UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
MODELAGEM COMPUTACIONAL EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Solução Computacional para o Estado Ligado na Frente de Luz

Gislan Silveira Santos

Ilhéus-BA

2014

Gislan Silveira Santos

Solução Computacional para o Estado Ligado na Frente de Luz

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Estadual de Santa Cruz, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre. Área de Concentração: Modelagem Computacional. Linha de Pesquisa: Modelagem Matemática e Computacional Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Jorge Henrique de Oliveira Sales

Ilhéus-BA

2014

S237 Santos, Gislan Silveira.
Solução computacional para o estado ligado na frente de luz / Gislan Silveira Santos. – Ilhéus, BA: UESC, 2014.
81 f. : il. ; anexo.

Orientador: Jorge Henrique de Oliveira Sales.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia.
Referências bibliográficas e apêndice.

1. Bósons. 2. Green, Funções de. 3. Kernel, Funções de. 4. Partículas (Física nuclear). I. Título.

CDD 539.721

Gislan Silveira Santos

Solução Computacional para o Estado Ligado na Frente de Luz

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Estadual de Santa Cruz, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre. Área de Concentração: Modelagem Computacional. Linha de Pesquisa: Modelagem Matemática e Computacional Aplicada.

Aprovada em 18 de Dezembro de 2014.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Jorge Henrique de Oliveira Sales - Orientador
Universidade Estadual de Santa Cruz - UESC

Prof. Dr. Gildson Queiroz de Jesus
Universidade Estadual de Santa Cruz - UESC

Prof. Dr. Ronaldo Silva Thibes
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB

Ilhéus-BA
2014

Em memória do meu querido pai,
Gileno Messias Santos.

Agradecimentos

À minha esposa, Arlana, a qual me apoia sempre, com muito amor e carinho, em tudo o que faço.

À minha mãe, Luzia, que sempre acreditou nas minhas escolhas e tem contribuído com tudo durante minha vida.

Aos meus irmãos, Darlan e Leticia, por estarem ao meu lado durante esta caminhada.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Jorge Henrique Sales, responsável pelos frutos positivos deste trabalho, agradeço pela disposição, paciência e sabedoria em me conduzir para o desenvolvimento profissional.

Ao Prof. Dr. Alfredo Takashi Suzuki do Instituto de Física Teórica - IFT/UNESP por suas valiosíssimas colaborações em nossos trabalhos.

A todos os professores do PPGMC/UESC e demais funcionários da Universidade.

Ao coordenador do PPGMC, Prof. Dr. Francisco Bruno, por sempre estar disponível em ajudar os discentes e por ter sido o meu tutor.

Ao NBCGIB por ceder e dividir o espaço para o nosso curso se desenvolver.

Aos colegas do Mestrado, pela amizade e companheirismo. Especialmente para ao amigo Valdex Santos, por me ajudar bastante no decorrer do curso, principalmente no entendimento do LaTeX, ao amigo Cássio Lima, por ser tão solícito quando precisei, principalmente me ajudando no uso do MATLAB e ao grande Everton Costa, que com sua gentileza e sabedoria se tornou um grande amigo.

Aos meus amigos, Gleyton, Robson e Joaquim Jr., que estão sempre comigo, mesmo não entendendo nada do que eu faço na Universidade. São pessoas especiais que me ajudam a desfrutar a vida da melhor maneira.

Ao IFBA, *Campus* Vitória da Conquista, por ter sido bastante flexível em relação aos meus horários de trabalho para que eu pudesse me qualificar com êxito.

Resumo

Nesta dissertação revisamos o conceito sobre as coordenadas da Frente de Luz definindo sua métrica generalizada e mostrando o comportamento da antipartícula nesse sistema de coordenadas. Calculamos a função de Green na Frente de Luz para 1, 2 e N bósons interagentes. Mostramos as equações hierárquicas para as funções de Green e seus truncamentos no diagrama escada e escada cruzado na Frente de Luz. Apresentamos uma solução computacional para o Kernel do estado ligado do diagrama escada e escada cruzado para dois bósons interagentes.

Palavras-chave: Frente de Luz. Bóson. Kernel. Estado Ligado.

