r(\overline{x}) \le \frac{||e(\overline{x})||}{|||\overline{x}|| - ||e(\overline{x})|||}.$$
(2.20)

O erro relativo geralmente nos da uma melhor precisão que o erro absoluto, visto que leva em consideração o tamanho do valor que está sendo aproximado. O erro que é produzido quando uma calculadora ou um computador é usado para realizar cálculos com números reais é chamado erro de arredondamento (BURDEN et al., 2011).

**Definição 2.7.** Seja  $\overline{x} \in \mathbb{R}$  uma aproximação para  $x \in \mathbb{R}$ . Diz-se que  $\overline{x}$  tem k casas decimais corretas se, e somente se  $||e(\overline{x})|| \le 0, 5 \times 10^{-k}$ .

**Definição 2.8.** Seja  $\overline{x} \in \mathbb{R}$  uma aproximação para  $x \in \mathbb{R}$ . Diz-se que  $\overline{x}$  tem k algarismos significativos corretos se, e somente se  $r(\overline{x}) \leq 5 \times 10^{-k}$ .

Os erros de truncamento ou de discretização são, por definição, os erros que surgem quando se passa de um processo infinito para um processo finito ou quando se substitui um processo contínuo por um discreto. Diante disso, enunciamos o conhecido Teorema do Valor Médio, estabelecido por Joseph Louis Lagrange (1736-1813)<sup>4</sup>.

**Teorema 2.9.** (Valor Médio de Lagrange) Seja f uma função contínua em [a, b] e diferenciável no aberto (a, b) então existe pelo menos um  $c \in (a, b)$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
(2.21)

Este teorema justifica a prática de substituir o cálculo da derivada de uma função f definida em um intervalo [a, b] pela diferença dividida

$$f'[a,b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
(2.22)

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Matemático italiano que aos dezesseis anos tornou-se professor de matemática na Escola Real de Artilharia de Turim. Desde o começo foi um analista, nunca um geômetra, o que pode ser observado em Méchanique Analytique (Mecânica Analítica), sua obra prima, projetada aos 19 anos, mas só publicada em Paris em 1788 aos cinquenta e dois anos.

isso significa que dado um h = b - a > 0, suficientemente pequeno a derivada de uma função f pode ser aproximada, figura 2.3, por

 $f'(x) \approx \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$ 



Figura 2.3 – Teorema do Valor Médio de Lagrange

Onde o erro cometido nessa aproximação é um erro de truncamento dado por:

$$f(b) = f(a) + hf'(a) + O(h).$$
(2.24)

Esse tipo de erro é comum na chamada aproximação de Taylor que definiremos a seguir.

#### 2.2.2 O Polinômio de Taylor

Seja f uma função definida no intervalo [a, b]. Para todo  $x \in [a, b]$  e dado  $\epsilon > 0$ , como se determinar uma função g também definida em [a, b] tal que  $|f(x) - g(x)| < \epsilon$ . Para garantir a existência dessa função iremos enunciar o teorema de Wilhelm Theodor Weierstrass.

**Teorema 2.10.** (*Weierstrass*) Seja f uma função continua definida no intervalo [a, b]. Então para cada  $\epsilon > 0$  existe o polinômio p definido em [a, b] tal que

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - p(x)| < \epsilon.$$
(2.25)

Este resultado garante que dada uma função contínua f podemos determinar um polinômio p que está tão próximo de f quanto se queira, ou seja, uma aproximação para f. Já que existe esse polinômio, o método de construção de tal polinômio é enunciado no teorema que segue.

**Teorema 2.11.** (*Taylor*) Seja f uma função que admite derivadas contínuas até a ordem n em [a, b], isto é,  $f \in C^n([a, b])$ . Se existe  $f^{n+1}$  em (a, b), então para todo  $x, x_0 \in [a, b]$  temos

$$f(x) = P_n(x; x_0) + R_n(x; x_0), \qquad (2.26)$$

(2.23)

onde

$$P_n(x;x_0) = \sum_{k=0}^n \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k,$$
(2.27)

е

$$R_n(x;x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \quad \xi \in (x,x_0).$$
(2.28)

A equação 2.26 é chamada fórmula de Taylor sendo  $P_n(x; x_0)$  o polinômio de Taylor em torno do ponto  $x_0$  e  $R_n(x; x_0)$  o resto de ordem n ou de grau n + 1. No caso em que  $x_0 = 0$  a equação 2.26 é chamada fórmula de Maclaurin.

Escolhendo valores de  $x, x_0$  tais que

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x; x_0) = 0, \tag{2.29}$$

para n suficientemente grande a função poderá ser aproximada pelo polinômio de Taylor. A escolha para os valores de  $x, x_0$  deve ser feita de modo que pertençam ao intervalo de convergência da série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k,$$
(2.30)

chamada de série de Taylor (ARAÚJO, 2012).

No contexto de nosso trabalho estaremos interessados em determinar o menor valor  $\eta$  tal que

$$\max_{\xi \in (x,x_0)} |R_n(x;x_0)| < \eta,$$
(2.31)

sendo  $\eta$  uma tolerância previamente fixada. De modo que obtemos a aproximação

$$f(x) \approx P_n(x; x_0), \tag{2.32}$$

em que o erro não excede  $\eta$ . Sendo ainda o valor de  $R_n(x; x_0)$  um erro absoluto

$$R_n(x;x_0) = |f(x) - P_n(x;x_0)|, \qquad (2.33)$$

gerado por truncamento.

#### 2.2.3 Diferenças Finitas

Para se resolver uma EDP em uma região R, implica em se obter os valores da variável dependente em cada ponto de R. Sua solução numérica é obtida por operações aritméticas, sendo essas operações fruto de expressões algébricas da discretização da EDP. Essa discretização gera uma malha de pontos específicos de R. As expressões algébricas representativas sobre a malha são aproximações que denominamos Equações de Diferenças Finitas (EDF). A EDF é escrita para cada ponto da malha, que quando resolvidas nos conduz a solução aproximada do problema.

O método numérico das diferenças finitas é usado como uma abordagem alternativa para obter a aproximação da solução de uma equação diferencial parcial. A ideia básica desse método é transformar a resolução de uma equação diferencial em um sistema de equações algébricas, substituindo as derivadas por diferenças (MELO, 2011).

O método numérico das diferenças finitas é facilmente executado em computadores. Ele consiste na discretização do domínio e na substituição das derivadas presentes na equação diferencial por aproximações utilizando apenas os valores numéricos da função. A ferramenta básica no cálculo das aproximações das derivadas é a fórmula de Taylor (FRANCO, 2006).

Uma aproximação em diferença finitas pode ser vista de modo análogo ao processo de se determinar a derivada de uma função contínua. Recordamos que a definição de derivada de uma função f é feita por meio do limite de um quociente tal que

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$
(2.34)

tomando-se dois valores para f separados por uma distância h, a expressão 2.34 desprezado o limite representa uma aproximação algébrica para a primeira derivada de f. As aproximações de diferenças substituem o operador diferencial contínuo  $\frac{df}{dx}$  por uma aproximação discreta, calculada a partir dos valores de f em um número finito de pontos. Essas aproximações podem ser obtidas de diversas formas, as mais comuns são as expansão em série de Taylor e interpolação polinomial. A seguir apresentaremos o método da expansão em série de Taylor para se obter expressões para as primeiras e segundas derivadas de uma função f.

Supondo que f seja contínua em um intervalo [a, b] e que possua todas as derivadas contínuas até a ordem n, da equação 2.30, teorema 2.11,  $\forall x \in [a, b]$  vemos que o desenvolvimento de uma função f em série de Taylor pode ser escrita como:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} + f'''(x)\frac{h^3}{6} + \dots + f^n(\xi)\frac{h^n}{n!}, \quad \xi \in (x, x+h),$$
 (2.35)

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} - f'''(x)\frac{h^3}{6} + \dots + (-1)f^n(\xi)\frac{h^n}{n!}, \quad \xi \in (x-h,x).$$
(2.36)

Se h é pequeno, podemos ignorar os termos de ordem superiores, pois esses valores são desprezíveis em relação a seus antecessores. Em particular, quando ignoramos todos os termos que envolvem  $h^2$  ou potências superiores de h, as equações 2.35 e 2.36, nos dão as seguintes aproximações para a derivada primeira f'(x):

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$
(2.37)

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x - h)}{h},$$
(2.38)

Se subtraímos a equação 2.35 da 2.36 obtemos a aproximação:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$
 (2.39)

De modo análogo, se ignoramos os termos que envolvem  $h^3$  ou potências superiores de h, então, somando a equação 2.35 e 2.36, obtemos uma aproximação da derivada segunda f''(x):

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$
(2.40)

Os membros à direita das equações 2.37, 2.38, 2.39 e 2.40 são chamados quocientes de diferenças. As expressões

- f(x+h) f(x),
- f(x) f(x h),
- f(x+h) f(x-h),
- f(x+h) 2f(x) + f(x-h),

são chamadas diferenças finitas. Especificamente, f(x+h) - f(x) é chamada diferença avançada, f(x) - f(x-h) é uma diferença retrógrada e f(x+h) - f(x-h) e f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) são ambas chamadas diferenças centrais (ZILL; CULLEN, 2001).

Como exemplo, aplicaremos os métodos de diferenças finitas na resolução da equação 2.12. Para tanto, tomaremos como base uma malha de discretização para a barra representada na figura 2.1, como segue:

Na figura 2.4 dividimos os intervalos [0, L] e intervalo [0, T] em m e n partes iguais, respectivamente, com m e  $n \in \mathbb{Z}_+^*$ . Assim, obtemos uma região retangular com linhas verticais e horizontais através de pontos com coordenadas  $(x_i, t_j)$  de modo que:  $x_i = ih$  e  $t_j = jk$ , para  $i = 0, 1, \dots, m$  e  $j = 0, 1, \dots, n$ , sendo  $h = \frac{L}{m}$  e  $k = \frac{T}{n}$  onde k representa o tamanho de passo no tempo e h o tamanho de passo no comprimento da barra. As linhas  $x = x_i$  e  $t = t_j$  são


Figura 2.4 – Malha de discretização da barra

chamadas linhas da grade e suas intersecções são os pontos malhas da grade. Para cada ponto malha do interior da grade usaremos a série de Taylor na variável x sobre  $x_i$  para gerar a fórmula de diferença central:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\epsilon_i, t_j),$$
(2.41)

onde  $\epsilon_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$ . E a série de Taylor em t sobre  $t_j$  para obter a fórmula de diferença avançada:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{k} - \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \eta_j), \qquad (2.42)$$

onde  $\eta_j \in (t_j, t_{j+1})$ 

Então para a equação diferencial 2.12 implica que para todo ponto interior da grade  $(x_i, t_j) \operatorname{com} i = 1, 2, \cdots, m-1$  e  $j = 1, 2, \cdots, n$  teremos:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = 0.$$
(2.43)

Logo o método de diferenças finitas aplicado na equação 2.43 nos leva a:

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{k} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} = 0,$$
(2.44)

onde  $w_{i,j}$  é uma aproximação para  $u(x_i, t_j)$ . Nesse caso temos cometido um erro de truncamento local que é dado por:

$$\tau_{i,j} = \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \eta_j) - \alpha^2 \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\epsilon_i, t_j).$$
(2.45)

Isolando o termo de  $w_{i,j+1}$  na equação 2.44 obtemos:

$$w_{i,j+1} = (1 - 2\lambda)w_{i,j} + \lambda(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}), \qquad (2.46)$$

para cada  $i = 1, 2, \dots, m-1$  e  $j = 1, 2, \dots, n \mod \lambda = \frac{\alpha^2 k}{h^2}$ . Com essas notações, a equação 2.46 pode ser aplicada em todos nós internos da malha, como apresentada na figura 2.4. Aplicando a condição inicial u(x, 0) = f(x) para  $0 \le x \le L$ , implica que  $w_{i,0} = f(x_i)$  para  $i = 0, 1, \dots, m$ , o que pode ser utilizado na equação 2.46 para se determinar todos valores da forma  $w_{i,j}$  para cada  $i = 1, 2, \dots, m-1$ . As condições adicionais u(0, t) = 0 e u(L, t) = 0implicam que  $w_{0,1} = w_{m,1} = 0$ , dessa forma todas os elementos do tipo  $w_{i,1}$  podem ser determinados. De modo análogo, com todas as aproximações  $w_{i,1}$  conhecidas, todos o elementos  $w_{i,2}, w_{i,3}, \dots, w_{i,n}$  podem ser determinados. Assim, o problema se resume a resolver um sistema com m-1 equações e m-1 variáveis o que pode ser associado a uma matriz  $(m-1) \times (m-1)$ sob a forma tridiagonal, como segue:

$$C = \begin{pmatrix} (1-2\lambda) & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & (1-2\lambda) & \lambda & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & (1-2\lambda) \end{pmatrix}$$
(2.47)

É interessante observar que dependendo dos valores de h e k a equação 2.46 será afetada. Por exemplo, se escolhermos  $\lambda = \frac{1}{2}$  o primeiro termo do lado direito se anula, o que implica o cálculo de  $w_{i,j+1}$  ser determinado pela média aritmética dos valores  $w_{i+1,j}$ ,  $w_{i-1,j}$ .

Por outro lado se fizermos

$$w_0 = (f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_{m-1}))^t$$
 (2.48)

e

$$w_j = (w_{1,j}, w_{2,j}, \cdots, w_{m-1,j})^t$$
 (2.49)

para cada  $j = 1, 2, \dots, n$ , então a solução aproximada é dada por  $w_j = Cw_{j-1}$  para cada  $j = 1, 2, \dots, n$  de modo que cada  $w_j$  pode ser determinado a partir de  $w_{j-1}$  por uma multiplicação de matriz. Este método é conhecido como método de diferenças progressivas ou avançadas. Se a solução da equação diferencial tiver quatro derivadas parciais contínuas em x e duas t, então a equação 2.45 implica que o método é de ordem  $O(k) + O(h^2)$ .

Para a solução aproximada da equação 2.12 por meio do método de diferenças finitas progressivas, equação 2.46, adotaremos um algoritmo retirado da literatura (BURDEN et al., 2011), que será útil para implementação de um programa em Matlab (apêndice A) para se

determinar a solução numérica da equação 2.12. Para fixar as idéias aqui expostas, vamos tomar o seguinte exemplo

**Exemplo 2.12.** *Considere uma placa de aço com 2cm de espessura com largura e comprimento indefinidos, como na figura 2.5.* 



Figura 2.5 – Placa retangular mantida temperatura nas extremidades 0°C

O problema consiste em verificar a distribuição de temperatura ao longo da barra. Como o comprimento e largura da barra são indefinidos para considerarmos o problema 1D, desprezamos o fluxo térmico na direção y e z de modo que podemos utilizar a equação 2.13. Assim, tomando os dados físicos para o aço:  $K = 0, 13cal/s.cm.^{\circ}C, c = 0, 11cal/g.^{\circ}C$  e  $\rho = 7, 8g/cm^3$ , considerando a distribuição inicial de temperatura em função da distância da extremidade da placa dada por  $u_0 = 100x$  para  $0 \le x < 1$  e  $u_0 = 100(2 - x)$  para  $1 \le x \le 2$ , e que nas fronteiras as temperaturas assumam os valores u(0, t) = 0 = u(2, t).

Para extraímos alguns resultados vamos subdividir a espessura da placa em intervalos h = 0,25 e h = 0,5, de modo a obtermos 8 e 4 subintervalos, respectivamente, com 10 passos de tempo em cada caso. Adotando um critério de convergência com o parâmetro  $\lambda = \frac{1}{2}$ , temos que o intervalo de tempo será dado por

$$\frac{\alpha^2 k}{h^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{h^2}{2\alpha^2} \tag{2.50}$$

Os resultados numéricos podem ser vistos nas tabelas 2.1 e 2.2. Para critério de comparação, o problema possui solução analítica dada por:

$$u(x,t) = 800 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 (2n+1)^2} \cos \frac{(2n+1)\pi (x-1)}{2} e^{-0.3738(2n+1)^2 t}$$
(2.51)

A tabela 2.1 nos mostra que os valores das temperaturas são simétricos com relação ao ponto médio, isso indica que a temperatura é distribuída no interior da placa de forma simétrica com relação ao seu eixo médio. Tal distribuição permanece simétrica para o caso h = 0, 5, o que pode ser visualizado na tabela 2.2. No entanto, uma visão mais comparativa e detalhada da convergência da solução pode ser vista nas figuras 2.6 e 2.7.

t(s)	x=0	x=0,25	x=0,5	x=0,75	x=1,0	x=1,25	x=1,5	x=1,75	x=2,0
0,0000	0	25,0000	50,0000	75,0000	100,0000	75,0000	50,0000	25,0000	0
0,2062	0	25,0000	50,0000	75,0000	75,0000	75,0000	50,0000	25,0000	0
0,4125	0	25,0000	50,0000	62,5000	75,0000	62,5000	50,0000	25,0000	0
0,6187	0	25,0000	43,7500	62,5000	62,5000	62,5000	43,7500	25,0000	0
0,8250	0	21,8750	43,7500	53,1250	62,5000	53,1250	43,7500	21,8750	0
1,0312	0	21,8750	37,5000	53,1250	53,1250	53,1250	37,5000	21,8750	0
1,2375	0	18,7500	37,5000	45,3125	53,1250	45,3125	37,5000	18,7500	0
1,4437	0	18,7500	32,0312	45,3125	45,3125	45,3125	32,0312	18,7500	0
1,6500	0	16,0156	32,0312	38,6718	45,3125	38,6718	32,0312	16,0156	0
1,8562	0	16,0156	27,3437	38,6718	38,6718	38,6718	27,3437	16,0156	0

Tabela 2.1 –	Resultado	da equaçã	o do calor	para $h=0.25$
100010 2.1	nesunau	uu equuçu	lo uo cuioi	puru n=0,23

Tabela 2.2 – Resultado da equação do calor para h=0,5

t(s)	x=0	x=0,5	x=1,0	1,5	2,0
0,000	0	50,000	100,000	50,000	0
0,825	0	50,000	50,000	50,000	0
1,650	0	25,000	50,000	25,000	0
2,475	0	25,000	25,000	25,000	0
3,300	0	12,500	25,000	12,500	0
4,125	0	12,500	12,500	12,500	0
4,950	0	6,250	12,500	6,250	0
5,775	0	6,250	6,250	6,250	0
6,600	0	3,125	6,250	3,125	0
7,425	0	3,125	3,125	3,125	0

As tabelas 2.3 e 2.4 nos mostram os valores do erro de aproximação da solução a cada instante de tempo para h = 0, 5 e h = 0, 25, respectivamente.

t(s)	x=0	x=0,5	x=1,0	1,5	2,0
0,000	-2,73e-16	-1,43e-05	0,020	-1,43e-05	-2,73e-16
0,825	-3,54e-15	8,290	-10,110	8,290	-3,54e-15
1,650	-2,6e-15	-5,910	6,220	-5,910	-2,67e-15
2,475	-1,96e-15	2,270	-7,140	2,280	-1,97e-15
3,300	-1,44e-15	-4,190	1,390	-4,190	-1,44e-15
4,125	-1,06e-15	0,240	-4,840	0,240	-1,07e-15
4,950	-7,80e-16	-2,760	-0,240	-2,760	-7,80e-16
5,775	-5,73e-16	-0,370	-3,110	-0,370	-5,73e-16
6,600	-4,21e-16	-1,740	-0,630	-1,740	-4,21e-16
7,425	-3,09e-16	-0,450	-1,930	-0,450	-3,09e-16

Tabela 2.3 – Erro cometido no processo de aproximação para h=0,5

t(s)	x=0	x=0,25	x=0,5	x=0,75	x=1,0	x=1,25	x=1,5	x=1,75	x=2,0
0,0000	-2,73e-16	-7,74e-06	-1,43e-05	-1,86e-05	0,0200	-1,86e-05	-1,43e-05	-7,74e-06	-2,73e-16
0,2062	-3,89e-15	0,0100	0,4200	4,1600	-5,0500	4,1600	0,4200	0,0100	-3,89e-15
0,4125	-3,86e-15	0,4300	2,5100	-2,5200	3,2100	-2,5200	2,5100	0,4300	-3,86e-15
0,6187	-3,73e-15	1,4100	-0,9300	2,6500	-2,9500	2,6500	-0,9300	1,4100	-3,73e-15
0,8250	-3,54e-15	-0,3900	2,0400	-2,1000	2,3900	-2,1000	2,0400	-0,3900	-3,54e-15
1,0312	-3,32e-15	1,0400	-1,2800	2,0800	-2,2800	2,0800	-1,2800	1,0400	-3,32e-15
1,2375	-3,09e-15	-0,6500	1,5100	-1,8900	1,9500	-1,8900	1,5100	-0,6500	-3,09e-15
1,4437	-2,88e-15	0,7300	-1,3300	1,6300	-2,0100	1,6300	-1,3300	0,7300	-2,88e-15
1,6500	-2,67e-15	-0,6900	1,1200	-1,7600	1,5300	-1,7600	1,1200	-0,6900	-2,67e-15
1,8562	-2,48e-15	0,5300	-1,2800	1,2500	-1,8400	1,2500	-1,2800	0,5300	-2,48e-15

Tabela 2.4 – Erro cometido no processo de aproximação para h=0,25

A figura 2.6 apresenta uma comparação entre as curvas de temperatura em função do tempo para quatro posições diferentes (x = 1, 0cm, x = 0, 75cm, x = 0, 5cm, x = 0, 25cm) no interior da placa, pela solução numérica e analítica. Pode-se observar que nos pontos de maior temperatura, houve uma pertubação da solução numérica com relação a solução analítica, por outro lado nos pontos onde a distribuição de temperatura é menor, a solução numérica se aproxima melhor da solução analítica.