Abstract

In this dissertation we review the concept of the coordinates in the Light Front defining metrics generalized and showing the behavior of antiparticles this coordinate system. We calculate the Green function on Light Front 1, 2 and N interacting bosons. We show the hierarchical equations for the Green functions and their truncations ladder and crossed ladder diagram in the Light Front. We present a computational solution to the Kernel bound state of ladder and crossed ladder diagram for two interacting bosons.

Keywords: Light Front. Boson. Kernel. Bound State

Lista de Figuras

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O estado ligado bosônico é representado por uma equação integral composta por um Kernel e uma função incógnita que aparece sob o sinal de integração. O problema se resume, em geral, em determinar essa função desconhecida para um dado Kernel definido [1]. A equação integral aqui estudada tem origem da transformação da função de Green no sistema de coordenadas do espaço de Minkowski [2] para o sistema de coordenadas da Frente de Luz [3].

Nesta dissertação apresentamos uma correção ao Kernel da equação integral do estado ligado para dois bósons escalares trocando N bósons, não vetoriais, intermediários na Frente de Luz. Essas correções são necessárias para descrever o entendimento mais completo das interações entre esses bósons. Usamos a técnica da função de Green e construímos equações hierárquicas para representar as interações bosônicas. Obtendo assim, o Kernel correspondente ao estado ligado de dois bósons no digrama escada e escada cruzado.

Como para um estado ligado temos uma equação integral, então, de uma forma geral, podemos definir tal equação da seguinte forma:

$$\psi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\psi(t)\ dt, \tag{1.1}$$

em que f e K são funções dadas e ψ é a função a determinar. A equação (1.1) tem a particularidade de que ela é uma equação linear. Porém, existem problemas que conduzem a necessidade de se considerar equações integrais não lineares, como por exemplo:

$$\psi(x) = \int_a^b K(x,t)\Gamma\left[\psi(t), t\right]\ dt, \tag{1.2}$$

onde K e Γ são funções dadas. Este tipo de equação integral (1.2) não é tratado nessa dissertação.

A equação (1.1) é denominada de equação de Fredholm de segunda espécie, enquanto que a equação:

$$0 = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\psi(t)\ dt, \tag{1.3}$$

é conhecida como equação de Fredholm de primeira espécie. Se o Kernel $K(x,t)$ verificar a condição:

$$K(x,t) = 0,\ \forall t > x, \tag{1.4}$$

então as equações (1.1) e (1.3) se transformam em:

$$\psi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\psi(t)\ dt, \tag{1.5}$$

e

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x,t)\psi(t)\ dt, \tag{1.6}$$

conhecidas, respectivamente, como equação de Volterra de segunda e primeira espécies.

Se nas equações (1.1), (1.3), (1.5) ou (1.6) a função f for nula, então a equação resultante é homogênea. Caso contrário, será chamada de não homogênea.

Na Física a equação integral normalmente surge de equações diferenciais de 2ª ordem. Um exemplo é dado pela equação de Schrödinger, em que após o cálculo da transformada de Fourier se obtem uma equação de Fredholm de segunda espécie homogênea. De uma forma geral, na mecânica ondulatória, o estado de um sistema é caracterizado por uma função de onda (ou melhor, pelo raio a que ela pertence) $\Psi(x,t)$, e a sua evolução é governada pela equação de Schrödinger. A função de onda deve ser conhecida em cada ponto (x,t) do espaço-tempo: o sistema exige portanto uma infinidade contínua de valores para ser descrito, com a função de onda desempenhando o papel de um campo.

No processo de espalhamento temos uma função de onda $\Psi(x,0)$, onde fixamos as condições iniciais em $t = 0$, incidindo sobre um ponto que possui um campo de força ou uma partícula. Portanto, uma típica pergunta que se faz é: qual é a representação da função de onda $\Psi(x,t)$ depois da interação com o centro espalhador?

Para responder a essa questão usamos o princípio generalizado de Huygens [4]. Se uma função de onda $\Psi(x,t)$ é conhecida em um certo tempo t, é aceitável assumir que a função de onda $\Psi(x',t')$ que emerge do centro espalhador localizado no ponto (x,t) e se propaga da posição x até x' em um tempo t', seja proporcional à amplitude da função de onda $\Psi(x,t)$. A constante de proporcionalidade é definida como $iG(x',t';x,t)$, portanto temos:

$$\Psi(x',t') = i\int d^3x G(x',t';x,t)\Psi(x,t), \tag{1.7}$$

onde $t' > t$. A equação (1.7) é uma equação integral, onde $G(x',t';x,t)$ é a função de Green e $\Psi(x,t)$ é a função incógnita.

Aqui $\Psi(x',t')$ é a função de onda que emerge do centro espalhador na posição x' e em um tempo t'. A quantidade $G(x',t';x,t)$ é conhecida como a função de Green ou propagador [4]. Conhecendo G resolvemos por completo o problema do espalhamento. Ou, em outras palavras: o conhecimento da função de Green é equivalente a solução completa da equação de Schrödinger [1].

Mas será possível descrever um sistema físico em qualquer hipersuperfície do espaço-tempo com condições iniciais definidas em uma hipersuperfície diferente de $t = 0$?

Em 1949 Dirac [3] publicou uma comparação entre três distintas formas que poderiam descrever a dinâmica de sistemas relativísticos. A motivação estava em que duas formas não usam o tempo para descrever a dinâmica das propriedades do sistema simples, a escolha de qual forma é convencional. Portanto, Dirac propõe, dessa maneira, diferentes formas de dinâmica relativística. Estas formas de dinâmica são identificadas, como sendo a forma instantânea, que corresponde à teoria relativística quântica com as condições de contorno definidas em $t = 0$, a forma pontual a qual não trataremos neste trabalho e a Frente de Luz, onde as condições iniciais são dadas em um hiper-plano do espaço de Minkowski que contém a trajetória da luz.

O objetivo desta dissertação é estudar a pertubação do efeito da antipartícula do diagrama escada cruzado para o Kernel da equação integral do estado ligado de dois corpos quânticos na Frente de Luz. Em teorias quadridimensionais a amplitude de Bethe-Salpeter [4], que representa o estado ligado de dois corpos, satisfaz uma equação integral homogênea covariante com o Kernel definido por todos os processos irredutíveis a dois corpos, e com a correção de auto-energia nos propagadores externos de cada partícula [4]-[8]. Em princípio, é possível projetarmos a amplitude e a equação de Bethe-Salpeter para tempos x^+, eliminando o tempo relativo entre as partículas nos estados intermediários, bem como nos propagadores externos. A representação da Equação de Bethe-Salpeter para tempos x^+, ou como usaremos na Frente de Luz, mesmo para Kernel simples como na aproximação de "escada" e "escada cruzado" [9, 10] é bastante complexa como veremos ao longo deste trabalho.

É usado a técnica das equações hierárquicas [4, 9, 10] para obter correções pertubativas ao Kernel da equação integral do estado ligado, Equação de Bethe-Salpeter, para dois bósons livres interagindo com bósons virtuais até a quarta ordem da constante de acoplamento g. Dessa forma, é observado, usando método computacional, a contribuição de antipartícula ao Kernel da equação integral do estado ligado. Para obtermos a solução computacional, usamos o programa MuPAD em que se encontra no pacote de matemática simbólica conhecida por Symbolic Math Toolbox do software MATLAB (abreviatura de MATrix LABoratory - Laboratório de Matrizes).

Nesta dissertação os capítulos estão divididos da seguinte maneira: no capítulo 2, apresentamos o conceito sobre as coordenadas da Frente de Luz definindo sua métrica generalizada. É apresentado, também, o comportamento da antipartícula na Frente de Luz. No capítulo 3, definimos a função de Green na Frente de Luz para 1, 2 e N bósons. No quarto capítulo, mostramos as equações hierárquicas para as funções de Green e seus truncamentos. No quinto capítulo, apresentamos uma solução computacional para o Kernel do estado ligado do diagrama escada para dois bósons interagentes. No sexto capítulo, aplicamos as técnicas desenvolvidas nos capítulos anteriores ao diagrama escada cruzado que contribui para a equação do estado ligado de dois bósons interagentes. No capítulo 7, mostramos uma solução computacional para o estado ligado no diagrama cruzado. Por fim, o oitavo capítulo, trata das nossas considerações finais.