Figura 2.6 – Distribuição de temperatura em uma placa para um passo h=0.25.

A figura 2.7 de forma similar a figura 2.6, apresenta uma comparação entre as curvas de temperatura em função do tempo, entretanto para duas posições distintas no interior da placa. Observa-se que no ponto médio das temperaturas e nos pontos imediatamente abaixo, a solução numérica diverge da analítica tendendo a convergir a medida que o passo de tempo aumenta.

Para uma comparação da solução em função da posição (espaço), podemos visualizar as figuras 2.8 e 2.9. Comparando os resultados nas figuras 2.6 e 2.8, observamos pequenas oscilações dos resultados numéricos com relação aos resultados analíticos. Por outro lado, comparando as figuras 2.7 e 2.9 observamos que as oscilações apresentaram uma maior variação.



Figura 2.7 – Distribuição de temperatura em uma placa para um passo h=0.5.

Isso significa que quanto menor for o valor de  $h (h \rightarrow 0)$  para uma malha mais fina melhor será a solução numérica, diminuindo o erro de convergência.



Figura 2.8 – Variação da temperatura em função da posição para h=0,25.



Figura 2.9 – Variação da temperatura em função da posição para h=0,5.

Neste capítulo, discutimos o embasamento teórico que nortearão o desenvolvimento de nosso trabalho. No capítulo que segue iremos apresentar o modelo matemático que adotado uma correlação com o modelo físico de difusão de calor que nos permitirá compreender o processo de transmissão de conhecimento em um grupo de pesquisadores aqui denominada cadeia do conhecimento.

# **3 O MODELO MATEMÁTICO: UMA REPRESENTAÇÃO UNIDIMENSIONAL E TRANSIENTE**

O modelo que será aqui apresentado será aquele proposto pelos autores (BEVILACQUA et al., 2009), o qual considera os processos de transferência e geração de novos conhecimentos. Assim, será possível simular o processo de transferência/transmissão de conhecimento em uma cadeia científica.

Compartilhando das ideias de Bulnes (2006) a cadeia de conhecimento pode ser considerada como um conjunto finito visto que podemos nos limitar a um tipo específico de conhecimento, isto é, um subconjunto restrito do meio social com um tipo específico de conhecimento. Nesse sentido, a cadeia de conhecimento é composta por diversas subcadeias de conhecimento que vão desde o processo inicial de produção científica até a produção industrial passando pelas ciências aplicadas, pelo desenvolvimento das tecnologias e pelo processo de fabricação.

Na atual sociedade, a transferência ou compartilhamento de conhecimento tem se mostrado a base dos pilares para o processo de desenvolvimento social e tecnológico. Podemos pensar a transferência de conhecimento em um bloco (grupo) de pesquisadores, como a disseminação de uma doença em determinado ambiente infectando todos os indivíduos do grupo, em nosso caso, o compartilhamento de cada elemento do grupo com seus vizinhos/arestas do bloco até que todos os elementos detenham desse conhecimento.

Desde o surgimento da ciência moderna no século XVII o progresso e desenvolvimento das sociedades tem crescido de forma acentuada. A história da ciência tem nos mostrado o papel catalisador que esta tem vindo a desempenhar na construção, transmissão e validação de novos conhecimentos. A ciência tem permitido potenciar e ampliar a capacidade humana na percepção e compreensão de novos recursos que sustentam e erguem o seu desenvolvimento. Nesse sentido, Pereira (2006) compartilha suas ideias:

Com a entrada na era da informação e do conhecimento e as consequentes mudanças na sociedade (e.g, globalização, sociedade em rede, aumento da complexidade e intensidade dos estímulos à mudança dos sistemas sociais, econômicos e ambientais), tornou-se necessário refletir o papel da ciência sob uma perspectiva mais sistêmica. Neste contexto, a complexidade dos sistemas de produção de conhecimento científico e inovação, bem como o seu nível de entrosamento na sociedade em geral sugere uma gestão integrada e estratégica da ciência. Atualmente "fazer ciência" consiste não só em produzir novo conhecimento, mas simultaneamente difundir, disseminar e usar o conhecimento e inovação.

A disseminação, difusão e transferência de conhecimento científico e outros tópicos relacionados, tais como a divulgação dos resultados científicos em artigos, papers, dissertações, teses e patentes, dentre outros, constituem componentes estruturantes da atual política de desenvolvimento científico. Para Bulnes (2006) o meio social do ponto de vista do estudo do conhecimento admite uma certa homogeneidade, de modo que o processo de transferência de conhecimento seja sequencial, de forma que cada subcadeia ou célula de conhecimento, comunica-se exclusivamente com as células vizinhas e estas, com as células imediatamente adjacentes. Essa comunicação entre células de conhecimento pode ser esquematizada em um bloco (conjunto de conhecimento) como mostra a figura 3.1



Figura 3.1 - Comunicação das Células de Conhecimento

Pensando um grupo de detentores do saber como uma célula do conhecimento, fazendo uma comparação com a condução de temperatura em que uma quantidade da mesma é transferida de determinada região de um meio com maior quantidade para outra de menor quantidade, o conhecimento em determinadas células com certo nível de conhecimento se transmitirá para células com menor nível de conhecimento, sendo proporcional ao desnível entre células adjacentes. Podemos pensar matematicamente o fluxo proporcional ao gradiente de conhecimento, tomando como razão de proporcionalidade a permeabilidade do meio social à difusão do conhecimento.

## 3.1 FORMULAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO

A correlação entre o modelo de transferência de calor e de transferência de conhecimento é estabelecida identificando-se o significado dos parâmetros na equação do calor, em face às definições dos processos de transferência de calor e difusão do conhecimento, representando a permeabilidade do meio social na transmissão de conhecimento através dos segmentos que compõem a cadeia de conhecimento (BULNES, 2006). Aqui, faremos algumas modificações, acrescentando alguns termos, no modelo de transferência de calor gerando um modelo matemático para simular a dinâmica de transferência, difusão, geração e propagação de conhecimento. Feita essas complementações obtemos um modelo bidimensional e transiente, como segue:

$$c_p \frac{\partial u}{\partial t} - \lambda K_1 \nabla^2 u + \lambda (1 - \lambda) K_2 \nabla^4 u + ru = 0$$
(3.1)

Com o objetivo de facilitar a análise, nos limitaremos a forma unidimensional(1D) e transiente do modelo, então a equação 3.1 pode ser reescrita como:

$$c_p \frac{\partial u}{\partial t} - \lambda K_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda (1 - \lambda) K_2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + ru = 0$$
(3.2)

onde a função u(x,t) representa a energia de produção de conhecimento ou a densidade de conhecimento em cada ponto x em um dado instante t. Esta função é também a medição da variação de conhecimento no tempo em cada uma das células da cadeia, onde:

- λ representa a taxa de transferência de conhecimento entre pesquisadores (grupos) de uma cadeia de pesquisa;
- $r = \sigma c_0$  representa a taxa de geração de conhecimento, isto é, criatividade;
- c<sub>0</sub> este parâmetro reflete a criatividade inerente aos grupos de indivíduos na cadeia. Ele traduz a quantidade de conhecimento produzido;
- σ este parâmetro está relacionado aos investimentos e incentivos para maximizar a saída de conhecimento de cada segmento da cadeia produtiva;
- c<sub>p</sub> representa a impedância cognitiva. Quanto menor for c<sub>p</sub> maior será a capacidade de uma célula absorver conhecimento;
- *K*<sub>1</sub> representa o coeficientes de permeabilidade cognitiva, seus valores controlam o fluxo de conhecimento na cadeia;
- K<sub>2</sub> representa o coeficiente de retenção cognitiva, ou retro aprendizado. Assim como K<sub>1</sub> seus valores controlam o fluxo de conhecimento na cadeia, a medida que seus valores crescem, crescem também o nível de conhecimento em toda a cadeia, isto é, o aprendizado de um pesquisador com outro a partir do conhecimento transferido pelo primeiro;
- x representa a coordenada espacial enquanto t a coordenada temporal (BEVILACQUA et al., 2009).

A obtenção de uma solução específica u(x,t) que satisfaça a equação 3.2 pressupõe o conhecimento de algumas condições, a saber:

• Da condição inicial no instante t = 0:

$$u(x,0) = u_0, \quad \forall x \in [0,L].$$
 (3.3)

- Das condições de contorno na fronteira da cadeia. Neste trabalho vamos considerar essas condições de dois tipos:
- 1. Condição de contorno do tipo Dirichlet:

$$u(0,t) = u_0(t), \ \forall t \in [0,T] u(L,T) = u_L(t).$$
(3.4)

2. Condição de contorno de Newman:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = f(t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=L} = g(t), \ \forall t \in [0,T].$$
(3.5)

Onde  $f(t) \in g(t)$  representam os fluxos de conhecimento nas extremidades da cadeia.

A condição de contorno do tipo Dirichlet significa que as fronteiras da cadeia de conhecimento são controladas por fatores externos, de modo a manter o índice de produtividade constante nas extremidades da cadeia.

Se essa extremidade é por exemplo, representada por um setor de pesquisa, pode-se imaginar que a quantidade de informações contidas nas publicações mantém a produção científica em um certo nível  $u_0$ . Se considerarmos a outro extremidade como representativa de um setor de produção, então  $u_1$  pode ser vista como uma exigência de manutenção da produção final em um nível constante. (BUL-NES, 2006).

# 3.2 FORMULAÇÃO EM DIFERENÇAS FINITAS

Considerando problema 3.2 nas variáveis independentes x e t definidas nos intervalos [0, L] e [0, T], respectivamente, sendo suas soluções pertencentes ao plano cartesiano xt de modo que formem um conjunto de pontos  $(ih, j\Delta t)$  para  $0 \le i \le n_p e 0 \le j \le n_t$ . Então o objetivo é buscar em cada nível de tempo j um vetor  $u_j = (u_{0,j}, \ldots, u_{n_p,j})$  que contenha a densidade de conhecimento em todos os pontos (bloco) da cadeia, este método é chamado de método explícito. Uma representação discreta para o domínio do problema é visualizado na figura 3.2.



Figura 3.2 – Região retangular de pontos no plano xt

Em diferenças finitas centradas de segunda e quarta ordens na variável espacial x e diferenças progressiva para a variável temporal t, e embasado nas expressões para derivadas obtido na seção 2.2.3 obtemos as seguintes aproximações:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} + O(\Delta t),$$
(3.6)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} + O(h^2), \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \frac{u_{i+2,j} - 4u_{i+1,j} + 6u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{h^4} + O(h^4), \tag{3.8}$$

onde  $O(\Delta t), O(h^2), O(h^4)$  representam a ordem do erro obtidos mediante a aproximação da série de Taylor.

Substituindo as aproximações 3.6, 3.7, 3.8 em seus termos da equação 3.2 obtemos:

$$c_{p} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} - \lambda K_{1} \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^{2}} + \lambda (1-\lambda) K_{2} \frac{u_{i+2,j} - 4u_{i+1,j} + 6u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{h^{4}} + r u_{i,j} = 0,$$
(3.9)

isolando o termo da variação temporal obtemos:

$$c_{p} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} = \lambda K_{1} \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^{2}} \\ - \lambda (1-\lambda) K_{2} \frac{u_{i+2,j} - 4u_{i+1,j} + 6u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{h^{4}} - ru_{i,j},$$
(3.10)

resolvendo a expressão acima para o termo  $u_{i,j+1}$  temos:

$$u_{i,j+1} = (1 - 2\alpha - 6\beta - \delta)u_{i,j} + (\alpha + 4\beta)(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) - \beta(u_{i-2,j} + u_{i+2,j}), \quad (3.11)$$

para  $i = 2, \ldots, (n_{p-2}), j = 0, 1, 2, \ldots, n_t$ . Sendo  $\alpha = \frac{\Delta t \lambda K_1}{c_p h^2}, \beta = \frac{\Delta t \lambda (1-\lambda) K_2}{c_p h^4}, \delta = r \frac{\Delta t}{c_p}$ .

Para resolução numérica da equação 3.11, determina-se o valor futuro  $u_{i,j+1}$  a partir dos valores conhecidos no tempo  $t_j$ . Isso significa que para sua solução precisamos dos valores a *priori* não somente das condições de contorno em x, como também das condições iniciais em  $t = t_0$ .

O segundo termo da equação 3.11 só depende dos valores de u conhecidos no tempo j. A partir dela podemos calcular os valores de  $u_{i,j}$ . Adotando o caso mais simples para condição de Dirichlet, quando j = 0 os valores  $u_{i,0} = u(x_i, t_0)$  são dados pela condição inicial. Avaliando todos blocos  $x_i$  internos na cadeia no tempo j encontramos a solução em todos os pontos da malha.

A discretização 3.11 juntamente com as condições iniciais e de contorno do tipo Dirichlet nos fornece:

$$u(x,0) = u_0, \quad x \in (0,L),$$
  
$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t \in (0,T)$$

Introduzindo uma notação vetorial para u, obtemos:

$$u_{j=0} = (u_0(x_1), u_0(x_2), \dots, u_0(x_{n_{p-2}}))^T,$$
(3.12)

e

$$u_j = (u_{2,j}, u_{3,j}, \dots, u_{n_{p-2},j})^T.$$
 (3.13)

Então, para cada instante de tempo j e pelas condições iniciais e de contorno, o valor de u pode ser escrito na forma matricial:

$$u_{j+1} = Au_j, \quad j = 0, 1, \dots, n_t,$$
(3.14)

de modo que  $u_{j+1}$  é obtido a partir de  $u_j$  mediante uma simples multiplicação por matrizes. Sendo a matriz A de ordem  $(n_p - 2) \times (n_p - 2)$  representada por:

$$A = \begin{pmatrix} \rho & \omega & -\beta & & \\ \omega & \rho & \omega & -\beta & & \\ -\beta & \omega & \rho & \omega & -\beta & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & -\beta \\ & & -\beta & \omega & \rho & \omega \\ & & & -\beta & \omega & \rho \end{pmatrix}$$
(3.15)

para  $\rho = (1 - 2\alpha - 6\beta - \delta)$  e  $\omega = (\alpha + 4\beta)$  que foram introduzidos para não sobrecarregar a escrita da matriz.

Assim, introduzindo os vetores ,  $u_j = (u(x_0, t_j), u(x_1, t_j), \dots, u(x_{n_p-2}, t_j))^T$ ,  $\tau_j = (\tau_{0,j}, \tau_{1,j}, \dots, \tau_{n_p-2,j})^T$  e  $e_j = (e_{0,j}, e_{1,j}, \dots, e_{n_p-2,j})^T$  para representarem , respectivamente, a solução exata quando esta existir, o erro de truncamento local e o erro global (FRANCO, 2006) de aproximação. Podemos reescrever a equação 3.14 para estimativa de erro na análise de convergência como sendo:

$$u_{j+1} = Au_j + \tau_j \tag{3.16}$$

Subtraindo a equação 3.14 de 3.16, obtemos a equação vetorial para descrever o erro global:

$$\underbrace{u_{j+1} - u_{j+1}^{e}}_{e_{j+1}} = Ae_{j} - u_{j+1}^{e}$$
$$= A\underbrace{(e_{j} - u_{j}^{e})}_{e_{j}} + \tau_{j}$$

para  $Ae_j^e = u_{j+1}^e$ . Logo,

$$e_{j+1} = Ae_j + \tau_j. (3.17)$$

Aplicando essa equação, recursivamente, para os valores de j, (j - 1), ..., 0, obtemos:

$$e_{j+1} = A^{j+1}e_0 + A^j\tau_0 + A^{j-1}\tau_1 + \ldots + A\tau_{j-1} + \tau_j$$
$$= A^j\tau_0 + A^{j-1}\tau_1 + \cdots + A\tau_{j-1} + \tau_j$$

Tomando por construção  $e_0 = 0$ . Pode-se observar que o erro global é gerado pelo acúmulo dos erros de trucamento e de aproximação numérica, erros locais, de cada passo de tempo, propagados pela evolução da construção da solução aproximada, e pelas potências da matriz A. Essa matriz tem um papel fundamental na propagação destes erros e é chamada de matriz de amplificação. O erro cresce se algum autovalor de A tem módulo maior que 1. Se todos tem módulo menor que 1, temos o erro decrescendo e, portanto, estabilidade (FRANCO, 2006).

#### 3.2.1 Método implícito: O método de Crank-Nicolson

Diferente do método explícito, buscamos em cada nível de tempo j + 1 um vetor  $u_{j+1} = (u_{0,j+1}, \ldots, u_{n_p,j+1})$  que contenha a densidade de conhecimento em todos os pontos (bloco) da cadeia. Tanto o método explícito quanto o método implícito nos fornecem um erro de truncamento da ordem de  $O(\Delta t) + O(h^2)$ , entretanto, o método de Crank-Nicolson reduz a dependência do incremento do tempo de  $O(\Delta t)$  para  $O(\Delta t)^2$ , tomando a aproximação das derivadas no ponto médio do incremento de tempo da seguinte forma:

• em relação ao tempo —> diferenças finitas centradas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

• em relação ao espaço  $\longrightarrow$  a média entre as aproximações nos tempos  $j \in j + 1$ 

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} + \frac{u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}}{h^2} \right] + O(h^2),$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \frac{1}{2} \left[ \frac{u_{i+2,j} - 4u_{i+1,j} + 6u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{h^4} \right] \\
+ \frac{1}{2} \left[ \frac{u_{i+2,j+1} - 4u_{i+1,j+1} + 6u_{i,j+1} - 4u_{i-1,j+1} + u_{i-2,j+1}}{h^4} \right] + O(h^2)$$

De modo que procedendo com as operações como no caso explícito obtemos a seguinte expressão:

$$(1 + 2\alpha + 6\beta)u_{i,j+1} - (\alpha + 4\beta)(u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j+1}) + \beta(u_{i-2,j+1} + u_{i+2,j+1})$$
  
=  $(1 - 2\alpha - 6\beta - \sigma)u_{i,j} + (\alpha + 4\beta)(u_{i-1,j} + u_{i+1,j})$   
 $- \beta(u_{i-2,j+1} + u_{i+2,j+1}),$ 

para  $\alpha = \frac{\lambda K_1 \Delta t}{2c_p \Delta x^2}, \beta = \frac{\lambda (1 - \lambda) K_2 \Delta t}{2c_p \Delta x^4}$  e  $\sigma = \frac{r \Delta t}{c_p}$  que pode ser reescrita como:

$$\rho u_{i,j+1} - \eta (u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j+1}) + \beta (u_{i-2,j+1} + u_{i+2,j+1})$$
  
=  $\omega u_{i,j} + \eta (u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) - \beta (u_{i-2,j} + u_{i+2,j}),$  (3.18)

sendo

$$\rho = (1 + 2\alpha + 6\beta), \ \eta = (\alpha + 4\beta), \ \omega = (1 - 2\alpha - 6\beta - \sigma).$$
(3.19)

A discretização 3.18 juntamente com as condições iniciais e de contorno do tipo Dirichlet nos fornece, para cada instante de tempo j + 1 o valor de u, que pode ser escrito na forma de um sistema matricial:

$$Bu_{j+1} = Cu_j, \ j = 0, 1, \dots, n_t.$$
 (3.20)

onde as matrizes  $B \in C$  são representadas abaixo:

$$B = \begin{pmatrix} \rho & -\eta & \beta & & \\ -\eta & \rho & -\eta & \beta & \\ \beta & -\eta & \rho & -\eta & \beta & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \beta \\ & & \beta & -\eta & \rho & -\eta \\ & & & \beta & -\eta & \rho \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \omega & \eta & -\beta & & \\ \eta & \omega & \eta & -\beta & \\ -\beta & \eta & \omega & \eta & -\beta & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & -\beta \\ & & -\beta & \eta & \omega & \eta \\ & & & -\beta & \eta & \omega \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

o sistema 3.20 pode ser resolvido por uma inversão de matrizes, de modo que teremos que resolver a equação:

$$u_{j+1} = B^{-1} C u_j. ag{3.22}$$

Logo, para  $j = 0, 1, \ldots, n_t$  teremos:

$$u_{1} = B^{-1}Cu_{0}$$

$$u_{2} = B^{-1}Cu_{1} = (B^{-1}C)^{2}u_{0}$$

$$u_{3} = B^{-1}Cu_{2} = (B^{-1}C)^{3}u_{0}$$

$$\vdots$$

$$u_{n_{t}} = (B^{-1}C)^{n_{t}}u_{0}$$

Assim como no método explícito teremos estabilidade do método se  $|\gamma| < 1$ , para todo autovalor  $\gamma$  da matriz  $B^{-1}C$ .

## 3.3 ESTABILIDADE E CONSISTÊNCIA DO MDF

Aplicado o MDF ao nosso problema faz-se necessário verificar se o método é "consistente", para isso verifica-se de fato a equação 3.11 representa o fenômeno descrito pela equação 3.2. Sendo o método consistente, aplicaremos Teorema da Equivalência de Lax<sup>1</sup> para se determinar quais as condições em que a solução numérica se aproxima da solução exata, ou seja, sua estabilidade. O teorema de Lax nos garante a convergência a partir da estabilidade e consistência das equações de diferenças finitas. Muitas destas equações de Diferenças Finitas são classificadas como condicionalmente estáveis, ou seja, precisam satisfazer algumas condições para garantir a estabilidade, então é necessário adequar os parâmetros para espaçamento da malha e/ou incremento na variável de tempo para que não se produza soluções incoerentes.

Os critérios de estabilidade nos ajuda a evitar a propagação de erros durante os cálculos. Os métodos numéricos são classificados como:

- Condicionalmente estáveis: precisam satisfazer uma condição de estabilidade para que as soluções numéricas sejam estáveis;
- Incondicionalmente estáveis: não precisam de condições para que as soluções numéricas sejam estáveis;
- Incondicionalmente instáveis: Não existe critérios que torne as soluções numéricas estáveis.

Uma vez que o método seja consistente e estável podemos então aplicá-lo. Neste momento precisamos definir o tamanho do passo da variável independente,  $\Delta x = h$ . Quanto menor for h, mais cálculo precisaremos fazer, ou seja, o tempo computacional será maior. Por outro lado quanto maior h, a princípio, menor será a precisão da solução. Então devemos usar o menor hque nos dá uma precisão dentro dos limites desejados e da capacidade computacional disponível.

Denotaremos por U = U(x,t) como sendo a solução exata para o problema 3.2 com condição de Dirichlet e por  $u = u_{i,j} = u(i\Delta x, j\Delta t)$  sua solução aproximada dada pelo esquema

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Um método numérico consistente para uma equação diferencial cujo PVI é bem posto é convergente se e somente se é estável.

de diferenças finitas 3.11, sendo a solução exata definida em todo o domínio  $[0, L] \times [0, T]$ , enquanto que a solução aproximada só existe nos pontos da malha  $\{x_0, \ldots, x_{n_p}\} \times \{t_0, \ldots, t_{n_t}\}$ . Portanto, para uma análise da convergência faz-se necessário uma comparação da solução aproximada com a exata apenas nos pontos da malha. Para efetuar tal comparação denotemos  $U_{i,j} = U(x_i, t_j)$ , ou seja os valores da solução exata em cada ponto da malha.

Quando afirmamos que uma solução aproximada é uma boa aproximação da solução exata significa dizer que

$$\left\|U - u\right\|_{\infty} < \epsilon$$

onde  $\epsilon$  é uma tolerância especificada e a norma utilizada é a norma do sup (ou do máximo) definida como

$$||z||_{\infty} = \max\{|z_{i,j}| : 0 \le i \le n_p, 0 \le j \le n_t\}.$$

Nesse sentido, quando afirmamos que um esquema de diferenças finitas é convergente estamos assumido que  $u_{i,j}$  converge para  $U(x_i, t_j)$  quando  $(i\Delta x, j\Delta t) \rightarrow (x, t)$ , a medida que os valores de  $\Delta t$  e  $\Delta x$  se aproximam de zero. Daí, levando-se em conta aproximação em série de Taylor temos as seguinte expressões

$$\frac{\partial U_{i,j}}{\partial t} = \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{\Delta t} + O(\Delta t), \qquad (3.23)$$

$$\frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}}{h^2} + O(h^2), \tag{3.24}$$

$$\frac{\partial^4 U_{i,j}}{\partial x^4} = \frac{U_{i+2,j} - 4U_{i+1,j} + 6U_{i,j} - 4U_{i-1,j} + U_{i-2,j}}{h^4} + O(h^2), \tag{3.25}$$

onde os erros cometidos pelo truncamento da série de Taylor são

$$\epsilon_1 = -\frac{\partial^2 U(\xi_i^1)}{\partial t^2} \frac{\Delta t}{2}$$
$$\epsilon_2 = -\alpha \frac{\partial^4 U(\xi_i^2)}{\partial x^4} \frac{h^2}{12}$$
$$\epsilon_3 = -\beta \frac{\partial^6 U(\xi_i^3)}{\partial x^6} \frac{h^2}{360}$$

os quais  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  e  $\epsilon_3$  representam o erro de trucamento na aproximação de diferenças finitas para primeira derivada temporal, segunda e quarta derivada espacial, respectivamente. Estes valores tem como principal objetivo medir o quanto a equação diferencial calculada nos pontos da malha deixa de satisfazer a equação de diferenças finitas. Nesse sentido temos um erro de truncamento local dado por

$$\tau_{i,j} = -\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \alpha \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \beta \frac{h^2}{360} \frac{\partial^6 U}{\partial x^6}.$$
(3.26)

Se designarmos U como a solução do problema substituímos as expressões acima em 3.2 e obtemos

$$c_{p} \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{\Delta t} - \lambda K_{1} \frac{U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}}{h^{2}} + \lambda (1-\lambda) K_{2} \frac{U_{i+2,j}^{h^{2}} - 4U_{i+1,j} + 6U_{i,j} - 4U_{i-1,j} + U_{i-2,j}}{h^{4}} + rU_{i,j} + O(\Delta t) + O(h^{2}) = 0,$$
(3.27)

multiplicando ambos os membros da equação 3.28 por  $\Delta t$  obtemos

$$c_{p}(U_{i,j+1} - U_{i,j}) - \Delta t \lambda K_{1} \frac{U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}}{h^{2}} + \Delta t \lambda (1 - \lambda) K_{2} \frac{h^{2}}{U_{i+2,j} - 4U_{i+1,j} + 6U_{i,j} - 4U_{i-1,j} + U_{i-2,j}}{h^{4}}$$
(3.28)  
+  $r \Delta t U_{i,j} + O(\Delta t^{2}) + O(h^{2} \Delta t) = 0,$ 

resolvendo a expressão acima para o termo  $U_{i,j+1}, \, {\rm temos:}$ 

$$U_{i,j+1} = (1 - 2\alpha - 6\beta - \delta)U_{i,j} + (\alpha + 4\beta)(U_{i-1,j} + U_{i+1,j}) - \beta(U_{i-2,j} + U_{i+2,j}) + \frac{1}{c_p}O(\Delta t^2) + \frac{1}{c_p}O(h^2\Delta t),$$
sendo  $\alpha = \frac{\Delta t\lambda K_1}{c_p h^2}, \beta = \frac{\Delta t\lambda (1 - \lambda)K_2}{c_p h^4}, \delta = r\frac{\Delta t}{c_p}.$ 
(3.29)

Denotamos por  $z_{i,j} = U_{i,j} - u_{i,j}$  e subtraindo a expressão 3.29 de 3.11 obtemos:

$$z_{i,j+1} = (1 - 2\alpha - 6\beta - \delta)z_{i,j} + (\alpha + 4\beta)(z_{i-1,j} + z_{i+1,j}) - \beta(z_{i-2,j} + z_{i+2,j}) + \frac{1}{c_p}O(\Delta t^2) + \frac{1}{c_p}O(h^2\Delta t).$$
(3.30)

Mostraremos que o método é convergente sempre que

$$(1 - 2\alpha - 6\beta - \delta) \ge 0,$$

isto é,

$$\alpha + 3\beta + \frac{1}{2}\delta \le \frac{1}{2}.$$

Utilizando a desigualdade de Poincaré 4.3, podemos reescrever a equação 3.30 como segue

$$z_{i,j+1} = |(1-\delta)| z_{i,j} + \alpha(z_{i-1,j} - 2z_{i,j} + z_{i+1,j}) + \beta(4(z_{i-1,j} + z_{i+1,j}) - 6z_{i,j}) - (z_{i-2,j} + z_{i+2,j}) + C(\Delta t^2 + h^2 \Delta t).$$

Logo,

$$z_{i,j+1} \le |1 - \delta| \|z_j\|_{\infty} + C(\Delta t^2 + h^2 \Delta t)$$

onde C é uma constante positiva. Como i é arbitrário temos que

$$||z_{j+1}||_{\infty} \le |1 - \delta| ||z_j||_{\infty} + C(\Delta t^2 + h^2 \Delta t).$$
(3.31)

Aplicando esta desigualdade repetidas vezes obtemos

$$\begin{aligned} \|z_{j+1}\|_{\infty} &\leq \|1-\delta\| \|z_{j}\|_{\infty} + C(\Delta t^{2} + h^{2}\Delta t) \\ &\leq \|1-\delta\| (\|1-\delta\| \|z_{j-1}\|_{\infty} + C(\Delta t^{2} + h^{2}\Delta t)) + C(\Delta t^{2} + h^{2}\Delta t) \\ &\vdots \\ &\leq \|1-\delta\|^{j+1} \|z_{0}\|_{\infty} + C(\Delta t^{2} + h^{2}\Delta t) (\sum_{i=0}^{j} |1-\delta|^{i}). \end{aligned}$$

Como pela condição inicial do problema  $||z_0||_{\infty} = 0$  temos que

$$\|z_{j+1}\|_{\infty} \le C\Delta t (\Delta t + h^2) (\sum_{i=0}^{j} |1 - \delta|^i),$$
(3.32)

mas a série  $(\sum_{i=0}^{j} |1-\delta|^i)$  é convergente, logo

$$\left\|z_{j+1}\right\|_{\infty} \to 0 \tag{3.33}$$

quando  $h, \Delta t \to 0$ .

Portanto, concluímos que o método explícito de diferenças finitas é consistente. Logo, verifica-se pelas condições do teorema de equivalência de Lax sendo ainda que o erro global é de 2ª ordem garante a estabilidade do método, logo é convergente, ou melhor, condicionalmente convergente.

### 3.3.1 Critério de Von Neumann

Na seção 3.3 foi estudado o nível de confiabilidade do método de Diferenças Finitas em sua forma explícita, o qual chegamos a conclusão que tal método é condicionalmente estável, ou seja, para se obter bons resultados é necessário que o mesmo satisfaça a condição de estabilidade 3.32.

Em analogia ao critério explícito, iremos verificar a estabilidade para o método de Crank-Nicolson. Para tanto, tomaremos como suporte um critério muito utilizado para verificação de estabilidade em métodos implícitos, denominado critério de Von Neumann. Este critério é um procedimento no qual a solução da equação de diferenças finitas é expandida em série de Fourier, tais que os valores iniciais sejam expressos nos pontos da malha ao longo de t = 0, tomando como alicerce o princípio da superposição, isto é, o erro global é visto como a soma de erros mais simples, em nosso caso, erros de truncamento local.

O ponto forte de se utilizar séries de Fourier é que as mesmas podem ser expressas em termos de senos, cossenos a exponenciais complexa, o que facilita os cálculos. Assim, suponhamos que o erro global  $(E_j)$  em cada ponto da malha ao longo da primeira linha t = 0possa ser expresso como:

$$E_{j} = \sum_{j=0}^{N} a_{j} \cos(\frac{j\pi x}{L}),$$
(3.34)

ou

$$E_j = \sum_{j=0}^{N} b_j \sin(\frac{j\pi x}{L}),$$
 (3.35)

que podem ser substituídos convenientemente por :

$$E_{j} = \sum_{j=0}^{N} A_{j} e^{i\frac{j\pi x}{L}},$$
(3.36)

sendo  $i = \sqrt{-1}$ ,  $A_j$  é a amplitude no nível de tempo j e L é o comprimento do intervalo em xno qual a função é definida. Todavia, para que não haja confusão com a notação usual  $u_{i,j}$  iremos substituí-la por  $u_{p,q} = u(ph, qk)$ . Assim, podemos escrever:

$$E_{j} = \sum_{j=0}^{N} A_{j} e^{i\frac{j\pi x}{L}} = \sum_{j=0}^{N} A_{j} e^{i\frac{j\pi ph}{Nh}} = \sum_{j=0}^{N} A_{j} e^{i\psi_{j}ph}$$
(3.37)

 $\operatorname{com} \psi_j = \frac{j\pi}{Nh} \operatorname{e} Nh = L.$ 

Posto isto, os valores iniciais nos pontos da malha ao longo de t = 0 são definidos como

$$u_{p,0} = u(ph,0) = \sum_{j=0}^{N} A_j e^{i\psi_j ph}, \ p = 0, 1, \cdots, N.$$
 (3.38)

A equação 3.38 constitui um sistema de N+1 equações e N+1 incógnitas  $A_0, A_1, \dots, A_N$  cuja matriz dos coeficientes é não singular<sup>2</sup>. Desta forma, é possível investigar a propagação

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Uma matriz é não singular se é inversível. Estas matrizes tem uma característica de possuírem seu determinante diferente de zero.

de amplitudes do tipo  $e^{i\psi_j ph}$ . Para que seja possível investigar a propagação desses valores, a medida que o tempo (t) aumenta, tomemos:

$$u_{p,q} = e^{i\psi x} e^{\mu t} = e^{i\psi ph} e^{\mu qk} = e^{i\psi ph} (e^{\mu k})^q.$$
(3.39)

Definindo  $\xi = e^{\mu k}$ , a equação 3.39 fica:

$$u_{p,q} = e^{i\psi ph}\xi^q. \tag{3.40}$$

em que  $\xi$  é denominado fator de amplificação,  $\psi = \frac{j\pi}{Nh}$  para N o número de espaçamento h da malha computacional.

Substituindo 3.40 na equação de Crank-Nicolson 3.18, obtemos:

$$\rho e^{i\psi ph} \xi^{q+1} - \eta (e^{i\psi(p-1)h} \xi^{q+1} + e^{i\psi(p+1)h} \xi^{q+1}) + \beta (e^{i\psi(p-2)h} \xi^{q+1} + e^{i\psi(p+2)h} \xi^{q+1})$$

$$= \omega e^{i\psi ph} \xi^{q} + \eta (e^{i\psi(p-1)h} \xi^{q} + e^{i\psi(p+1)h} \xi^{q})$$

$$- \beta (e^{i\psi(p-2)h} \xi^{q} + e^{i\psi(p+2)h} \xi^{q})$$
(3.41)

Colocando o termo  $\xi^q$  em evidência, a equação 3.41 pode ser reescrita como

$$\xi^{q} \left[ \xi \left( \rho e^{i\psi ph} - \eta e^{i\psi(p-1)h} - \eta e^{i\psi(p+1)h} + \beta e^{i\psi(p-2)h} + \beta e^{i\psi(p+2)h} \right) \right]$$
  
=  $\xi^{q} \left( \omega e^{i\psi ph} + \eta e^{i\psi(p-1)h} + \eta e^{i\psi(p+1)h} - \beta e^{i\psi(p-2)h} - \beta e^{i\psi(p+2)h} \right),$ (3.42)

donde

$$\xi \left[ e^{i\psi ph} \left( \rho - \eta (e^{-i\psi h} + e^{i\psi h}) + \beta (e^{-2i\psi h} + e^{2i\psi h}) \right) \right]$$
  
=  $e^{i\psi ph} \left( \omega + \eta (e^{-i\psi h} + e^{i\psi h}) - \beta (e^{-2i\psi h} + e^{2i\psi h}) \right),$  (3.43)

que implica,

$$\xi \left( \rho - \eta (e^{-i\psi h} + e^{i\psi h}) + \beta (e^{-2i\psi h} + e^{2i\psi h}) \right) = \omega + \eta (e^{-i\psi h} + e^{i\psi h}) - \beta (e^{-2i\psi h} + e^{2i\psi h}).$$
(3.44)

Considerando a identidade

$$\cos(\psi h) = \frac{e^{-i\psi h} + e^{i\psi h}}{2},\tag{3.45}$$

a equação 3.44 pode ser reescrita como:

$$\xi \left(\rho - 2\eta \cos(\psi h) + 2\beta \cos(2\psi h)\right) = \omega + 2\eta \cos(\psi h) - 2\beta \cos(2\psi h).$$
(3.46)

Por outro lado, levando-se em conta a relação trigonométrica

$$\cos(2b) = \frac{\cos^2 b - \sin^2 b}{2},$$
(3.47)

temos

$$\xi \left(\rho - 2\eta \cos(\psi h) + 2\beta (\cos^2(\psi h) - \sin^2(\psi h))\right) = \omega + 2\eta \cos(\psi h) - 2\beta (\cos^2(\psi h) - \sin^2(\psi h))$$
(3.48)

Logo,

$$\xi \rho - (\xi + 1)2\eta \cos(\psi h) + (\xi + 1)(2\beta(\cos^2(\psi h) - \sin^2(\psi h))) = \omega.$$
(3.49)

o que implica

$$\xi \rho - \xi 2\eta \cos(\psi h) - 2\eta \cos(\psi h) + (\xi + 1)(2\beta - 4\beta \sin^2(\psi h)) = \omega.$$
(3.50)

Finalmente,

$$\xi(\rho - 2\eta\cos(\psi h) + 2\beta - 4\beta\sin^2(\psi h)) = \omega + 2\eta\cos(\psi h) + 4\beta\sin^2(\psi h) - 2\beta.$$
(3.51)

Consider ando-se que  $\cos(\psi h) = 1 - 2\sin^2(\frac{\psi h}{2})$ , a equação 3.51 fica:

$$\xi(\rho - 2\eta(1 - 2\sin^2(\frac{\psi h}{2})) + 2\beta - 4\beta\sin^2(\psi h)) = \omega + 2\eta(1 - 2\sin^2(\frac{\psi h}{2})) + 4\beta\sin^2(\psi h) - 2\beta$$
(3.52)

substituindo os valores correspondentes de 3.19, obtemos

$$\xi = \frac{1 - \sigma - 4\alpha \sin^2(\frac{\psi h}{2}) - 16\beta \sin^2(\frac{\psi h}{2}) + 4\beta \sin^2(\psi h)}{1 + 4\alpha \sin^2(\frac{\psi h}{2}) + 16\beta \sin^2(\frac{\psi h}{2}) - 4\beta \sin^2(\psi h)},$$
(3.53)

logo,

$$\xi = \frac{1 - 4\eta \sin^2(\frac{\psi h}{2}) + 4\beta \sin^2(\psi h)}{1 - \sigma + 4\eta \sin^2(\frac{\psi h}{2}) - 4\beta \sin^2(\psi h)}.$$
(3.54)

Portanto, concluímos que o método 3.18 é incondicionalmente estável. Certo disto, agora podemos utilizar o mesmo para desenvolver um código em Matlab para se obter resultados numéricos que se aproximam da solução real do problema. Estes resultados são apresentados no capítulo 5.