Capítulo 2

Espaço de Minkowski na Frente de Luz

Neste capítulo é mostrado a transformação de coordenadas do espaço de Minkowski para o sistema de coordenadas da Frente de Luz e, também, como representar quadrivetores na mesma. Como consequência, obtemos a representação da antipartícula nessas novas coordenadas.

2.1 Frente de Luz

Através das três formas de dinâmica relativística que Paul Dirac apresentou em 1949 [3], consegue-se descrever o movimento das partículas, dependendo apenas do tipo de hiper-plano escolhido para a evolução temporal do sistema. A dinâmica de forma instantânea é a usual, que consiste em especificar os dados iniciais (a posição inicial e a velocidade) sobre $x^0 = ct$, a forma pontual, cuja superfície é especificada pelas condições iniciais em $x^\mu x_\mu = a^2$ com a constante e $x^0 > 0$, onde dados são calculados ao longo de um hiperbolóide, e a terceira formulação, Frente de Luz, que consiste em definir as condições iniciais sobre uma hiper-superfície tridimensional no espaço-tempo, formando um hiper-plano de Frente de Luz.

A técnica é usar a teoria de relatividade especial via Minkowski [2] e depois fazer uma transformação de coordenadas para a Frente de Luz. Inicialmente é adotada a definição de ponto no espaço de Minkowski como

$$x^\mu = \left(x^1, x^2, x^3, x^4\right),$$

que é um vetor quadridimensional, o tensor métrico do espaço de Minkowski é dado por:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e em especial a componente temporal $x^4 \equiv ict$. As componentes do quadri-espaço na representação de Minkowski são contadas de 1 a 4. Outra representação usada é de Bjorken-Drell onde os índices variam de 0 até 3, sendo o tensor métrico de Bjorken-Drell [11, 12, 13] é dado por:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

onde $x^0 \equiv ct$ para componente temporal. Neste trabalho é usada esta última representação.

As coordenadas da Frente de Luz são obtidas, particularmente, pelas transformações:

$$\begin{aligned} x^+ &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(x^0 + x^3\right), \\ x^- &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(x^0 - x^3\right), \\ \vec{x}^{\,\perp} &= x^1\vec{i} + x^2\vec{j}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Na Figura 2.1 vemos um plano tangente ao cone de luz, que também é tangente à componente x^- e perpendicular à componente x^+. Esse plano define a Frente de Luz:

A transformada inversa para o espaço de Minkowski na métrica de Bjorken-Drell é dada por:

$$x^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x^+ + x^-\right),$$

$$x^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x^+ - x^-\right).$$

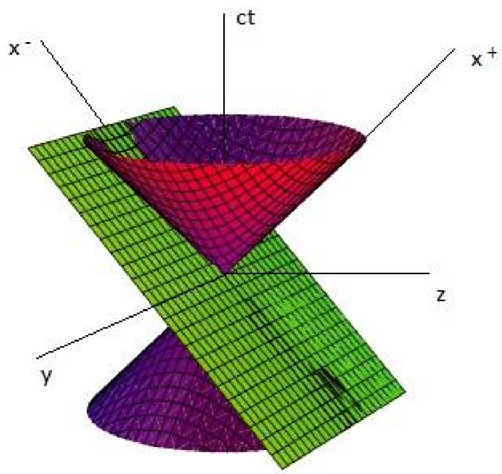


Figura 2.1: Frente de Luz

Fonte: SALES, 2013

O jacobiano da Frente de Luz pode ser obtido por

$$|J| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x^0}{\partial x^+} & \dfrac{\partial x^0}{\partial x^-} & \dfrac{\partial x^0}{\partial x^1} & \dfrac{\partial x^0}{\partial x^2} \\ \\ \dfrac{\partial x^1}{\partial x^+} & \dfrac{\partial x^1}{\partial x^-} & \dfrac{\partial x^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial x^1}{\partial x^2} \\ \\ \dfrac{\partial x^2}{\partial x^+} & \dfrac{\partial x^2}{\partial x^-} & \dfrac{\partial x^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial x^2}{\partial x^2} \\ \\ \dfrac{\partial x^3}{\partial x^+} & \dfrac{\partial x^3}{\partial x^-} & \dfrac{\partial x^3}{\partial x^1} & \dfrac{\partial x^3}{\partial x^2} \end{vmatrix},$$

no caso da transformação do espaço de Minkowski com o tensor métrico na representação de Bjorken-Drell [11, 12, 13] para a Frente de Luz, o jacobiano é igual a 1.