# 4 ANÁLISE DO ERRO DE APROXIMAÇÃO NUMÉRICA POR ANALOGIA COM O CRITÉRIO DE ANÁLISE PARA O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Na análise de erros do problema de difusão anômala (com termo de 4<sup>a</sup> ordem) do problema de propagação de conhecimento, aqui abordado, empregamos uma análise de erros numéricos em analogia com aquele do MEF, conforme indicado anteriormente, na introdução e no capítulo 2. Assim, considerou-se apresentar neste capítulo os aspectos da matemática que serão importantes na análise de erros adotado em analogia ao do Método dos Elementos Finitos (MEF).

**Definição 4.1.** (Espaço  $L^2$ ) Seja  $f : \Omega \to \mathbb{R}$  uma função quadrado integrável. Definimos uma norma para f e representamos por  $\|\cdot\|_0$  como sendo

$$||f||_0 = \left(\int_{\Omega} f(x)^2 dx\right)^{1/2}.$$
(4.1)

Sendo o espaço  $L^2(\Omega)$  o fecho do espaço  $C(\Omega)$  com relação a  $L^2$ . O espaço  $L^2(\Omega)$  considerando o produto interno

$$\langle u, v \rangle_{\Omega} = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x},$$
(4.2)

é um espaço de Hilbert<sup>1</sup>.

**Definição 4.2.** (Espaço  $H^1 e H_0^1$ ) Seja  $H^1$  a norma para  $f : \Omega \to \mathbb{R}$  definida por

$$||f||_{1} = \left(\int_{\Omega} (f(x)^{2} + |\nabla f(x)|^{2}) dx\right)^{1/2}.$$
(4.3)

Definimos os espaços  $H^1(\Omega)$  e  $H^1_0(\Omega)$ , respectivamente, como sendo o complemento dos espaços  $C^{\infty}(\Omega)$  e  $C_0^{\infty}(\Omega)^2$  com relação a norma  $\|.\|_1$ .

Se desprezarmos o termo  $f(x)^2$  na equação 4.3, obtemos a expressão

$$|f|_{1} = \left(\int_{\Omega} |\nabla f(x)|^{2} dx\right)^{1/2}$$
(4.4)

que chamaremos seminorma  $H^1$ .

Esses espaços, bem como suas propriedades, não são objetivos de nossos estudos, mas são ferramentas que iremos usar ao longo do trabalho. Por isso, não iremos demonstrar os resultados enunciados acerca de tais espaços.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial, normado completo.

 $<sup>{}^{2}</sup>C_{0}^{\infty}(\Omega) = \{ v \in C^{\infty}(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0 \}.$ 

**Lema 4.3.** (*Desigualdade de Poincaré*) Seja  $H_0^1$  o complemento do espaço  $C_0^{\infty}$ . Então existe uma constante c tal que

$$\|v\|_0 \le c |v|, \forall v \in C_0^{\infty}.$$

$$(4.5)$$

*Como consequência, a seminorma*  $|\cdot|_1$  *ou*  $H^1$  *e a norma*  $||.||_0$  *são equivalentes.* 

A desigualdade de Poincaré continua válida para funções que se anulam em apenas uma parte da fronteira  $\partial\Omega$ , da mesma forma para funções de  $H^1(\Omega)$  que possuem média nula  $\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} v dx = 0\right)$ .

Uma demonstração para a desigualdade 4.3 pode ser vista em Quarteroni (2010).

**Lema 4.4.** (*Desigualdade de Cauchy-Schwarz*) Seja u e v elementos de  $L^2(\Omega)$ . Então

$$|\langle u, v \rangle| \le \|u\|_0 \|v\|_0.$$
(4.6)

Uma demonstração para a desigualdade 4.6 pode ser vista em Süli (2012).

## 4.1 LEMA DE CÉA

O lema de Céa nos diz que o erro de aproximação do MEF, na norma  $H^1$ , depende do quão bem a solução u pode ser aproximada no espaço  $V_0^h$ , ou seja, depende da escolha do espaço  $V_0^h$ , sendo  $V_0^h(\Omega) = \{v \in V_h(\Omega) : v|_{\Omega} = 0\}$ , onde  $V_h$  é um espaço de dimensão finita<sup>3</sup>.

**Lema 4.5.** Seja  $u_h$  uma aproximação para  $u \text{ em } V_0^h$ . Existe uma constante c > 0 tal que

$$\|u - u_h\|_1 \le c.inf \|u - v\|, \forall v \in V_0^h.$$
(4.7)

A demonstração desse resultado pode ser vista em (GALVIS; VERSIEUX, 2011), por exemplo.

## 4.2 ESTIMATIVA DE ERRO

A eficiência do processo de aproximação de uma solução numérica para uma equação diferencial é mensurada em função do erro efetuado no processo de aproximação para a solução. Imaginando que  $u \in V$  seja a solução exata e  $u_h \in V_h$  a solução aproximada, o erro no processo de construção dessa aproximação pode ser visto como  $||u - u_h||$  em que  $|| \cdot ||$  é uma norma induzida pelo produto interno que atribui ao espaço vetorial V as características de um espaço de Hilbert.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Um espaço de funçõe V tem dimensão finita se existe  $n \in \mathbb{N}$ , e um conjunto de funções  $\phi_i : \Omega \to \mathbb{R}$ , com  $i \in \{1, \dots, n\}$ , tal que qualquer  $\varphi \in V$  pode ser escrita como combinação linear das funções  $\phi_i$ .

Considerando o problema 3.2 com condições de Dirichlet homogêneas e considerando o produto interno 4.2 definido para  $L^2$  com uma função  $v \text{ em } H_0^1$ , em seguida usando a fórmula de integração por partes teremos:

$$c_p \int_0^L \frac{\partial u}{\partial t} v dx + \lambda K_1 \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx + \lambda (1 - \lambda) K_2 \int_0^L \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \frac{\partial v}{\partial x} dx + r \int_0^L u v dx = 0, \quad (4.8)$$

agora o problema variacional se resume em se determinar u tal que  $u(x, 0) = u_0(x), x \in (0, L)$ e para  $t \in (0, T]$  se tenha  $u(\cdot, t) \in H^1_0(0, L), \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t) \in L^2(0, L)$ 

$$c_p \int_0^L \frac{\partial u}{\partial t} v dx + p \langle u, v \rangle + q \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, v \right\rangle + r \int_0^L u v dx = 0, \forall v \in V_0^h(0, L)$$
(4.9)

onde  $p = \lambda K_1, q = \lambda (1 - \lambda) K_2$ .

Fazendo a mudança de variável v=u(x,t) <br/>e $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0=\frac{\partial u}{\partial x}(L,t)$ temos

$$c_p \int_0^L \frac{\partial u}{\partial t} u(t) dx = c_p \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| u(t) \right\|_0^2;$$
(4.10)

$$p\int_0^L \left(\frac{\partial u(t)}{\partial x}\right)^2 dx \ge p\frac{L^2}{2} \left\|u(t)\right\|_0^2; \tag{4.11}$$

$$q \int_{0}^{L} \left( \frac{\partial^{3} u(t)}{\partial x^{3}} \frac{\partial u(t)}{\partial x} \right) dx = q \int_{0}^{L} \left( \frac{\partial^{2} u(t)}{\partial x^{2}} \right)^{2} dx$$
$$\geq q \frac{L}{2} \left\| \frac{\partial u(t)}{\partial x} \right\|_{0}^{2}$$
(4.12)

$$\geq q \frac{L^4}{4} \| u(t) \|_0^2;$$

•

$$r \int_{0}^{L} u(t)u(t)dx = r \int_{0}^{L} u(t)^{2}dx = rL \left\| u(t) \right\|_{0}^{2},$$
(4.13)

de modo que deduzimos a seguinte equação desigualdade

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{0}^{2} + \left(\frac{pL^{2}}{c_{p}} + \frac{qL^{4}}{2c_{p}} + \frac{2rL}{c_{p}}\right) \|u(t)\|_{0}^{2} \le 0,$$
(4.14)

fazendo  $||u(t)||_0^2 = \varphi$  e  $k = \frac{pL^2}{c_p} + \frac{qL^4}{2c_p} + \frac{2rL}{c_p}$ , temos que

$$\begin{array}{rcl}
\varphi' &\leq -k\varphi \\
\frac{\varphi'}{\varphi} &\leq -k \\
\ln \varphi &\leq -kt \\
\varphi &\leq e^{-kt},
\end{array}$$
(4.15)

que é equivalente a

$$\frac{d}{dt} \left( \|u(t)\|_0^2 e^{kt} \right) \le 0.$$
(4.16)

Daí concluímos que

e

$$\|u(t)\|_0^2 \le e^{-kt}.$$
(4.17)

Na equação acima escolhendo os parâmetros de modo que k > 0, podemos garantir que para  $t \in (0, T]$ , o problema variacional 4.9 tem solução  $u(t) \in H_0^1(0, L)$  tal que  $\frac{\partial u}{\partial t}(t) \in L^2(0, L)$ e tal solução é única.

#### 4.2.1 Aproximação de Ritz - Galerkin

Como discutido anteriormente, queremos uma aproximação para u considerando o subespaço  $V_h \subset H_0^1(0, L)$  de dimensão finita caracterizado pelo parâmetro h. Denotemos por  $u_h$ a solução aproximada, tal que, para cada  $t \in (0, T]$ ,  $u_h \in V_h$  e

$$c_p \int_0^L \frac{\partial u_h}{\partial t} v_h dx + p \langle u_h, v_h \rangle + q \left\langle \frac{\partial u_h}{\partial x}, \frac{\partial v_h}{\partial x} \right\rangle + r \int_0^L u_h v_h dx = 0, \quad \forall v_h \in V_h, \quad (4.18)$$

$$u_h(0) = u_{0,h}$$

sendo  $u_h(0)$  uma aproximação para  $u_0$  no espaço  $V_h$ . Onde a solução  $u_h$ , definida por 4.18, será chamada de aproximação de Ritz - Galerkin para a solução 4.9.

Faremos um estudo do erro na solução de Ritz - Galerkin relativamente à norma  $L^2(0, L)$ . Seja  $t \in (0, T]$ . Definimos o problema auxiliar

$$p\left\langle \overline{u}_{h}, v_{h} \right\rangle = -c_{p} \int_{0}^{L} \frac{\overline{u}_{h}}{\partial t} v_{h} dx - q \left\langle \frac{\partial u_{h}}{\partial x}, \frac{\partial v_{h}}{\partial x} \right\rangle - r \int_{0}^{L} u_{h} v_{h} dx, \quad \forall v_{h} \in V_{h}, \tag{4.19}$$

sendo  $\overline{u}_h(t)$  sua solução aproximada, e

$$R_h(t) = u_h(t) - \overline{u}_h(t), \quad r_h(t) = \overline{u}_h(t) - u(t).$$

Assim, o erro  $u_h(t) - u(t)$  pode ser decomposto como

$$u_h(t) - u(t) = u_h(t) - \overline{u}_h(t) + \overline{u}_h(t) - u(t) = R_h(t) + r_h(t).$$
(4.20)

Notemos que

$$c_{p} \int_{0}^{L} \frac{\partial R_{h}}{\partial t} v_{h} dx + p \langle R_{h}, v_{h} \rangle + q \left\langle \frac{\partial R_{h}}{\partial x}, \frac{\partial v_{h}}{\partial x} \right\rangle + r \int_{0}^{L} R_{h} v_{h} dx =$$

$$-c_{p} \int_{0}^{L} \frac{\partial \overline{u}_{h}}{\partial t} v_{h} dx - p \langle \overline{u}_{h}, v_{h} \rangle - q \left\langle \frac{\partial \overline{u}_{h}}{\partial x}, \frac{\partial v_{h}}{\partial x} \right\rangle - r \int_{0}^{L} \overline{u}_{h} v_{h} dx,$$

$$(4.21)$$

aplicando 4.18 na expressão 4.21 obtemos

$$c_{p} \int_{0}^{L} \frac{\partial R_{h}}{\partial t} v_{h} dx + p \langle R_{h}, v_{h} \rangle + q \left\langle \frac{\partial R_{h}}{\partial x}, \frac{\partial v_{h}}{\partial x} \right\rangle + r \int_{0}^{L} R_{h} v_{h} dx =$$

$$c_{p} \int_{0}^{L} \left( \frac{\partial u_{h}}{\partial t} - \frac{\partial \overline{u}_{h}}{\partial t} \right) v_{h} dx + p \langle u_{h} - \overline{u}_{h}, v_{h} \rangle + q \left\langle \frac{\partial u_{h}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u}_{h}}{\partial x}, \frac{\partial v_{h}}{\partial x} \right\rangle + \qquad (4.22)$$

$$r \int_{0}^{L} (u_{h} - \overline{u}_{h}) v_{h} dx,$$

de modo que podemos reescrever a expressão acima como segue

$$c_{p} \int_{0}^{L} \frac{\partial R_{h}}{\partial t} v_{h} dx + pL \langle R_{h}, v_{h} \rangle + q \left\langle \frac{\partial R_{h}}{\partial x}, \frac{\partial v_{h}}{\partial x} \right\rangle + r \int_{0}^{L} R_{h} v_{h} dx =$$

$$c_{p} \int_{0}^{L} \frac{\partial r_{h}}{\partial t} v_{h} dx + p \langle r_{h}, v_{h} \rangle + q \left\langle \frac{\partial r_{h}}{\partial x}, \frac{\partial v_{h}}{\partial x} \right\rangle + r \int_{0}^{L} r_{h} v_{h} dx,$$
(4.23)

tomando  $v_h = R_h(t)$  e usando o resultado 4.10 temos

$$c_p \int_0^L \frac{\partial R_h}{\partial t} R_h dx = c_p \, \|R_h(t)\|_0 \, \frac{d}{dt} \, \|R_h(t)\|_0 \,, \tag{4.24}$$

usando, ainda, os resultados 4.11, 4.12 e 4.13, obtemos

$$c_{p} \|R_{h}(t)\|_{0} \frac{d}{dt} \|R_{h}(t)\|_{0} + p\frac{L^{2}}{2} \|R_{h}(t)\|_{0}^{2} + q\frac{L^{4}}{4} \|R_{h}(t)\|_{0}^{2} + rL \|R_{h}(t)\|_{0}^{2} = c_{p} \int_{0}^{L} \frac{\partial r_{h}}{\partial t} R_{h} dx + p \langle r_{h}, R_{h} \rangle + q \left\langle \frac{\partial r_{h}}{\partial x}, \frac{\partial R_{h}}{\partial x} \right\rangle + r \int_{0}^{L} r_{h} R_{h} dx,$$

$$(4.25)$$

ou ainda podemos reescrever a equação precedente como sendo

$$c_{p} \|R_{h}(t)\|_{0} \frac{d}{dt} \|R_{h}(t)\|_{0} + \left(p\frac{L^{2}}{2} + q\frac{L^{4}}{4} + rL\right) \|R_{h}(t)\|_{0}^{2} =$$

$$c_{p} \int_{0}^{L} \frac{\partial r_{h}}{\partial t} R_{h} dx + p \langle r_{h}, R_{h} \rangle + q \left\langle \frac{\partial r_{h}}{\partial x}, \frac{\partial R_{h}}{\partial x} \right\rangle + r \int_{0}^{L} r_{h} R_{h} dx,$$
(4.26)

portanto, utilizando as desigualdades de Poincaré 4.3 e de Holder<sup>4</sup>, podemos estabelecer a seguinte desigualdade diferencial

$$c_{p} \|R_{h}(t)\|_{0} \frac{d}{dt} \|R_{h}(t)\|_{0} + C \|R_{h}(t)\|_{0}^{2} \leq c_{p} \left\|\frac{\partial r_{h}}{\partial t}(t)\right\|_{0} \|R_{h}(t)\|_{0} + C \|r_{h}(t)\|_{0} \|R_{h}(t)\|_{0}$$
(4.27)

sendo  $C = \left(p\frac{L^2}{2} + q\frac{L^4}{4} + rL\right)$ . De modo que podemos reescrevê-la como

$$\frac{d}{dt} \|R_h(t)\|_0 + \frac{C}{c_p} \|R_h(t)\|_0 \le \left\|\frac{\partial r_h}{\partial t}(t)\right\|_0 + \frac{C}{c_p} \|r_h(t)\|_0,$$
(4.28)

que é equivalente a

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{C}{c_p}t}\left\|R_h(t)\right\|_0 - \int_0^t \left(e^{\frac{C}{c_p}s}\left\|\frac{\partial r_h}{\partial t}(s)\right\|_0 + \frac{C}{c_p}e^{\frac{C}{c_p}s}\left\|r_h(s)\right\|_0\right)ds\right) \le 0$$
(4.29)

portanto concluímos que

$$e^{\frac{C}{c_p}t} \left\| R_h(t) \right\|_0 - \int_0^t \left( e^{\frac{C}{c_p}s} \left\| \frac{\partial r_h}{\partial t}(s) \right\|_0 + \frac{C}{c_p} e^{\frac{C}{c_p}s} \left\| r_h(s) \right\|_0 \right) ds,$$
(4.30)

é não crescente. Em particular

$$\|R_{h}(t)\|_{0} \leq e^{-\frac{C}{c_{p}}t} \left( \int_{0}^{t} \left( e^{\frac{C}{c_{p}}s} \left\| \frac{\partial r_{h}}{\partial t}(s) \right\|_{0} + \frac{C}{c_{p}} e^{\frac{C}{c_{p}}s} \left\| r_{h}(s) \right\|_{0} \right) ds + \|R_{h}(0)\|_{0} \right), \quad (4.31)$$

aplicando a decomposição para o erro  $u_h(t) - u(t)$ , dada pela equação 4.20 obtemos

$$\|u_{h}(t) - u(t)\|_{0} \leq \|r_{h}(t)\|_{0} + e^{-\frac{C}{c_{p}}t} \left( \int_{0}^{t} \left( e^{\frac{C}{c_{p}}s} \left\| \frac{\partial r_{h}}{\partial t}(t) \right\|_{0} + \frac{C}{c_{p}} e^{\frac{C}{c_{p}}s} \left\| r_{h}(t) \right\|_{0} \right) ds + \|R_{h}(0)\|_{0} \right)$$

$$(4.32)$$

Tomando como complemento o lema de Céa, definimos as seguintes estimativas:

$$\|\overline{u}_{h}(t) - u(t)\|_{0} \le C_{0}h^{2} \|u(t)\|_{0}, \qquad (4.33)$$

$$\left\|\frac{\partial \overline{u}_h}{\partial t}(t) - \frac{\partial u}{\partial t}(t)\right\|_0 \le C_0 h^2 \left\|\frac{\partial u}{\partial t}(t)\right\|_0.$$
(4.34)

Agora, conjugando a desigualdade 4.32 com as estimativas precedentes obtemos

$$\begin{aligned} \|u_{h}(t) - u(t)\|_{0} &\leq C_{0}h^{2} \|u\|_{0} + C_{0}h^{2}e^{-\frac{C}{c_{p}}t} \int_{0}^{t} e^{\frac{C}{c_{p}}s} \left\|\frac{\partial u}{\partial t}(t)\right\|_{0} ds \\ &+ C_{0}h^{2}e^{-\frac{C}{c_{p}}t} \int_{0}^{t} \frac{C}{c_{p}}e^{\frac{C}{c_{p}}s} \|u\|_{0} ds + e^{-\frac{C}{c_{p}}t} \|u_{0} - u_{0,h}\|_{0}, \end{aligned}$$

$$(4.35)$$

 ${}^{4}\text{Sejam}\; u,\, v\in L^{2}(\Omega). \text{ Então } \langle u,v\rangle_{L^{2}(\Omega)} \leq \|u\|_{L^{2}(\Omega)}\, \|v\|_{L^{2}(\Omega)}.$ 

o que implica

$$\begin{aligned} \|u_{h}(t) - u(t)\|_{0} &\leq C_{0}h^{2} \left( \|u\|_{0} + e^{-\frac{C}{c_{p}}t} \int_{0}^{t} e^{\frac{C}{c_{p}}s} \left( \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(s) \right\|_{0} + \frac{C}{c_{p}} \|u\|_{0} \right) ds \right) \\ &+ e^{-\frac{C}{c_{p}}t} \|u_{0} - u_{0,h}\|_{0} \end{aligned}$$
(4.36)

sendo  $C_0$  uma constante positiva independente de h e de u. De modo que concluímos a estabilidade da aproximação Ritz - Galerkin relativamente a aproximação  $u_0$ . Daí temos que

$$||u_h(t)||_0 \to 0, t \to \infty.$$
 (4.37)

Esse comportamento da norma indica que à evolução temporal do erro cometido tende a nulidade, validando a convergência da solução numérica para a exata, desconhecida a priori, verificando a aplicação do Teorema de Lax - Milgram a este problema.

Tendo a convergência estabelecida com relação a norma  $\|\cdot\|_0$ , definida por

$$\|u_h\|_0 = \left(\sum_{i=1}^{n_p-1} h u_h(x_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad u_h \in V_h,$$
(4.38)

no capítulo 5 buscaremos estimativas para o erro, tomando por hipótese a convergência do método, utilizaremos como solução analítica uma solução numérica determinada utilizando uma malha com um número pré-determinado de pontos.

## **5 RESULTADOS E DISCUSSÕES**

O objetivo deste capítulo é apresentar os resultados numéricos obtidos por meio do modelo computacional desenvolvido. Para tanto utilizaremos a condição de Dirichlet, aplicada ao modelo de transferência de conhecimento, para se obter informações a cerca do processo de transmissão de conhecimento em uma cadeia científica. Isso implica que estamos supondo uma cadeia controlada por fatores externos, mantendo-se o índice de produtividade ou criatividade constantes em suas fronteiras.

Para lograr as informações sobre o processo de transmissão/transferência de conhecimento em uma cadeia, faz-se necessário algumas suposições e análise dos parâmetros que caracterizam o modelo 3.2. Esta análise, qualitativa, nos permite visualizar o nível de conhecimento presente em uma "cadeia" quando por exemplo existe uma redução da permeabilidade cognitiva ocasionando perda no fluxo de conhecimento na cadeia. Por outro lado, para análise de erros da solução numérica não haverá comparação com a solução analítica, pois é desconhecida a priori. Desta forma serão feitas comparações entre os gráficos do método utilizado admitindo-se as mesmas condições de contorno, buscando identificar as regiões do domínio que apresentam maior erro.

A obtenção dos resultados numéricos é feita por um código desenvolvido na linguagem Matlab. Embasado na teoria construída pelo método Crank-Nicolson 3.18, visto na seção 3.2. A escolha do método, além de sua fácil implementação, está amparada no fato do mesmo ser incondicionalmente estável, isto é, não necessita satisfazer condições específicas para que a solução numérica convirja para solução. Esta afirmação foi provada a seção 3.3 com a equação 3.33, onde discutimos os critérios de convergência e estabilidade para os métodos explícito e implícito adotando a norma do máximo em seguida aplicando o critério de Von Neumann equação 3.54.

## 5.1 RESULTADOS NUMÉRICOS

O processo de transmissão de conhecimento entre elementos de uma cadeia pode ser simulado por meio da equação 5.1, que aqui denominamos caso geral

$$c_p \frac{\partial u}{\partial t} = \lambda K_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \lambda (1 - \lambda) K_2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - ru$$
(5.1)

quando supomos que o processo de transferência seja à uma taxa unitária ( $\lambda = 1$ ) a equação precedente assume a forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{K_1}{c_p} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{r}{c_p} u$$
(5.2)

A equação 5.2 é vista como um processo de difusão pura, o qual chamaremos de caso simples. Atribuindo algumas hipóteses para seus parâmetros é possível simular o processo de transmissão de conhecimento tanto para o caso de transferência unitária, quanto para o caso geral, que veremos nos exemplos que seguem. Os resultados numéricos obtidos para aproximação da solução do problema serão apresentados nas tabelas 5.1 a 5.20, sendo as colunas com valores para Snap0 e  $u(x_i, t_j)$  representando a condição inicial e solução computacional no instante de tempo  $\Delta t = 0, 1$  ciclos de evolução, respectivamente. Para o instante de tempo foi considerado um tempo computacional final igual a 0, 1, o mesmo foi dividido em 10 passos de tempo iguais a 0, 01. As duas últimas colunas representam o erro de truncamento local e global, respectivamente. O erro global, aqui, é visto como acúmulo de erros de trucamento locais.

**Exemplo 5.1.** Os resultados foram obtidos supondo uma cadeia com altos incentivos e vasta criatividade, porém com uma baixa densidade de conhecimento no inicio do processo dada pela condição inicial  $u_0 = 2 - \sin(\pi x)$ , o que nos leva à uma alta taxa de geração de conhecimento, que agregado com o parâmetro  $c_p$  e controlado pelo parâmetro  $K_1$ , observamos um aumento da densidade de conhecimento sendo distribuída próximo aos extremos da cadeia durante todo o processo. No resultado apresentado na figura 5.1 estão sendo atribuídos  $\alpha = 0,025000, \rho = 1,050000$  e  $\omega = 0,450000$  obtendo um tempo computacional 7,219237 ciclos de evolução.



Figura 5.1 – Alta geração com relação a permeabilidade cognitiva.

Para a figura 5.2, geometricamente obtemos um resultado semelhante ao caso anterior, entretanto, temos um tempo computacional de 7,570587 ciclos de evolução, assim, observamos que com uma taxa de geração de conhecimento nula a densidade de conhecimento distribui-se

de forma mais lenta. Para a figura (c) temos  $\alpha = 3472, 222222, \rho = -7043, 444444, \omega = 6945, 444444 e um tempo computacional de 7, 880411 ciclos de evolução. Para a figura (d) para um tempo computacional de 7, 993981 ciclos de evolução observamos uma leve perda de conhecimento de forma uniforme ao londo de toda a cadeia, isso deve-se ao fato de estarmos supondo <math>c_p$  (impedância cognitiva) unitário.



Figura 5.2 – Taxa de geração de novos conhecimentos nula.

Nas figuras 5.1, 5.2 e 5.3 estamos considerando  $c_p = 0,01$ , enquanto para a figura 5.4  $c_p = 1$ . As duas primeiras simulações nos mostram que mantendo constante os valores de permeabilidade cognitiva e variando a taxa de geração impostas por criatividade ou incentivos obtemos quase resultados idênticos a menos de uma redução na densidade de conhecimento nos extremos da cadeia. Por outro lado, atrelando altos valores de criatividade com altos valores de permeabilidade percebemos uma elevação da densidade de conhecimento distribuída ao longo de toda a cadeia o que pode ser visto na figura 5.3. Entretanto, reduzindo bruscamente a criatividade ou incentivos de modo que a taxa de geração se anule e supondo uma diminuição na velocidade de aprendizado representada por  $c_p = 1$  percebemos uma leve perda de quantidade de conhecimento ao longo de toda a cadeia vista na figura 5.4.



Figura 5.3 – Alta permeabilidade cognitiva e alta geração.



Figura 5.4 – Alta permeabilidade, impedância cognitiva unitária e geração nula.

A análise geométrica advinda das figuras 5.1 e 5.2 nos mostram o acréscimo de conhecimento ao longo de toda a cadeia, entretanto, percebemos que para o primeiro gráfico obtemos acréscimos em valores maiores com relação ao segundo gráfico, porém, mesmo que pequenos, o primeiro gráfico é visto como acréscimo em sua densidade de conhecimento em determinados pontos do domínio, por outro lado, assim como no primeiro gráfico, o segundo gráfico destaca uma perda de conhecimento em alguns blocos do domínio, isso deve-se ao fato de estarmos supondo uma cadeia em que inexiste criatividade ou incentivos a geração de novos conhecimento como podemos ver os valores numéricos nas tabelas 5.1 e 5.2.

$x_i$	Snap0	$u(x_i, t_j)$	Erro de discretização	Erro global
0,0	2	2	0,0000	0,0000
0,1	1,69098300562505	2,17301984705474	0,0000	0,0003e-015
0,2	1,41221474770753	1,99035793410349	0,0000	0,0040e-015
0,3	1,19098300562505	2,00053733908250	0,0000	0,0475e-015
0,4	1,04894348370485	1,99996996241153	0,4441e-015	0,7889e-015
0,5	1	2,00000333750983	0,0000	0,0944e-015
0,6	1,04894348370485	1,99996996241153	0,4441e-015	0,7889e-015
0,7	1,19098300562505	2,00053733908250	0,0000	0,0475e-015
0,8	1,41221474770753	1,99035793410349	0,0000	0,0040e-015
0,9	1,69098300562505	2,17301984705474	0,0000	0,0003e-015
1,0	2	2	0,0000	0,0000

Tabela 5.1 – Tabela de resultados para  $K_1 = 0.0005, r = 0.5$ .

Os valores para o erro global representados nas tabelas 5.1 e 5.2, aparentemente nos dão a impressão de crescimento, entretanto, os mesmo estão sendo ilustrados para cada ponto do domínio visto a partir da fronteira para seus pontos internos.

$x_i$	Snap0	$u(x_i, t_j)$	Erro de discretização	Erro global
0,0	2	2	0,0000	0,0020e-014
0,1	1,69098300562505	2,10567038943792	0,0000	0,0155e-014
0,2	1,41221474770753	1,99721727184355	0,0000	0,0955e-014
0,3	1,19098300562505	2,00007328050699	0,4441e-015	0,4672e-014
0,4	1,04894348370485	1,99999806889094	0,6661e-015	0,6177e-014
0,5	1	2,0000010163732	0,0000	0,2160e-014
0,6	1,04894348370485	1,99999806889094	0.4441e-015	0,4519e-014
0,7	1,19098300562505	2,00007328050699	0,4441e-015	0,4561e-014
0,8	1,41221474770753	1,99721727184356	0,0000	0,2421e-014
0,9	1,69098300562505	2,10567038943792	0,8882e-015	0,7240e-014
1,0	2	2	0,0416e-015	0,1820e-014

Tabela 5.2 – Tabela de resultados para  $K_1 = 0.0005, r = 0.$ 

Pensando como esta situação é vista com relação a ganhos ou perdas em densidade de conhecimento na cadeia, percebemos que a célula central assume valores máximos aos das células das fronteiras, percebemos ainda, que quanto mais próximas das fronteiras estão as células, maiores são os valores de sua densidade. Isso é uma consequência de estarmos considerando uma permeabilidade cognitiva muito pequena, ocasionando uma perda no fluxo de conhecimento no interior da cadeia. Essa situação é intensificada quando além de uma baixa permeabilidade, impomos uma taxa de geração de novos conhecimentos nula (r = 0), tabela 5.2, isso implica uma perda significativa em quantidade de conhecimento em células internas, que hipoteticamente, poderíamos chegar ao desaparecimento da cadeia quando evoluímos no tempo.

As tabelas 5.3 e 5.4 foram obtidas com determinadas manipulações em todos os parâmetros, ainda assim, continuam apresentando erros pontuais, entretanto, em ambos os casos é perceptível uma simetria tanto para os valores de truncamento local, quanto para o erro global os quais apresentaram uma forma crescente com valores na tabela 5.3 que já era esperado devido seus autovalores apresentarem módulo maiores que 1.

$x_i$	Snap0	$u(x_i, t_j)$	Erro de discretização	Erro global
0,0	2	2	0,0278e-015	0,0741e-015
0,1	1,69098300562505	2,03663605100540	0,0000	0,1429e-015
0,2	1,41221474770753	2,03436443522138	0,0000	0,2014e-015
0,3	1,19098300562505	2,03277323525474	0,8882e-015	0,2450e-015
0,4	1,04894348370485	2,03183094534615	0,0000	0,2701e-015
0,5	1	2,03151890815541	0,0000	0,2763e-015
0,6	1,04894348370485	2,03183094534615	0,0000	0,2638e-015
0,7	1,19098300562505	2,03277323525474	0,0000	0,2343e-015
0,8	1,41221474770753	2,03436443522138	0,0000	0,1898e-015
0,9	1,69098300562505	2,03663605100540	0,0000	0,1335e-015
1,0	2	2	0,0278e-015	0,0689e-015

Tabela 5.3 – Tabela de resultados para  $K_1 = 100, r = 100$ .

Tabela 5.4 – Tabela de resultados para  $K_1 = 100, r = 0 c_p = 1$ .

$x_i$	Snap0	$u(x_i, t_j)$	Erro de discretização	Erro global
0,0	2	2	0,0555e-015	0,0367e-015
0,1	1,69098300562505	1,91573855915473	0,0000	0,1192e-015
0,2	1,41221474770753	1,90902655008890	0,4441e-015	0,1255e-015
0,3	1,19098300562505	1,90413401002130	0,2220e-015	0,1081e-015
0,4	1,04894348370485	1,90115878975326	0,0000	0,1289e-015
0,5	1	1,90016039369016	0,0000	0,1040e-015
0,6	1,04894348370485	1,90115878975326	0,0000	0,1025e-015
0,7	1,19098300562505	1,90413401002130	0,2220e-015	0,0703e-015
0,8	1,41221474770753	1,90902655008890	0,0000	0,1001e-015
0,9	1,69098300562505	1,91573855915473	0,2220e-015	0,0595e-015
1,0	2	2	0,0000	0,0442e-015

**Exemplo 5.2.** Para este exemplo estamos aplicando uma variação na capacidade de aprendizado dos indivíduos da cadeia, na figura 5.5 é considerado  $c_p$  muito pequeno, enquanto na figura 5.6  $c_p$  é considerado grande com um tempo computacional de 8.271305 e 8.206285 ciclos de evolução, respectivamente.

Em ambos os gráficos percebemos que os parâmetros de geração e permeabilidade cognitiva estão fortemente interligados para o avanço da quantidade de conhecimento, entretanto, o quão rápido as células adquirem novas informações é controlado pelo parâmetro  $c_p$ .

Esta análise nos permite concluir que a cadeia de conhecimento não consegue crescer ou evoluir de forma ilimitada. Isso deve-se aos parâmetros de transferência e capacidade de aprendizado dos indivíduos. Uma possível mudança nesse cenário seria criar estratégias para acelerar a taxa de transferência de conhecimento, isso é claro, se na cadeia o parâmetro de criatividade é alto.



Figura 5.5 – Baixa impedância cognitiva.



Figura 5.6 – Alta impedância cognitiva.

Para os dados obtidos nas tabelas 5.5 e 5.6 foi escolhido supor que haja alta permeabilidade e alta geração, assim verificar a distribuição de conhecimento quando manipulamos a velocidade de aprendizado imposta pelo parâmetro  $c_p$ . Da análise geométrica percebemos que para  $c_p = 10$  obtemos uma quantidade de conhecimento maior com os mesmos parâmetros
de permeabilidade e geração, entretanto, pelos dados numéricos podemos visualizar melhor essa informação verificando que de fato seus valores são maiores, porém, é percebido que a velocidade no aprendizado varia de célula para célula.

$x_i$	Snap0	$u(x_i, t_j)$	Erro de discretização	Erro global
0,0	2	2	0,0555e-015	0,2307e-015
0,1	1,69098300562505	2,03740432556808	0,4441e-015	0,4450e-015
0,2	1,41221474770753	2,03506432007756	0,8882e-015	0,6276e-015
0,3	1,19098300562505	2,03342553085996	0,0000	0,7660e-015
0,4	1,04894348370485	2,03245518540849	0,4441e-015	0,8520e-015
0,5	1	2,03213387875482	0,0000	0,8805e-015
0,6	1,04894348370485	2,03245518540849	0,4441e-015	0,8502e-015
0,7	1,19098300562505	2,03342553085996	0,8882e-015	0,7630e-015
0,8	1,41221474770753	2,03506432007756	0,0000	0,6238e-015
0,9	1,69098300562505	2,03740432556808	0,0000	0,4412e-015
1,0	2	2	0,0000	0,2284e-015

Tabela 5.5 – Tabela de resultados para  $K_1 = 100, r = 100 c_p = 0,0001$ .

Tabela 5.6 – Tabela de resultados para  $K_1 = 100 = r c_p = 10$ .

$x_i$	Snap0	$u(x_i, t_j)$	Erro de discretização	Erro global
0,0	2	2	0,0000	0,1402e-015
0,1	1,69098300562505	1,95875770406295	0,2220e-015	0,4066e-015
0,2	1,41221474770753	2,08446874146754	0,8882e-015	0,8042e-015
0,3	1,19098300562505	2,19497540540797	0,4441e-015	0,6845e-015
0,4	1,04894348370485	2,27038649637496	0,4441e-015	0,6643e-015
0,5	1	2,29712801799446	0,4441e-015	0,6090e-015
0,6	1,04894348370485	2,27038649637496	0,0000	0,3464e-015
0,7	1,19098300562505	2,19497540540797	0,0000	0,2567e-015
0,8	1,41221474770753	2,08446874146754	0,0000	0,1923e-015
0,9	1,69098300562505	1,95875770406295	0,0000	0,1285e-015
1,0	2	2	0,0000	0,0642e-015

Nos exemplos anteriores estávamos considerando uma densidade de conhecimento baixa dada pela condição inicial  $u_0 = 2 - \sin(\pi x)$ . Nos próximos exemplos iremos supor uma densidade inicialmente alta dada pela condição inicial  $u_0 = 2 + \sin(\pi x)$ .

**Exemplo 5.3.** Consideremos que a cadeia possua inicialmente uma quantidade de conhecimento dada pela condição inicial  $u_0 = 2 + \sin(\pi x)$ , sendo controlada por condições de contorno constantes. Isso significa que não existe troca de conhecimento com o meio externo.

Observamos na figura 5.7 um índice de produtividade alto dado pela condição inicial  $u_0 = 2 + \sin(\pi x)$ , entretanto, é percebido que a evolução ou variação da densidade de conhecimento a medida que avançamos no tempo é decrescente com relação a condição inicial. Para este exemplo está sendo considerado uma alta permeabilidade ( $K_1 = 100$ ) e baixa impedância ( $c_p = 0,01$ ) o que teoricamente deveria nos garantir um processo mais acelerado do aprendizado dos indivíduos da cadeia. Entretanto, não foi percebido acréscimo na quantidade de conhecimento devido ao fato de estarmos supondo uma cadeia com células internas com criatividade ou incentivos nulos, isto é, inexiste geração de novos conhecimentos entre as células da cadeia. Na tabela 5.7 pode

ser visto os resultados para a aproximação de u ilustrando os valores numéricos para os erros de truncamento local e global.



Figura 5.7 – Alta densidade de conhecimento inicial.

Os dados apresentados na tabela 5.7 nos mostram variação no sentido de decrescimento da quantidade inicial de conhecimento. Este exemplo nos ajuda a verificar que mesmo com altos valores de permeabilidade, ou seja, o fluxo de conhecimento na cadeia é intenso, mas sem criatividade não há geração de novos conhecimentos em consequência a cadeia não consegue evoluir, isso pode ser verificado pelos valores correspondentes as densidades em cada bloco na tabela 5.7, onde percebemos que apenas nas fronteiras temos valores iguais ao processo inicial sendo os demais valores inferiores, caracterizando uma perda em densidade de conhecimento o que pode ocasionar o desaparecimento da cadeia.

$x_i$	Snap0	$u(x_i, t_j)$	Erro de discretização	Erro global
0,0	2	2	0,0004e-015	0,0314e-016
0,1	2,30901699437495	1,99920015454494	0,2220e-015	0,0379e-016
0,2	2,58778525229247	1,99920015454494	0,0000	0,1029e-016
0,3	2,80901699437495	1,99920015454494	0,2220e-015	0,0654e-016
0,4	2,95105651629515	1,99920015454494	0,2220e-015	0,0740e-016
0,5	3	1,99920015454494	0,2220e-015	0,0775e-016
0,6	2,95105651629515	1,99920015454494	0,4441e-015	0,0758e-016
0,7	2,80901699437495	1,99920015454494	0,0000	0,1270e-016
0,8	2,58778525229247	1,99920015454494	0,2220e-015	0,0516e-016
0,9	2,30901699437495	1,99920015454494	0,0000	0,0685e-016
1,0	2	2	0,0000	0,0342e-016

Tabela 5.7 – Tabela de resultados para  $K_1 = 100, r = 0 c_p = 0, 01$ .