Passar de uma integral sobre um quadrivolume para outro sistema de coordenada requer o uso do jacobiano. Portanto, temos,

$$\int dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = |J| \int d^2x^\perp dx^+ dx^-.$$

Um quadrivetor A^μ na Frente de Luz é dado por,

$$A^\mu_{FL} = \left(A^+, A^-, \vec{A}^\perp\right).$$

2.2 Métrica na Frente de Luz

Vamos mostrar passo a passo como tratar o espaço de Minkowski na Frente de Luz, obtendo as métricas para cada definição.

Considere a métrica de Bjorken-Drell:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

onde $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$ e $x^3 = z$. Se definirmos as coordenadas de Frente de Luz, como:

$$x^+ = \frac{(x^0 + x^3)}{2} \tag{2.2}$$

$$x^- = \frac{(x^0 - x^3)}{2} \tag{2.3}$$

$$\vec{x}^{\,\perp} = x^1\vec{i} + x^2\vec{j} \tag{2.4}$$

então, para obter a métrica iremos precisar da transformada inversa de (2.2) e (2.3), portanto:

$$x^0 = x^+ + x^- \tag{2.5}$$

$$x^3 = x^+ - x^- \tag{2.6}$$

$$\vec{x}^{\,\perp} = \vec{x}^{\,\perp} \tag{2.7}$$

Fazendo os cálculos, obtemos:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(dx^0\right)^2 - \left(dx^1\right)^2 - \left(dx^2\right)^2 - \left(dx^3\right)^2 \\ &= \left(dx^+ + dx^-\right)^2 - \left(dx^+ - dx^-\right)^2 - \left(dx^\perp\right)^2 \\ &= \left(dx^+\right)^2 + 2dx^+dx^- - \left(dx^+\right)^2 + 2dx^+dx^- - \left(dx^-\right)^2 - \left(dx^\perp\right)^2 + \left(dx^-\right)^2 \\ ds^2 &= 4dx^+dx^- - \left(dx^\perp\right)^2 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Assim, podemos supor que:

$$g_{\mu\nu} = \begin{array}{c|cccc} & + & - & 1 & 2 \\ \hline + & & & & \\ - & & & & \\ 1 & & & & \\ 2 & & & & \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Para confirmar, façamos:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = g_{+-}dx^+dx^- + g_{-+}dx^-dx^+ + g_{ij}dx^i dx^j$$

onde $i, j = 1, 2$. Qualquer outra combinação daria zero, Portanto:

$$ds^2 = 2dx^+dx^- + 2dx^-dx^+ - \left(dx^1\right)^2 - \left(dx^2\right)^2$$

como $dx^+dx^- = dx^-dx^+$, logo

$$ds^2 = 4dx^+dx^- - \left(dx^\perp\right)^2 \tag{2.10}$$

logo, temos que em (2.10) se obtém o mesmo resultado de (2.9). Vamos usar outra definição para Frente de Luz

$$x^+ = x^0 + x^3 \tag{2.11}$$

$$x^- = x^0 - x^3 \tag{2.12}$$

$$\vec{x}^{\,\perp} = x^1\vec{i} + x^2\vec{j} \tag{2.13}$$

a transformada inversa será agora:

$$x^0 = \frac{(x^+ + x^-)}{2} \tag{2.14}$$

$$x^3 = \frac{(x^+ - x^-)}{2} \tag{2.15}$$

$$\vec{x}^{\,\perp} = \vec{x}^{\,\perp} \tag{2.16}$$

o intervalo entre dois eventos agora será,

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(dx^0\right)^2 - \left(dx^1\right)^2 - \left(dx^2\right)^2 - \left(dx^3\right)^2 \\ &= \left[\frac{(dx^+ + dx^-)}{2}\right]^2 - \left[\frac{(dx^+ - dx^-)}{2}\right]^2 - \left(dx^1\right)^2 - \left(dx^2\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left[\left(dx^+\right)^2 + 2dx^+dx^- - \left(dx^+\right)^2 + 2dx^+dx^- - \left(dx^-\right)^2 + \left(dx^-\right)^2\right] - \left(dx^\perp\right)^2 \\ ds^2 &= dx^+dx^- - \left(dx^\perp\right)^2 \end{aligned} \tag{2.17}$$

da equação (2.17), suponhamos diretamente a seguinte métrica:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

para testar, temos:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ ds^2 &= g_{+-} dx^+ dx^- + g_{-+} dx^- dx^+ + g_{12} dx^1 dx^2 \\ ds^2 &= dx^+ dx^- + dx^- dx^+ - \left(dx^1\right)^2 - \left(dx^2\right)^2 \\ ds^2 &= 2dx^+ dx^- - \left(dx^\perp\right)^2 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Esse resultado nos diz que (2.17) é diferente de (2.19). Mas como escrever (2.17) para que possamos obter a métrica correta? Observamos que um fator 4 surge por causa da soma entre dx^+dx^- e dx^-dx^+ no polinômio quadrático, logo podemos reescrever (2.17):

$$ds^2 = \frac{4}{4} dx^+ dx^- - \left(dx^\perp\right)^2 \ ,$$

com

$$\frac{1}{2} dx^+ \cdot \frac{1}{2} dx^- = \frac{1}{4} dx^+ dx^- \ .$$

Portanto:

$$ds^2 = 4 \frac{dx^+}{2} \frac{dx^-}{2} - \left(dx^\perp\right)^2 \ .$$

Comparando com a matriz (2.8) observa-se que as componentes dx^+ e dx^- estão multiplicadas por um fator $1/2$ que corresponde a métrica da transformada (2.11-2.13), ou seja,

$$g_{\mu\nu} = \begin{array}{c} \\ + \\ - \\ 1 \\ 2 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \quad + & \quad - & \quad 1 & \quad 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} . \tag{2.20}$$

Assim obtemos:

$$ds^2 = dx^+ dx^- - \left(dx^\perp\right)^2 \tag{2.21}$$

que é igual a (2.17). Para a transformada que contenha um fator $\sqrt{2}$ temos:

$$x^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x^{0} + x^{3}\right) \tag{2.22}$$

$$x^{-} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x^{0} - x^{3}\right) \tag{2.23}$$

$$\vec{x}^{\,\perp} = x^{1}\vec{\imath} + x^{2}\vec{\jmath} \tag{2.24}$$

a inversa será:

$$x^{0} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x^{+} + x^{-}\right) \tag{2.25}$$

$$x^{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x^{+} - x^{-}\right) \tag{2.26}$$

Para a métrica:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(dx^0\right)^2 - \left(dx^1\right)^2 - \left(dx^2\right)^2 - \left(dx^3\right)^2 \\ &= \left(\frac{2}{4}\right)\left[\left(dx^+\right)^2 + 2dx^+dx^- + \left(dx^-\right)^2 - \left(dx^+\right)^2 + 2dx^+dx^- - \left(dx^-\right)^2\right] - \left(dx^1\right)^2 \\ ds^2 &= 2dx^+dx^- - \left(dx^1\right)^2 - \left(dx^2\right)^2 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Para obter a métrica é necessário fazer a expansão:

$$ds^2 = dx^+dx^- + dx^-dx^+ - \left(dx^{\perp}\right)^2 \ ,$$

logo, os termos cruzados + e − da matriz $g_{\mu\nu}$, são:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.28}$$

Testando, temos:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} \\ &= g_{+-}dx^+dx^- + g_{-+}dx^-dx^+ + g_{12}dx^1dx^2 \\ ds^2 &= 1dx^+dx^- + 1dx^-dx^+ + (-1)\,dx^1dx^2 \\ ds^2 &= 2dx^+dx^- - \left(dx^{\perp}\right)^2 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Esse resultado confirma a equação (2.27). Portanto, (2.28) é a métrica para (2.22-2.24).