Por outro lado, quando supomos uma cadeia em que haja alta criatividade ou incentivo percebemos que ainda existe uma variação no sentido de perda em nível de conhecimento ao longo de toda a cadeia, o que pode ser visto na figura abaixo com seus resultados numéricos na tabela 5.8.



Figura 5.8 – Alta densidade de conhecimento inicial com alta geração de novos conhecimentos.

$x_i$	Snap0	$u(x_i, t_j)$	Erro de discretização	Erro de global
0,0	2	2	0,0278e-015	0,0741e-015
0,1	2,30901699437495	2,03663605100540	0,0000	0,1429e-015
0,2	2,58778525229247	2,03436443522138	0,0000	0,2014e-015
0,3	2,80901699437495	2,03277323525475	0,8882e-015	0,2450e-015
0,4	2,95105651629515	2,03183094534615	0,0000	0,2701e-015
0,5	3	2,03151890815541	0,0000	0,2763e-015
0,6	2,95105651629515	2,03183094534615	0,0000	0,2638e-015
0,7	2,80901699437495	2,03277323525474	0,0000	0,2343e-015
0,8	2,58778525229247	2,03436443522138	0,0000	0,1898e-015
0,9	2,30901699437495	2,03663605100540	0,0000	0,1335e-015
1,0	2	2	0,0278e-015	0,0689e-015

Tabela 5.8 – Tabela de resultados para  $K_1 = 100, r = 100 c_p = 0, 1$ .

Percebemos, pelos valores ilustrados na tabela 5.8, que apesar de se efetuar uma variação no termo de geração de novos conhecimento deixando claro uma variação de área com relação a condição inicial, como visto na figura correspondente acima, ainda caracteriza uma perda na quantidade de conhecimento, porém de forma mais lenta que no caso anterior.

**Exemplo 5.4.** Neste exemplo iremos verificar o comportamento da cadeia quando se é aumentado os valores de sua impedância cognitiva. Para verificar este comportamento também iremos efetuar variações nos termos de permeabilidade e geração de novos conhecimentos. Para este exemplo o comportamento da solução numérica apresenta uma característica interessante quando aumentamos a impedância, percebemos uma diminuição na velocidade do aprendizado dos indivíduos o que nos mostra um decréscimo no nível de conhecimento nas células internas a cadeia o que pode ser visto nas figura abaixo. Nesse sentido, a medida que aumentamos os valores de  $c_p$  mais lenta é a capacidade de aprender das células. Se aumentamos a impedância e diminuímos os valores da permeabilidade e criatividade na cadeia é notório que a cadeia não consegue evoluir tendendo a permanecer com o nível de conhecimento inicial, ou seja, inexiste a a geração de novos conhecimentos em consequência a cadeia tende ao desaparecimento quando  $t \to \infty$ .



Figura  $5.10 - c_p = 1, r = 10, K_1 = 10.$ 



Figura  $5.11 - c_p = 35, r = 10, K_1 = 10.$ 



Figura  $5.12 - c_p = 45, r = 10, K_1 = 10.$ 

Este exemplo nos mostram de forma nítida o papel da impedância cognitiva no desenvolvimento da cadeia. Nas figuras 5.9 e 5.10 em que foram adotados em ambos os casos  $c_p = 1$ , percebemos que a variação da quantidade de conhecimento com relação a densidade inicial é muito grande, caracterizando uma perda de densidade do conhecimento na cadeia. Isso acontecerá mesmo se imposições com valores altos de permeabilidade cognitiva e geração de novos conhecimentos, entretanto, quando assumimos valores mais próximos da impedância unitária (considerada não muito grande), percebemos uma perda de conhecimento de forma mais lenta. Posto isto, e mantendo constante e iguais a 10 os valores de r e  $K_1$ , aumentando de brusca os valores de  $c_p$  (35 e 45), figuras 5.11 e 5.12 percebemos ganhos e perdas de forma oscilatória a densidade inicial.



Figura 5.14 –  $c_p = 100, r = 0, 5, K_1 = 0, 5$ 

Nas figuras 5.13 e 5.14, é percebido para o primeiro caso que a quantidade de conhecimento permanece inalterada nas células próximas as fronteiras, posteriormente assumindo valores constantes iguais aos valores de fronteira nas demais células. Para o segundo caso obtemos uma leve diferença próximo as fronteiras e mantendo-se constantes nas células mais internas. Este exemplo nos comprova nossa afirmação quando definimos o problema 3.2, assim ficou comprovado que quanto maior os valores de  $c_p$  menor será a capacidade de aprendizado dos indivíduos da cadeia, mesmo que a cadeia detenha de vasta criatividade e alta permeabilidade cognitiva a mesma não consegue evoluir.

Nos exemplos que seguem iremos manter os parâmetros adotados nos casos anteriores, entretanto, acrescentando um coeficiente de retenção cognitiva que caracteriza a equação do conhecimento em sua forma geral 5.1 o que pressupõe uma taxa de transferência não unitária. Posto isto, o objetivo é verificar a variação da densidade de conhecimento na cadeia com relação ao seu nível inicial e posteriormente fazer comparações com os resultados obtidos no caso de difusão pura.

**Exemplo 5.5.** Na figura 5.15 estamos supondo os parâmetros  $K_1 = K_2 = 0,0005 \ e \ r = 100$ , para a figura 5.16 é imposta uma retenção cognitiva mil vezes maior ( $K_2 = 0,5$ ) que sua permeabilidade em toda a cadeia, tomando a taxa de geração de conhecimento igual ao parâmetro de permeabilidade.

Os resultados que seguem foram obtidos para o problema em sua forma geral, considerando uma baixa densidade de conhecimento inicial dada pela condição inicial  $u_0 = 2 - \sin(\pi x)$ . Sobre os mesmos é feita uma análise do processo de evolução ou involução da cadeia quando se varia os parâmetros de permeabilidade e retenção cognitiva.



Figura 5.15 – Baixa permeabilidade e baixa retenção cognitiva com alta geração.



Figura 5.16 – Retenção cognitiva mil vezes maior que a permeabilidade cognitiva.

Percebe-se no primeiro gráfico um ganho de densidade de conhecimento nas células mais próximas das fronteiras, isso justifica-se pelo fato de estarmos considerando uma baixa permeabilidade cognitiva o que significa uma baixa troca informação entre as células. Por outro lado, quando aumentamos os valores de retenção, e diminuímos a taxa de geração de modo a se igualar ao parâmetro de permeabilidade, percebemos uma perda em densidade de conhecimento em todas as células da cadeia, isso significa que se não existe incentivos ou criatividade além disso sendo o fluxo de informações no interior da cadeia seja muito baixo teremos o desaparecimento da cadeia ou grupo de pesquisa quando avançarmos no tempo.



Figura 5.17 – Retenção cognitiva igual a taxa de geral e mil vezes menor que a permeabilidade.



Figura 5.18 –  $(d_1)$ 

Por outro lado, quando aumentamos o parâmetro de permeabilidade  $(K_1 = 0, 5)$ , ou seja, é aumentado o fluxo ou troca de conhecimento entre as células, em mil vezes o termo de retenção, e permanecendo com uma baixa taxa geração percebemos um ganho significativo na densidade de conhecimento, principalmente nas células mais internas o que podemos visualizar na figura 5.17. Permanecendo com os mesmos parâmetros de retenção e permeabilidade cognitiva, se é aumentado os incentivos ou surgem pesquisadores mais criativos percebemos uma variação muito alta com relação a ganho de densidade de conhecimento ao longo de toda a cadeia, isso deve-se ao fato de estarmos considerando os valores de permeabilidade muito maiores do que o de retenção, visto que são seus valores que controlam o fluxo de conhecimento na cadeia. Em consequência um distanciamento positivo com relação a condição inicial o que pode ser visualizado na figura 5.18. Seus valores numéricos podem ser vistos nas tabelas 5.9 a 5.12.

$x_i$	Snap0	$u(x_i, t_j)$	Erro de discretização	Erro global
0,0	2	2	0,0000	0,9201e-06
0,1	1,69098300562505	4,10066852325779	0,0000	2,4406e-06
0,2	1,41221474770753	1,51281371489143	0,0222e-014	4,2427e-06
0,3	1,19098300562505	1,98136255917593	0,1554e-014	6,0052e-06
0,4	1,04894348370485	2,00189416623728	0.0888e-014	7,4159e-06
0,5	1	2,00024158508461	0,0000	8,2012e-06
0,6	1,04894348370485	2,00189416623727	0,1332e-014	8,1678e-06
0,7	1,19098300562505	1,98136255917592	0,1554e-014	7,2546e-06
0,8	1,41221474770753	1,51281371489144	0,0666e-014	5,5778e-06
0,9	1,69098300562505	4,10066852325779	0,0000	3,4541e-06
1,0	2	2	0,0444e-014	1,3840e-06

Tabela 5.9 – Tabela de resultados para o caso geral com  $K_1 = 0.0005 = K_2, r = 100 c_p = 0.01$ .

A tabela 5.9 nos mostrou que os valores da solução computacional estão distantes dos valores para condição inicial, todavia, a células mais próximas das fronteiras apresentam valores maiores o que já era esperado pela análise geométrica vista no gráfico 5.15.

$x_i$	Snap0	$u(x_i, t_j)$	Erro de discretização	Erro global
0,0	2	2	0,0000	0,0507e-015
0,1	1,69098300562505	1,98619031126635	0,6661e-015	0,0692e-015
0,2	1,41221474770753	1,98096852089163	0,0000	0,1869e-015
0,3	1,19098300562505	1,97710655824225	0,4441e-015	0,1341e-015
0,4	1,04894348370485	1,97473484753678	0,2220e-015	0,2681e-015
0,5	1	1,97393501794101	0,4441e-015	0,1579e-015
0,6	1,04894348370485	1,97473484753678	0,0000	0,1522e-015
0,7	1,19098300562505	1,97710655824226	0,4441e-015	0,2352e-015
0,8	1,41221474770753	1,98096852089163	0,0000	0,1022e-015
0,9	1,69098300562505	1,98619031126635	0,2220e-015	0,0636e-015
1,0	2	2	0,0000	0,0448e-015

Tabela 5.10 – Tabela de resultados para o caso geral com  $K_1 = 0.0005 = r, K_2 = 0.5, c_p = 0.01.$ 

A tabela 5.10 nos mostra os valores de quantidade de conhecimento próximos ao valor constante considerado nas fronteiras em todas as células. Isso é devido ao fato de estarmos considerando uma troca de informações entre as células, dada pela sua permeabilidade, muito baixa juntamente com uma baixa criatividade. Esta análise numérica, assim como a geométrica vista no gráfico 5.16, indica o desaparecimento da cadeia ao avançarmos no tempo.

Os resultados numéricos visualizados na tabela 5.11 nos indicam um ganho significativo em quantidade de conhecimento com relação as condições iniciais, porém esse acréscimo é percebido de forma mais lenta ficando, ainda, células próximas das fronteiras ou com pouca interação com valores pequenos em quantidade de conhecimento. Por outro lado, na tabela 5.12 seus resultados provém de uma cadeia em que seus elementos apresentam alta criatividade ou incentivos o que acarreta em uma geração de novos conhecimentos que é distribuída ao longo de toda a cadeia, visto que estamos considerando uma alta permeabilidade com relação a retenção cognitiva.

$x_i$	Snap0	$u(x_i, t_j)$	Erro de discretização	Erro global
0,0	2	2	0,0000	0,1137e-015
0,1	1,69098300562505	1,99123594639439	0,2220e-015	0,2879e-015
0,2	1,41221474770753	2,11765165890199	0,0000	0,3369e-015
0,3	1,19098300562505	2,22636513866810	0,4441e-015	0,5819e-015
0,4	1,04894348370485	2,29936021600921	0,4441e-015	0,6671e-015
0,5	1	2,32504619525246	0,4441e-015	0,6875e-015
0,6	1,04894348370485	2,29936021600921	0,4441e-015	0,6693e-015
0,7	1,19098300562505	2,22636513866810	0,4441e-015	0,5856e-015
0,8	1,41221474770753	2,11765165890199	0,0000	0,3443e-015
0,9	1,69098300562505	1,99123594639439	0,2220e-015	0,3158e-015
1,0	2	2	0,2220e-015	0,2138e-015

Tabela 5.11 – Tabela de resultados para o caso geral com  $K_2 = 0.0005 = r, K_1 = 0.5, c_p = 0.01.$ 

$x_i$	Snap0	$u(x_i, t_j)$	Erro de discretização	Erro global
0,0	2	2	0,2665e-014	0,0260e-013
0,1	1,69098300562505	2,96764252817755	0,4885e-014	0,0502e-013
0,2	1,41221474770753	3,50265803583431	0,6661e-014	0,0704e-013
0,3	1,19098300562505	3,91924742166854	0,8438e-014	0,0867e-013
0,4	1,04894348370485	4,18327732510544	0,8882e-014	0,0956e-013
0,5	1	4,27368520338560	0,9770e-014	0,1009e-013
0,6	1,04894348370485	4,18327732510544	0,9770e-014	0,0975e-013
0,7	1,19098300562505	3,91924742166854	0,7105e-014	0,0823e-013
0,8	1,41221474770753	3,50265803583431	0,6661e-014	0,0695e-013
0,9	1,69098300562505	2,96764252817755	0,5329e-014	0,0517e-013
1,0	2	2	0,2665e-014	0,0265e-013

Tabela 5.12 – Tabela de resultados para o caso geral com  $K_2 = 0.0005, K_1 = 0.5 = r c_p = 0.01$ .

Nas figuras 5.19 e 5.20, estamos considerando os parâmetros  $K_1 = 0,0005, K_2 = 0,5$ e  $K_1 = 0,5, K_2 = 0,5$ , respectivamente, ambos com uma taxa de geração nula (r = 0). Percebemos pelas imagens que a diferença de variação de área entre as mesmas foram quase imperceptíveis. Essa diferença pode ser visualizada por meio dos valores numéricos próximos de uma constantes na tabela 5.14.

Nas figuras 5.21 e 5.22, estamos considerando os parâmetros  $K_1 = 100, K_2 = 25$  e  $K_1 = 25, K_2 = 100$ , respectivamente, ambos com uma impedância cognitiva unitária ( $c_p = 1$ ).



Figura 5.19 – Baixa permeabilidade e geração nula.



Figura 5.20 – Permeabilidade igual a retenção cognitiva e geração nula.

Tabela 5.13 – Tabela de resultados para o caso geral com  $K_1 = 0.0005, K_2 = 0.5, r = 0, c_p = 0.01.$ 

	I			1
$x_i$	Snap0	$u(x_i, t_j)$	Erro de discretização	Erro global
0,0	2	2	0,0000	0,0199e-015
0,1	1,69098300562505	1,98618630588226	0,2220e-015	0,0295e-015
0,2	1,41221474770753	1,98096279902236	0,0000	0,0864e-015
0,3	1,19098300562505	1,97709950297373	0,0000	0,1235e-015
0,4	1,04894348370485	1,97472694784616	0,0000	0,1614e-015
0,5	1	1,97392682923233	0,2220e-015	0,1083e-015
0,6	1,04894348370485	1,97472694784616	0,4441e-015	0,1132e-015
0,7	1,19098300562505	1,97709950297373	0,2220e-015	0,1020e-015
0,8	1,41221474770753	1,98096279902236	0,2220e-015	0,0778e-015
0,9	1,69098300562505	1,98618630588226	0,0000	0,0828e-015
1,0	2	2	0,0139e-015	0,0184e-015

Tabela 5.14 – Tabela de resultados para o caso geral com  $K_1 = 0.5 = K_2, r = 0, c_p = 0.01$ .

$x_i$	Snap0	$u(x_i, t_j)$	Erro de discretização	Erro global
0,0	2	2	0,0139e-015	0,0228e-015
0,1	1,69098300562505	1,98672615208598	0,4441e-015	0,0447e-015
0,2	1,41221474770753	1,98185875385125	0,4441e-015	0,0617e-015
0,3	1,19098300562505	1,97830469174427	0,0000	0,1188e-015
0,4	1,04894348370485	1,97613998917922	0,0000	0,1169e-015
0,5	1	1,97541291103985	0,0000	0,1087e-015
0,6	1,04894348370485	1,97613998917922	0,0000	0,0985e-015
0,7	1,19098300562505	1,97830469174427	0,2220e-015	0,0487e-015
0,8	1,41221474770753	1,98185875385125	0,0000	0,0670e-015
0,9	1,69098300562505	1,98672615208598	0,2220e-015	0,0245e-015
1,0	2	2	0.0139e-015	0,0101e-015

Para os resultados da tabela 5.13, foram adotados parâmetros de permeabilidade e retenção cognitiva pequenas e distintos com taxa de geração de novos conhecimentos igual a zero. É perceptível uma variação significativa ao longo de toda a cadeia com relação a condição

inicial, entretanto a cadeia não consegue evoluir. Para a tabela 5.14, igualamos os parâmetro de retenção cognitiva ao de permeabilidade, em consequência percebemos que o ganho em densidade de conhecimento foram menores que os anteriores em células próximas das fronteiras.



Figura 5.21 – Alta permeabilidade, alta retenção, alta geração e impedância unitária.



Figura 5.22 – Alta permeabilidade, alta retenção, taxa de geração nula e impedância unitária.

Para as tabelas 5.15 e 5.16 optamos por elevar os parâmetros de retenção e permeabilidade cognitiva supondo uma impedância cognitiva unitária ( $c_p = 1$ ). Na tabela 5.15 a permeabilidade cognitiva é mantida 4 vezes maior que o termo de retenção. Na tabela 5.16 invertemos os parâmetros de permeabilidade e retenção obtendo densidade conhecimento um pouco maior que no caso anterior. Em ambos os casos percebemos um ganho em densidade de conhecimento com relação a condição inicial, porém a cadeia não consegue evoluir.

$x_i$	Snap0	$u(x_i, t_j)$	Erro de discretização	Erro global
0,0	2	2	0,0278e-015	0,0215e-015
0,1	1,69098300562505	1,97872718140241	0,0000	0,1033e-015
0,2	1,41221474770753	1,97130869027816	0,2220e-015	0,1033e-015
0,3	1,19098300562505	1,96600062563328	0,2220e-015	0,1440e-015
0,4	1,04894348370485	1,96280891050403	0,0000	0,3126e-015
0,5	1	1,96174354190288	0,6661e-015	0,2054e-015
0,6	1,04894348370485	1,96280891050403	0,4441e-015	0,2048e-015
0,7	1,19098300562505	1,96600062563328	0,0000	0,3135e-015
0,8	1,41221474770753	1,97130869027816	0.6661e-015	0,1414e-015
0,9	1,69098300562505	1,97872718140241	0,0000	0,1503e-015
1,0	2	2	0,0278e-015	0,0338e-015

Tabela 5.15 – Tabela de resultados para o caso geral com  $K_1 = 100, K_2 = 25, r = 25, c_p = 1.$ 

Tabela 5.16 – Tabela de resultados para o caso geral com  $K_1 = 25, K_2 = 100, r = 0, c_p = 1.$ 

$x_i$	Snap0	$u(x_i, t_j)$	Erro de discretização	Erro global
0,0	2	2	0,0069e-015	0,0168e-015
0,1	1,69098300562505	1,99334946283602	0,0000	0,0639e-015
0,2	1,41221474770753	1,99094832529944	0,0000	0,1106e-015
0,3	1,19098300562505	1,98920801579598	0,2220e-015	0,0817e-015
0,4	1,04894348370485	1,98815338776014	0,4441e-015	0,0973e-015
0,5	1	1,98780006878150	0,4441e-015	0,1010e-015
0,6	1,04894348370485	1,98815338776014	0,0000	0,1755e-015
0,7	1,19098300562505	1,98920801579598	0,0000	0,1462e-015
0,8	1,41221474770753	1,99094832529944	0,2220e-015	0,0576e-015
0,9	1,69098300562505	1,99334946283602	0,2220e-015	0,0350e-015
1,0	2	2	0,0069e-015	0,0189e-015

**Exemplo 5.6.** Neste exemplo iremos considerar inicialmente uma alta quantidade de conhecimento, dada pela condição inicial  $u_0 = 2 + \sin(\pi x)$ , adotando os parâmetros 10 vezes menor do que os parâmetros do exemplo 5.3, e com as mesmas condições iniciais e de contorno, entretanto, para o caso geral com o termo de 4<sup>a</sup> ordem ( $\lambda \neq 1$ ).