2.3 Métrica generalizada

Generalizando a métrica da Frente de Luz, podemos escrever:

$$\begin{cases} x^{+} = \dfrac{(x^0 + x^3)}{\alpha} \\ \\ x^{-} = \dfrac{(x^0 - x^3)}{\alpha} \\ \\ \vec{x}^{\,\perp} = x^1\vec{i} + x^2\vec{j} \end{cases} \tag{2.30}$$

em que α é conhecido por convenção SS. A inversa de (2.30) é dada por

$$\begin{cases} x^0 = \dfrac{\alpha}{2}\left(x^+ + x^-\right) \\ \\ x^3 = \dfrac{\alpha}{2}\left(x^+ - x^-\right) \end{cases} \tag{2.31}$$

então:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(dx^0\right)^2 - \left(dx^1\right)^2 - \left(dx^2\right)^2 - \left(dx^3\right)^2 \\ ds^2 &= \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \left[\left(dx^+\right)^2 + 2dx^+dx^- + \left(dx^-\right)^2 - \left(dx^+\right)^2 + 2dx^+dx^- - \left(dx^-\right)^2\right] - \left(dx^1\right)^2 - \left(dx^2\right)^2 \\ ds^2 &= \frac{\alpha^2}{4} \cdot 4dx^+dx^- - \left(dx^\perp\right)^2 \\ ds^2 &= \alpha^2 dx^+dx^- - \left(dx^\perp\right)^2 \end{aligned} \tag{2.32}$$

para cada parâmetro α, temos:

$$\begin{aligned} \alpha = 1 &\implies ds^2 = dx^+dx^- - \left(dx^\perp\right)^2 \\ \alpha = 2 &\implies ds^2 = 4dx^+dx^- - \left(dx^\perp\right)^2, \\ \alpha = \sqrt{2} &\implies ds^2 = 2dx^+dx^- - \left(dx^\perp\right)^2, \end{aligned}$$

onde $\alpha = 1$ é conhecido por convenção Lepage-Brodsky [14] e $\alpha = \sqrt{2}$ é conhecido por convenção Kogut-Soper [15].

Reescrevendo (2.32), temos:

$$ds^2 = \frac{\alpha^2}{2}dx^+dx^- + \frac{\alpha^2}{2}dx^-dx^+ - \left(dx^\perp\right)^2$$

Logo, isso implica numa métrica geral dada por:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^2/2 & 0 & 0 \\ \alpha^2/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.33}$$

Para $\alpha = 1$:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Para $\alpha = 2$:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Para $\alpha = \sqrt{2}$:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Sabemos que $g^{\mu\nu}$ tem a propriedade de "baixar" ou "levantar" índices.

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$$

Na Frente de Luz, temos:

$$x_+ = g_{+\nu} x^\nu$$

$$x_+ = g_{+-} x^-$$

Qualquer outro valor é zero, portanto:

$$x_+ = \frac{\alpha^2}{2} x^- \tag{2.34}$$

De maneira análoga,

$$x_- = g_{-\nu} x^\nu$$

$$x_- = g_{-+} x^+$$

$$x_- = \frac{\alpha^2}{2} x^+ \tag{2.35}$$

e para $x_\perp$,

$$x_\perp = g_{\perp\perp} x^\perp$$

$$x_\perp = -x^\perp \tag{2.36}$$

na equação (2.36) temos troca de sinal, como era de se esperar.

Uma aplicação para (2.34), (2.35) e (2.36), é o produto escalar:

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \partial^\mu &= g_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu \\
&= g_{+-} \partial^+ \partial^- + g_{-+} \partial^- \partial^+ + g_{++} \partial^+ \partial^+ + g_{--} \partial^- \partial^- + g_{\perp +} \partial^\perp \partial^+ + \\
&+ g_{\perp -} \partial^\perp \partial^- + g_{+\perp} \partial^+ \partial^\perp + g_{-\perp} \partial^- \partial^\perp + g_{\perp\perp} \partial^\perp \partial^\perp \\
\partial_\mu \partial^\mu &= \frac{\alpha^2}{2} \partial^+ \partial^- + \frac{\alpha^2}{2} \partial^+ \partial^- - \left(\partial^\perp\right)^2 ,
\end{aligned} \tag{2.37}$$

onde $\alpha = 1, 2, \sqrt{2}$. Depois da adição, temos:

$$\partial_\mu \partial^\mu = \alpha^2 \partial^+ \partial^- - \left(\partial^\perp\right)^2 . \tag{2.38}$$