Nas figuras 5.23 e 5.24, estamos considerando uma taxa de transferência  $\lambda = 0, 25$  com  $K_1 = K_2 = 10$  e r = 0 para o segundo caso temos  $K_1 = K_2 = 10 = r$ . Os dados nas tabelas 5.17 e 5.18 ilustram os resultados numéricos para este exemplo.

As tabelas 5.17 e 5.18 destacam a influência dos parâmetros de retenção e permeabilidade cognitiva para o desenvolvimento da cadeia. Para a tabela 5.17 estamos supondo que não haja criatividade ou incentivos a geração de novos conhecimentos, percebemos pelos dados numéricos e análise geométrica que supondo inicialmente uma alta quantidade de conhecimento na cadeia com permeabilidade e retenção intermediários e iguais mas sem geração, esta quantidade de conhecimento inicialmente tende a diminuir de forma significativa convergindo para a densidade nas fronteiras. Por outro lado, igualando-se a taxa de geração aos termos de retenção e permeabilidade, tabela 5.18, percebemos uma perda ainda maior em sua densidade conhecimento inicial, obtendo valores menores que os de suas fronteiras. Diante disso, percebemos que para que uma cadeia evolua não é suficiente que tenhamos altos índices de retenção, permeabilidade e geração de novos conhecimentos, mas sim devemos buscar mecanismos que influenciam o



desenvolvimento da cadeia atrelados a estes parâmetros.

Figura 5.23 – Permeabilidade e retenção cognitiva iguais com geração nula.



Figura 5.24 – Permeabilidade e retenção cognitiva iguais ao parâmetro de geração.

$x_i$	Snap0	$u(x_i, t_j)$	Erro de discretização	Erro global
0,0	2	2	0,0000	0,0299e-015
0,1	2,30901699437495	1,99353197619427	0,2220e-015	0,0396e-015
0,2	2,58778525229247	1,99124869287204	0,2220e-015	0,0640e-015
0,3	2,80901699437495	1,98960983829445	0,4441e-015	0,0835e-015
0,4	2,95105651629515	1,98862302283239	0,0000	0,1791e-015
0,5	3	1,98829346787247	0,0000	0,1862e-015
0,6	2,95105651629515	1,98862302283239	0,4441e-015	0,0945e-015
0,7	2,80901699437495	1,98960983829445	0,2220e-015	0,0809e-015
0,8	2,58778525229247	1,99124869287204	0,2220e-015	0,0598e-015
0,9	2,30901699437495	1,99353197619427	0,0000	0,0671e-015
1,0	2	2	0,0139e-015	0,0137e-015

Tabela 5.17 – Tabela de resultados para caso geral, permeabilidade e retenção cognitiva iguais com geração nula.

Tabela 5.18 – Tabela de resultados para o o	caso geral,	permeabilidade	e retenção	cognitiva	iguais
ao parâmetro de geração.					

$x_i$	Snap0	$u(x_i, t_j)$	Erro de discretização	Erro global
0,0	2	2	0,0000	0,0255e-015
0,1	2,30901699437495	1,99686624414104	0,2220e-015	0,0342e-015
0,2	2,58778525229247	1,99580132256787	0,0000	0,1138e-015
0,3	2,80901699437495	1,99505064687169	0,2220e-015	0,0816e-015
0,4	2,95105651629515	1,99460420804322	0,2220e-015	0,0997e-015
0,5	3	1,99445605356474	0,6661e-015	0,1093e-015
0,6	2,95105651629515	1,99460420804322	0,2220e-015	0,1074e-015
0,7	2,80901699437495	1,99505064687169	0,6661e-015	0,0947e-015
0,8	2,58778525229247	1,99580132256787	0,4441e-015	0,0720e-015
0,9	2,30901699437495	1,99686624414104	0,2220e-015	0,0439e-015
1,0	2	2	0,0035e-015	0,0282e-015

**Exemplo 5.7.** Neste exemplo vamos supor uma cadeia com um alto índice de conhecimento no estágio inicial dado por  $u_0 = 2 + \sin(\pi x)$ . Aqui, estão sendo considerados os termos de retenção, permeabilidade e geração de novos conhecimentos iguais a 0, 5, 100 e 0, 5, respectivamente, adotando uma capacidade de aprendizado  $c_p = 1$ . Em seguida faremos uma comparação com o casos simples para as mesmas configurações, isto é,  $K_1 = 100$  e r = 0, 5, e neste caso não temos o parâmetro de retenção.

As figuras 5.25 e 5.26, nos mostram os gráficos para a evolução/involução da cadeia quando atribuímos os mesmos parâmetros de permeabilidade e geração para o caso geral e simples, considerando uma alta densidade de conhecimento inicial. Para o caso geral, figura 5.25, é atribuído o termo de retenção cognitiva que optamos por tomar seu valor igual ao da taxa de geração, percebemos houve um aumento gigantesco em densidade de conhecimento com relação a condição inicial. Essa característica da cadeia deve-se ao fato de estarmos considerando um alto fluxo de informações entre as células, é controlada pelo termo de retenção cognitiva. Por outro lado, para o caso simples, figura 5.26, percebemos uma perda significativa em quantidade de conhecimento com relação a densidade inicial.



Figura 5.25 – Caso geral com alta permeabilidade, baixa retenção cognitiva e baixa geração de novos conhecimentos.



Figura 5.26 – Caso simples com alta permeabilidade cognitiva e baixa geração de novos conhecimentos.

A tabela 5.19 apresenta os valores numéricos do exemplo acima para o problema em sua forma geral. Percebemos os maiores valores em densidade de conhecimento nas células mais próximas do centro, isso é devido ao fato das mesmas receberem maiores informações das células vizinhas. A tabela 5.20 representa os valores numéricos para o caso simples, deixando nítida a perda de densidade de conhecimento com relação a condição inicial.

$x_i$	Snap0	$u(x_i, t_j)$	Erro de discretização	Erro global
0,0	2	2	0,1332e-014	0,1401e-014
0,1	2,30901699437495	4,62463450590602	0,2665e-014	0,3051e-014
0,2	2,58778525229247	5,96311910346818	0,4441e-014	0,4726e-014
0,3	2,80901699437495	7,01363267086694	0,6217e-014	0,6176e-014
0,4	2,95105651629515	7,68043332634259	0,7105e-014	0,7092e-014
0,5	3	7,90877185127632	0,7994e-014	0,7347e-014
0,6	2,95105651629515	7,68043332634259	0,5329e-014	0,6749e-014
0,7	2,80901699437495	7,01363267086694	0,7105e-014	0,6205e-014
0,8	2,58778525229247	5,96311910346818	0,4441e-014	0,4795e-014
0,9	2,30901699437495	4,62463450590602	0,2665e-014	0,3135e-014
1,0	2	2	0,1776e-014	0,1516e-014

Tabela 5.19 – Tabela de resultados para o caso geral com alta permeabilidade, baixa retenção cognitiva e baixa geração de novos conhecimentos.

Tabela 5.20 – Caso simples com alta permeabilidade cognitiva e baixa geração de novos conhecimentos.

$x_i$	Snap0	$u(x_i, t_j)$	Erro de discretização	Erro global
0,0	2	2	0,0555e-015	0,0684e-015
0,1	2,30901699437495	1,91603168273385	0,4441e-015	0,1428e-015
0,2	2,58778525229247	1,90938110134012	0,2220e-015	0,1500e-015
0,3	2,80901699437495	1,90453383602972	0,2220e-015	0,1470e-015
0,4	2,95105651629515	1,90158634738232	0,2220e-015	0,1337e-015
0,5	3	1,90059729042202	0,2220e-015	0,1070e-015
0,6	2,95105651629515	1,90158634738232	0,0000	0,1176e-015
0,7	2,80901699437495	1,90453383602972	0,0000	0,0717e-015
0,8	2,58778525229247	1,90938110134012	0,0000	0,0425e-015
0,9	2,30901699437495	1,91603168273385	0,0000	0,0235e-015
1,0	2	2	0,0000	0,0104e-015

Para o modelo de transmissão do conhecimento proposto em nosso trabalho, observamos nos resultados anteriores que mesmo com criatividade ou incentivos baixos, que por sua vez resulta em uma taxa de geração de novos conhecimentos pequena, o acréscimo ou decréscimo do nível intelectual em uma determinada cadeia é garantindo até certo nível de evolução ou involução. Percebe-se ainda que os valores de  $c_p$  não influenciam na solução do problema, seus valores apenas controlam a velocidade de aprendizado de uma cadeia. Tais resultados nos mostram que mesmo quando o aumento a taxa de transferência a cadeia não evolui, isso se deve ao fato de valores pequenos de criatividade ou incentivos, o que consequente nos dão valores pequenos de geração de conhecimento.

#### 5.1.1 Análise de erros

A obtenção de uma solução numérica para determinado problema físico exige a aplicação de diferentes técnicas numéricas e computacionais que nem sempre nos conduzem a resultados satisfatórios. Isso é percebido mesmo quando se é utilizado métodos adequados e o tratamento de dados é feito de maneira correta, o que nos leva a concluir que estamos cometendo um erro que é proveniente do processo de resolução que geralmente estão associados aos erros de truncamento, de arredondamento ou representação de resultados de operações aritméticas do computador. Esses erros podem ser medidos ou mensurados pela diferença entre o valor exato e seu valor aproximado.

Todavia, uma particularidade de nosso problema é que não conhecemos a solução analítica do mesmo e, portanto, não é possível calcular o erro absoluto a cada interação. Então, o que faremos é avaliar uma limitação máxima para o erro de modo que possamos avaliar se os erros no processo de interação não são amplificados conforme a resolução do problema. Para se fazer esta avaliação é necessário introduzir uma norma específica, então, tomando como base a norma definida em 4.1 definimos a norma  $L^2$  na malha de u como sendo

$$||u||_{h} = \left(h \sum_{i=0}^{N-1} |u_{i}|^{2}\right)^{1/2}.$$
(5.3)

Portanto, uma limitação para o erro está relacionada com a ordem de precisão da solução, que pode ser calculada da solução obtida numericamente a partir da definição 5.8.

**Definição 5.8.** Seja u(x,t) a solução do problema em diferenças finitas. O erro em  $t = j\Delta t$  é calculado por

$$Erro(t) = \left\| u(:,t) - u^{j} \right\|_{h} = \left( h \sum_{i=0}^{N-1} \left| u(x_{i},t) - u(i,j) \right|^{2} \right)^{1/2}.$$
(5.4)

Nas tabelas 5.1 a 5.19, encontram-se os valores numéricos para solução numérica do método de Diferenças Finitas, cujos elementos são constituídos pelos valores numéricos obtidos pela resolução do problema apresentado no caso em que o coeficiente transferência de conhecimento seja igual a 1 ou menor que 1. Para avaliarmos a amplificação de erros recorremos a construção do método no capítulo 3 que nos levou a conclusão que o erro global é gerado pelo acúmulo dos erros de trucamento e de aproximação numérica, erros locais, de cada passo de tempo, propagados pela evolução da construção da solução aproximada, e pelas potências da matriz de amplificação 3.15 obtendo um erro crescente se algum de seus autovalores tem módulo maior que 1. Se todos tem módulo menor que 1, temos o erro decrescente e, portanto, estabilidade. Para análise de estabilidade foram utilizadas construções de técnicas baseadas na norma do máximo. No capítulo 4 fizemos um estudo sobre análise de erros definindo normas e resultados que nos conduziram a resultados satisfatórios, os mesmo tiveram como alicerce o lema de Céa 4.5 nos conduzindo ao resultado 4.37. A análise de erros por meio dos autovalores da matriz de amplificação será feita mediante uma comparação dos resultados numéricos obtidos para os casos em que temos uma difusão pura  $\lambda = 1$  ou para o caso geral com  $\lambda < 1$ .

No exemplo 5.1 obtemos resultados para o caso de difusão pura atribuindo variações nos parâmetros de geração de conhecimento, permeabilidade e impedância cognitiva sendo visualizados nos respectivos gráficos para o primeiro exemplo do problema em sua forma simples, com seus respectivos valores numéricos nas tabelas 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4. Seus autovalores estão representados pelos vetores colunas  $v_i$  com entradas nos quadros 5.21.

$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$
0.4974	0.9966	-1.2868	-0.5462
0.4900	0.9867	-1.0731	-0.8611
0.4784	0.9711	-1.0334	-0.9340
0.4634	0.9512	-1.0196	-0.9608
0.4464	0.9285	-1.0132	-0.9734
0.4286	0.9048	-1.0098	-0.9802
0.4112	0.8816	-1.0078	-0.9842
0.3658	0.8210	-1.0065	-0.9868
0.3720	0.8293	-1.0057	-0.9884
0.3820	0.8427	-1.0050	-0.9899
0.3953	0.8605	-1.0053	-0.9893

Tabela 5.21 – Tabela de autovalores para a matriz de amplificação para o primeiro exemplo.

Percebemos que para o vetor  $v_3$  os módulos dos autovalores são maiores que 1, os quais foram obtidos quando atribuímos os parâmetros  $K_1 = 100$ , r = 100 e  $c_p = 0,01$ , indicando uma amplificação de erros no processo de resolução do problema. Por outro lado, com uma mudança nos parâmetros tais que  $K_1 = 0,0005$ , r = 0,5,  $K_1 = 0,0005$ , r = 0 e  $c_p = 0,01$  e  $K_1 = 100$ , r = 0 e  $c_p = 1$  obtemos os vetores  $v_1$ ,  $v_2$  e  $v_4$  com seus valores em módulo menores que 1 nos indicando que a magnitude do erro está decrescendo.

As tabelas 5.22 e 5.24 representam os valores numéricos para a limitação dos erros cometidos em cada interação no processo de resolução do nosso problema. Estes valores foram obtidos a partir dos exemplos 5.1 e 5.5, que correspondem a sua forma simples e geral, respectivamente. Para o cálculo dos mesmos foi utilizada a norma 5.4. A segunda coluna da tabela 5.22 representa a norma dos erros cometido em cada interação para os parâmetros  $K_1 = 0,0005$ , r = 0,5 e  $c_p = 0,01$ . Para a terceira coluna  $K_1 = 0,0005$ , r = 0 e  $c_p = 0,01$ . Para a quarta coluna  $K_1 = 100$ , r = 100 e  $c_p = 0,01$ , e para a quinta coluna os parâmetros  $K_1 = 100$ , r = 0 e  $c_p = 1$ .

Número de interação	NORMA DO ERRO	NORMA DO ERRO	NORMA DO ERRO	NORMA DO ERRO
1	0,308733127293551	0,298488573943339	0,307815109996674	0,245503020293956
2	9,42872877077896e-17	1,50629946142280e-16	8,88178419700125e-17	1,33226762955019e-16
3	1,08814600574062e-16	1,19614938685988e-16	1,17494960919044e-16	1,25730000332182e-16
4	7,69185074553426e-17	1,11109004781441e-16	1,40460764451511e-16	1,06633439369000e-16
5	9,15513359704448e-17	9,16354437842059e-17	6,28650001660909e-17	1,15511223068214e-16
6	6,66133814775094e-17	8,88720355451143e-17	4,44089209850063e-17	1,04295984227098e-16
7	4,96506830649455e-17	1,04185129296683e-16	4,44955726205437e-17	9,17194744701661e-17
8	7,02166693715340e-17	8,88286833300737e-17	8,88178419700125e-17	1,01753620972552e-16
9	6,28036983473510e-17	9,93401481529004e-17	8,88178419700125e-17	8,30814836211045e-17
10	6,28036983473510e-17	1,35128612080253e-16	8,89045358334726e-17	5,90091631821035e-17

Tabela 5.22 – Norma do erro para o primeiro exemplo do caso simples

A figura abaixo ilustra os gráficos para a norma do erro correspondente aos valores da segunda e quinta coluna da tabela 5.22, respectivamente, onde percebemos seus valores decrescendo a cada interação, além disso temos a garantia que os erros obtidos pela solução numérica de fato decrescem a cada interação por meio dos autovalores da matriz de amplificação representandos na segunda e quarta coluna do quadro 5.21.



Figura 5.27 – Norma do erro para o caso simples

De modo análogo para o caso geral e tomando  $\lambda = 0,25$  e mantendo os parâmetros fazendo  $K_2 = K_1$  obtemos os resultados ilustrados na figura representativa para o exemplo 5.5 do problema em sua forma geral, com seus respectivos valores numéricos nas tabelas 5.9 a 5.12. Os autovalores das matrizes de amplificação estão representados no quadro 5.23. Este, nos mostra que teremos os erros crescendo quando aproximamos a solução do problema em sua forma geral apenas para o primeiro caso, primeira coluna, visto que seus autovalores apresentam módulo maiores que 1. Para os demais exemplos temos a garantia de erro decrescendo durante o processo de resolução numérica do problema.

$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$
-98.1516	-0.7842	0.3904	0.0431
-93.1792	-0.9680	-0.2718	-0.4537
-80.7106	-0.9912	-0.5917	-0.6937
-62.9153	-0.9965	-0.7447	-0.8085
-45.8942	-0.9983	-0.8252	-0.8689
-33.1432	-0.9990	-0.8713	-0.9034
-24.6572	-0.9994	-0.8993	-0.9244
-19.2649	-0.9995	-0.9170	-0.9377
-15.9114	-0.9996	-0.9283	-0.9462
-12.8315	-0.9997	-0.9391	-0.9543
-13.9016	-0.9997	-0.9353	-0.9514

Tabela 5.23 – Tabela de autovalores para a matriz de amplificação para o primeiro exemplo em sua forma geral.

A tabela 5.24 ilustra os resultados numéricos para o exemplo 5.5. Na primeira coluna verificamos a oscilação nos valores da norma do erro, o que já era esperado visto que para este primeiro caso a solução numérica tende à apresentar erros crescentes devido aos autovalores da matriz amplificação apresentarem módulo maiores que 1. Por outro lado, as demais colunas apresentam valores aceitáveis indo para zero e garantindo que o erro cometido no processo de aproximação da solução do problema é decrescente, devido os autovalores da matriz de amplificação apresentarem módulo menores que 1.

Tabela 5.24 – Norma do erro para o primeiro exemplo do caso geral

Número de interação	NORMA DO ERRO	NORMA DO ERRO	NORMA DO ERRO	NORMA DO ERRO
1	0,694751627967039	0,272032623792919	0,144689730070549	0,543220820306474
2	2,99554549237514e-16	7,69310257250089e-17	3,42553732502837e-16	1,63546064054290e-15
3	1,52226111724852e-16	9,15618536723544e-17	2,81743018702974e-16	1,20253093385712e-15
4	2,63663359746101e-16	8,00593208497344e-17	1,19574679205636e-16	1,82846687799911e-15
5	2,27528013451375e-16	5,87638697694963e-17	1,19574679205636e-16	1,68651611358668e-15
6	3,51784812785524e-16	7,02440924029922e-17	2,34989921838088e-16	7,15038792091987e-16
7	1,93573998765325e-16	9,42055475210265e-17	2,16422309957864e-16	2,17513063494196e-15
8	4,44643974850684e-16	8,60087025619581e-17	1,27554914331763e-16	1,96167329167760e-15
9	2,64596684292084e-16	1,06488851588098e-16	1,74838096756154e-16	2,56939286613946e-15
10	2,84355838317334e-16	1,06488851588098e-16	1,06488851588098e-16	2,33812020075564e-15

Os gráficos representados na figura abaixo, nos mostram a variação para a norma do erro quando impomos a equação discretizada de difusão de conhecimento os parâmetros  $K_2 = 0,0005 = r, K_1 = 0,5$  e  $K_1 = 0,5 = r, K_2 = 0,0005$ , respectivamente. Em ambos os casos percebemos a norma do erro indo para zero, entretanto, com melhores resultados para a primeira figura.



Figura 5.28 – Norma do erro para o caso geral terceira e quarta coluna da tabela 5.24

A tabela 5.25 representa os valores numéricos para a norma do erro no processo de aproximação da solução do problema em sua forma geral, equação 5.1, e simples, equação 5.2. Em ambos os casos consideramos uma alta densidade de conhecimento inicial, alta permeabilidade cognitiva ( $K_1 = 100$ ) e uma pequena taxa de geração de conhecimento (r = 0, 5). Na mesma tabela incluímos uma segunda e quarta coluna para ilustrar os autovalores da matriz de amplificação para os dois casos.

Número de interação	NORMA DO ERRO $\lambda = 1$	autovalores	NORMA DO ERRO $\lambda = 0.25$	autovalores
1	0,245582896438848	-0.5474	1,39623373422263	0.0168
2	6,68442777728834e-17	-0.8614	2,76559207298970e-15	-0.6031
3	1,20728777924415e-16	-0.9341	2,21031993015646e-15	-0.8125
4	1,04148151432413e-16	-0.9609	2,40506186771423e-15	-0.8966
5	1,08920743926147e-16	-0.9734	2,11362672056344e-15	-0.9362
6	1,02357505330418e-16	-0.9802	2,97506627767849e-15	-0.9569
7	1,04148151432413e-16	-0.9843	3,55839902272479e-15	-0.9687
8	7,02166693715340e-17	-0.9868	3,54952035245765e-15	-0.9756
9	1,13220977340074e-16	-0.9884	2,80251608159645e-15	-0.9799
10	6,30485480024343e-17	-0.9899	1,70440027090950e-15	-0.9837

Tabela 5.25 – Norma do erro para o caso simples e geral com os respectivos autovalores.

Para este exemplo temos a garantia de erros decrescente no processo de resolução numérica do problema em ambos os casos, isso, devido aos autovalores das matrizes de amplificação apresentarem módulo menor que 1. Pela análise geométrica percebemos que a norma do erro vai a zero de forma muito rápida, como pode ser visualizada no gráfico abaixo.



Figura 5.29 – Norma do erro para o caso geral e simples, tabela 5.25

Os resultados numéricos obtidos acima foram modelados pelo método implícito de Crank-Nicolson os quais pela análise gráfica dos erros, bem como os resultados numéricos tanto para as normas dos erros cometido no processo de resolução, quanto para a evolução dos erros de trucamento local e global, mostra-se confiável para os resultados esperados. A escolha do método foi devida ao fato de garantia de estabilidade, vista na seção 3.3, e sua fácil implementação o qual fizemos uso da linguagem Matlab.

#### 6 CONCLUSÃO

Quando se trata de conhecimento, deve-se analisar como é feita sua retenção, transferência e difusão e como é possível armazenar esse conhecimento de forma que possa ser reaproveitado posteriormente, gerando novos conhecimentos a partir dos tais. Visto que os objetivos inicialmente consistiam em uma análise numérica do problema de propagação de conhecimento definido pelo modelo 3.2, de modo que fosse possível extrair informações a cerca da convergência por meio de métodos específicos, podemos afirmar, por meio dos resultados numéricos e técnicas desenvolvidas nos capítulos 3 e 4, alcançamos nosso objetivo.

É notório que estamos diante de uma sociedade que a difusão do conhecimento tornou-se imprescindível para o desenvolvimento sócio econômico dos países. Nesse sentido, a busca de técnica ou metodologias que possam explicar esse processo de transmissão de saberes de modo que, aqui, buscamos analisar um modelo matemático unidimensional e transiente consistente na conversão de avanços tecnológico em células de conhecimento já desenvolvido por outros autores. Primeiramente buscamos os construtores necessários para a retenção, difusão e propagação do conhecimento, tendo como premissa uma visão construtivista, ou seja, foram levantados os principais estudiosos sobre o tema, tais como Bulnes (2006), Bevilacqua et al. (2009) e Bevilacqua et al. (2010).

Embasado nas literaturas sobre o tema buscamos uma solução numérica para problema. Para tanto, foi necessário um estudo exaustivo dos princípios e teoria matemática dos métodos numéricos. Buscamos uma visão geral dos métodos de diferenças finitas explícito e implícito de modo a nos auxiliar na escolha do melhor método.

Na seção 3.2 buscamos uma formulação em diferenças finitas centradas de segunda e quarta ordens na variável espacial x e diferenças progressiva para a variável temporal t nos levando a equação de diferenças 3.11. A solução desta equação é feita por meio do sistema linear 3.14 que foi implementado e simulado na linguagem Matlab, apresentando seus resultados numéricos no capítulo 5. A estabilidade e consistência do método foi estudada na seção 3.3 obtendo resultados satisfatórios quando foi aplicado o teorema de equivalência de Lax.

Feita toda esta análise de convergência e estabilidade para o método de diferenças finitas fomos conduzidos ao capítulo 4 para definimos uma norma e utilizar o método de Ritz acoplado ao de Galerkin com o objetivo de analisarmos o quão bem a solução aproximada converge da solução real. Para este estudo foi necessário utilizar uma série de resultados da análise funcional, os quais nos permitiram medir por intermédio da norma  $\|.\|_0$ , em face da desigualdade de Poincaré e o lema de Céa, uma estimativa para a solução do nosso problema.

Dificuldades foram encontradas no desenvolvimento deste trabalho devido ao problema ser obtido por um acréscimo de novos parâmetros a equação de difusão, gerando uma nova equação até então pouco estudada. Tais dificuldades foram explicitadas durante o processo da solução numérica por meio de análise de erros, visto que não detínhamos da solução analítica. Entretanto, com relação a estabilidade e convergência do método, segundo as referências teóricas disponíveis sobre estes, alcançando as expectativas determinadas pelas mesmas.

Pensando em trabalhos futuros, podemos visualizar alternativas que poderiam seguir desse trabalho. Uma alternativa é testar o método em sua implementação com o modelo no caso bidimensional com uma formulação em Elementos Finitos e com relação a espaços de aproximação com ordens diferentes. Visto que nosso trabalho carece de estudo mais aprofundado sobre as mais variadas técnicas de aproximação em espaços de dimensão finita, e uma comparação dos resultados numéricos obtidos por uma outra ferramenta diferente do Matlab, a exemplo o FreeFem++ com a seguinte abordagem:

- Um modelo em elementos finitos;
- Um modelo 2D;
- $K_1, K_2, r \in c_p$  como variáveis (aleatórias) randômicas;
- Comparar erros nas implementações Matlab e FreeFem++;
- Estimativa dos parâmetros;
- Comparação com resultados reais;
- Comparação do custo computacional via MDF (Matlab) x MEF (FreeFem++).

Portanto, seria de grande importância uma continuação desse trabalho que se aprimorem os resultados teóricos sobre este método, buscando, por exemplo, teoremas de análise de erros em diferentes normas.

Com a vivencia dos pontos positivos que nos engrandecem, e os negativos que nos fortalecem, esperamos que nosso trabalho de alguma forma seja útil, sobretudo, para aqueles que desejam ou precisam assimilar seus conhecimentos sobre o assunto.

### REFERÊNCIAS

ALVES, L. M. Métodos dos elementos finitos. Universidade Federal do Paraná. Programa de Pós Graduação em métodos numéricos em engenharia, 2007.

ARAÚJO, A. L. M. Matemática computacional. Mestrado Integrado em Engenharia Eletrotécnica e de Computadores. Universidade de Coimbra, 2012.

ARAÚJO, C. A. Á. A ciência como forma de conhecimento. **Ciências e Cognição/Science and Cognition**, v. 8, 2006.

AUSUBEL, D. P. Aquisição e retenção de conhecimentos: uma perspectiva cognitiva. Lisboa: Plátano, v. 1, 2003.

BEVILACQUA, L.; GALEÃO, A. C. N.; PIETROBON, F. C.; MONTEIRO, S. L. Um modelo de difusão do conhecimento em um meio heterogêneo. LNCC, Petrópolis, RJ, 2009.

BEVILACQUA, L.; GALEÃO, A. C. N.; PIETROBON, F. C.; MONTEIRO, S. L. Mecánica computacional, volume xxix. number 20. interdisciplinary topics in mathematics (a). 2010.

BULNES, M. E. P. **TRANSFERÊNCIA DE CONHECIMENTO COMO PROCESSO DI-FUSIVO**. Tese (Doutorado) — LABORATORIO NACIONAL DE COMPUTACAO CIENTÍ-FICA, 2006.

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D.; TASKS, A. Análise numérica. [S.l.]: Cengage Learning, 2011.

CHOO, C. W.; ROCHA, E. A organização do conhecimento: como as organizações usam a informação para criar significado, construir conhecimento e tomar decisões. [S.1.]: Senac São Paulo, 2003.

CIANCONI, R. d. B. Gestão do conhecimento: visão de indivíduos e organizações no brasil. **Gestão do conhecimento: visão de indivíduos e organizações no Brasil**, Ciência da Informação, 2003.

CLEMENTI, J. A.; DANDOLINI, G. A.; SOUZA, J. A. A gestão do conhecimento eo desenvolvimento territorial sustentável nos órgãos públicos: a contribuição das tic, estratégias de comunicação e sistema de informação. In: **10º Congresso Brasileiro de Gestão do Conhecimento**. [S.l.: s.n.], 2011.

CORRÊA, F. Gestão do conhecimento aplicada ao setor de tecnologia da informação: Proposição de um modelo. **Projetos e Dissertações em Sistemas de Informação e Gestão do Conhecimento**, v. 3, n. 1, 2014.

DAMIANI, W. B. Gestão do conhecimento: uma comparação entre empresas brasileiras e norteamericanas. Escola de Administração de Empresas de São Paulo, Fundação Getulio Vargas, Núcleo de Pesquisas e Publicações, 2003.

DEWITT, D. P.; INCROPERA, F. P. Fundamentos de transferência de calor e de massa. Livros Técnicos e Científicos (LTC) Editora SA, 2003.

FERREIRA, A. d. H. Dicionário aurélio eletrônico. [S.l.]: Ed. Nova Fronteira, 1993.

FIGUEIREDO, D. G. de. Análise de Fourier e equações diferenciais parciais. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1986.

FORTUNA, A. de O. Técnicas computacionais para dinâminca dos fluidos: conceitos básicos e aplicações. [S.l.]: Edusp, 2000.

FRANCO, N. B. Cálculo numérico. [S.l.]: Pearson, 2006.

FUJINO, A.; HYODO, T. Produção e difusão do conhecimento científico: o potencial de contribuição da Biblioteca Universitária na formação de redes acadêmicas. Trabalho apresentado no XIV SNBU - Seminário Nacional de Bibliotecas Universitárias. Salvador: [s.n.], 2006. Disponível em: <a href="http://www.snbu2006.ufba.br/soac/viewabstract.php?id=207">http://www.snbu2006.ufba.br/soac/viewabstract.php?id=207</a>>.

GALVIS, J.; VERSIEUX, H. M. Introdução à aproximação numérica de equações diferenciais parciais via o método de elementos finitos. **28 Colóquio Brasileiro de Matemática, Impa**, 2011.

HANSELMAN, D.; LITTLEFIELD, B.; MARTINS, C. S. **Matlab 6: curso completo**. [S.l.]: Prentice Hall, 2003.

IÓRIO, V. Edp: Um curso de graduação. Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2007.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. de A. Metodologia científica. [S.l.]: Atlas São Paulo, 1991.

LAPIDUS, L.; PINDER, G. F. Numerical solution of partial differential equations in science and engineering. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011.

LEITE, F. C. L.; COSTA, S. M. d. S. Gestão do conhecimento científico: proposta de um modelo conceitual com base em processos de comunicação científica. **Ci. Inf**, SciELO Brasil, v. 36, n. 1, p. 92–107, 2007.

LEME, M. I. d. S. **Aquisição de conhecimento**. [S.l.]: Associação de Psicologia de São Paulo, 2005.

LIMA, E. L. Análise real vol. 3-análise vetorial. **Coleção Matemática Universitária, SBM**, 2007.

LOBÃO, D. C. **Introdução aos Métodos Numéricos**. [S.l.]: Universidade Federal Fluminense. Volta Redonda, RJ. Apostila.

MACHADO, J. A. S. Difusão do conhecimento e inovação: o acesso aberto a publicações científicas. 2007.

MATURANA, H.; VARELA, F.; SANTOS, J. P. dos. A árvore do conhecimento: as bases biológicas do entendimento humano. [S.l.]: Editorial Psy, 1995.

MELO, K. J. M. de. Aplicação do método das diferenças finitas explicito na solução da equação do calor para o caso transiente e unidimensional. **Angicos, RN : UFERSA**, 2011.

NONAKA, I. A empresa criadora de conhecimento. Harvard Business Review, v. 11, 1991.

NONAKA, I.; TAKEUCHI, H. Criação de conhecimento na empresa. [S.l.]: Elsevier Brasil, 1997.

PEREIRA, S. E. F. A difusão do conhecimento científico e da inovação em ordenamento do território. **Dissertação de mestrado. Universidade Nova de Lisboa**, 2006.

PEROTTO, F. S.; VICARI, R. M. Modelagem do conhecimento, sistemas especialistas eo projeto seamed. Revista eletrônica de Iniciação científica. SBC (Sociedade Brasileria de Computação). Porto Alegre, Ano, v. 1, 2001.

PIAGET, J. Psicología e pedagogía. [S.l.]: Rio de Janeiro: Forense Universitária,, 1985.

QUARTERONI, A. Numerical models for differential problems. [S.1.]: Springer Science & Business Media, 2010. v. 2.

SANTOS, R. J. Equações diferenciais parciais: Uma introdução. Universidade Federal de Minas Gerais, 2011.

SPIVAK, M. O cálculo em variedades. coleção clássicos da matemática. Ciência Moderna, 2003.

SÜLI, E. Lecture notes on finite element methods for partial differential equations. **Mathematical Institute, University of Oxford**, 2012.

VYGOTSKI, L. S. A formação social da mente. Psicologia, v. 153, p. V631, 1989.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. Equações diferenciais. Editora Pearson Makron Books v.2, São Paulo, 2001.

Apêndices

## APÊNDICE A – CÓDIGO EM MATLAB PARA DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA EM FUNÇÃO DO TEMPO E DA POSIÇÃO DENTRO DE UMA PLACA

Calculo da equacao de difusao de calor: Placa de espessura 2cm: geometria 1DCondicoes iniciais:  $T(x, 0) = 100x, x \le 1$ T(x,0) = 100(2-x), x > 1Condicoes de contorno: T(0,t) = 0, T(2,t) = 0 clear; Propriedades fisicas do aço  $k = 0.13; C = 0.11; \rho = 7.8;$  $\alpha^2 = k/(\rho * C);$  Difusividade termica h = input('Incrementoh =');Passo de x nx = round(2/h); nx = nx + 1; Numero de passos de x  $dt = h^2/(2 * \alpha^2);$ Calculo do passo de tempo (criterio de convergência) nt = 11; Numero de passos de tempo Condicoes iniciais for i = 1 : nxx(i) = (i-1) \* h;if  $x(i) \leq 1$ ; T(i, 1) = 100 \* x(i);elseifx(i) < 2;T(i, 1) = 100 \* (2 - x(i));end end Condicoes de contorno for k = 1: nt T(1, k) = 0; T(nx, k) = 0; end Calculo da EDP t(1) = 0; for k = 1: nt - 1 t(k+1) = t(k) + dt;for i = 2: nx - 1 T(i, k + 1) = 1/2 \* (T(i - 1, k) + T(i + 1, k));end end Transposicao da matriz T e do vetor t T = T'; t = t';Solucao analitica for k = 1: nt for i = 1: nxTe(i,k) = 0; for n = 0:1000 $Te(i,k) = Te(i,k) + \dots$  $1/(pi^2 * (2 * n + 1))^2 * cos((2 * n + 1) * pi * (x(i) - 1)/2) * ...$ 

APÊNDICE A. Código em Matlab para distribuição de temperatura em função do tempo e da posição dentro de uma placa 86

 $exp(-0.3738 * (2 * n + 1).^{2} * t(k));$  $end \ end \ end$ Transposicao da matriz Te Te = 800 \* Te';

# APÊNDICE B – CÓDIGO EM MATLAB PARA DISTRIBUIÇÃO DE CONHECIMENTO EM UMA CADEIA

```
clear all, clc, clf
tic
dt = 0.01;
dx = 0.1;
Tf=0.1;
N=floor(Tf/dt);
                 %arredonda para o inteiro mais proximo
% Propriedades fisicas do problema
lambda; cp; k1; k2; r;
alpha=(dt*lambda*k1)/(2*cp*dx^2);
beta = (dt*lambda*(1-lambda)*k2)/(2*cp*dx^4);
delta=(r*dt)/cp;
nx = round(2/dx);
rho=(1+2*alpha+6*beta);
w=1-2*alpha-6*beta-delta;
eta=alpha+4*beta;
c=1/cp;
% Condições iniciais
%for x = 0:1
u0 = Q(x) 2 + sin(pi * x);
%end
% Condições de contorno de Dirichlet
left = @(x) 2; % condição de contorno esquerdo
right = Q(x) = 2;
                 % condição de contorno direito
% relação da malha
tvals=0:dt:Tf;
                            %Tamanho do espaço de tempo
xvals=0:dx:1;
                            %Tamanho do espaço
J=length(xvals); % Tamanho do xvals
u=zeros(J,N+1);
u(:,1)=u0(xvals);
u=zeros(J,N+1);
u(:,1)=left(xvals);
u=zeros(J,N+1);
u(:,1)=right(xvals);
%Criar a matriz espassa
m=N+1;
A(1,1) = rho;
A(1,2) = -eta;
A(1,3) = beta;
for i=2:m
 A(i,i) = rho;
 A(i,i-1) = -eta;
 for i=2:m-1
 A(i,i+1) = -eta;
 end
```

```
for i=2:m-2
 A(i,i+2) = beta;
 end
 for i=3:m
 A(i, i-2) = beta;
 end
end
%Criar a matriz espassa B
B(1,1) = w;
B(1,2) =eta;
B(1,3) =-beta;
for i=2:N+1
 B(i,i-1) = eta;
 B(i,i) = w;
 for i=2:m-1
 B(i,i+1) = eta;
 end
 for i=2:m-2
 B(i,i+2) = -beta;
 end
 for i=3:m
 B(i,i-2) = -beta;
 end
end
D = inv(A);
                      %Calculo da inversa da matriz A
C = D*B;
eiq(C)
[L,U] = lu(C); %Decoposição da matriz C em LU
cond(C);
%% Tempo de interação
Tf1=10;
snap0=u0(xvals);
n=0;
nframe=floor(N/Tf1);
                             %arredonda para o inteiro mais proximo
N=nframe*Tf1;
for k=1:Tf1;
for m = 1:nframe;
  n=n+1;
                                    % contador para iteração
   z=C*u(:,n);
   z([1,J])=0;
   y = L \setminus z;
   u(:, n+1) = U \setminus y;
end
snap1 = [left(n*dt);u(2:J-1,n);right(n*dt)]; %Solução computacional
lg=sprintf(' time t=%g \n',n*dt);
pause(0.5)
```

```
ERRO(:, n) = norm(dx*(u(:, n+1) - u(:, n)))
end
$$$$$$$$$$$$$$ ERRO DE TRUNCAMENTO LOCAL $$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
tau0= abs(u(:,1)-u(:,n))
for j=0:N+1
tau(:, n) = abs(u(:, n+1) - u(:, n))
end
eglobal=0;
for j=0:N+1
eglobal= abs(eglobal+(C^j)*tau(:,n))
end
toc
hold on
figure(1); plot(xvals,snap0,'-*b',xvals,snap1,'-*r'),
title(strcat('Solução Numerica para passo de tempo ', lg));
legend('condição inicial','solução computacional')
xlabel('Bloco ou célula'), ylabel('Densidade de conhecimento')
figure(2); plot(ERRO, '-*r')
xlabel('NUMERO DE INTERAÇÕES'), ylabel('ERRO')
legend('NORMA DO ERRO')
```