Com $\alpha = 1$, se comparamos com o usual do espaço de Minkowski, onde na métrica de Bjorken-Drell a equação resultante é dada por

$$\Box = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 , \tag{2.39}$$

sendo que na Frente de Luz,

$$\partial_\mu \partial^\mu = \partial^+ \partial^- - \left(\partial^\perp\right)^2 . \tag{2.40}$$

Assim, se observa que não temos nem uma fator numérico em (2.40). De forma geral equação (2.38) é conhecida como d'alambertiano na Frente de Luz, ou seja,

$$\Box_{LF} = \partial_\mu \partial^\mu = \alpha^2 \partial^+ \partial^- - \left(\partial^\perp\right)^2 . \tag{2.41}$$

Existe uma ampla variedade de estudos referente a essas novas coordenadas, sendo a mais recente o estudo do Modelo de Propagação do Férmion na Frente de Luz [16]. Os campos de aplicação estendem-se desde sistemas com poucos nucleons [17, 18], até estudos sobre estrutura de hádrons leves [19]. Nessas coordenadas, geralmente é considerado como parâmetro de evolução temporal a coordenada x^+ por questão de singularidade, conforme será mostrado nesta dissertação. Algo relacionado ao que estudamos nesse trabalho foi desenvolvido por outros autores [20]-[22], num referencial conhecido como o do momento infinito. No entanto vale informar que não é a mesma dinâmica da Frente de Luz, no referencial do momento infinito, o parâmetro de evolução temporal é a coordenada usual t, enquanto que estamos estudando a direção longitudinal de coordenada x^+.

2.4 Antipartícula na Frente de Luz

A mecânica ondulatória de Schrödinger não previa o spin do elétron, e a equação de onda definia a função Ψ como quantidade escalar [23]. Pauli tentou introduzir o spin na Mecânica ondulatória. Para isso, construiu uma função de onda Ψ de duas componentes, correspondentes a duas orientações possíveis do spin. Era um progresso em relação à teoria de Schrödinger, mas a teoria não se apresentava como relativística. Dirac, depois de ter estabelecido a forma relativística da equação de Schrödinger, mostrou que a função de onda Ψ era uma grandeza de quatro componentes e que as equações assim obtidas eram invariantes pela transformação de Lorentz [24]. Mas, havia um problema a resolver: na conexão da relatividade especial com a mecânica quântica surgem os estados com energia negativa. Dirac propôs a existência de antipartícula com sua "teoria do buraco".

A descrição de dinâmica do microcosmo a partir das ideias de L. Broglie, em particular ao comportamento de partícula submetido à ação de campos eletromagnéticos, como no caso do elétron atômico, foi encontrado em 1926 por Schrödinger, a partir da equação,

$$H\Psi\left(\vec{r},t\right) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi\left(\vec{r},t\right), \tag{2.42}$$

ou

$$H\psi = E\psi, \tag{2.43}$$

onde H é o operador Hamiltoniano, no caso de sistemas conservativos corresponde à energia do elétron (autovalor E). Entretanto, a equação de Schrödinger é uma equação não relativística, que envolve derivadas parciais de segunda ordem, enquanto a derivada temporal é de primeira ordem. Por outro lado, Sommerfeld já havia mostrado que, para explicar a estrutura fina dos espectros de raias do átomo de hidrogênio, era necessário considerar correções relativísticas ao movimento do elétron orbital.

Como compatibilizar então, a Mecânica Quântica e a teoria da Relatividade Especial? Essa foi a pergunta que Dirac se fez entre os anos de 1926 e 1928. Para ele, não deveria haver assimetria na ordem das derivadas envolvidas em equação relativística. Por exemplo, a equação de onda de d'Alembert envolvem derivadas de segunda ordem no espaço e no tempo, e é covariante com relação à transformada de Lorentz. O problema estava em não considerar o spin do elétron, que não era conhecido na época.

O próprio Schrödinger havia chegado a uma equação relativística para o elétron no átomo de hidrogênio, mas o espectro calculado com base nessa equação não estava de acordo com a experiência. Teoria e experimento só estavam de acordo no limite não relativístico.

A equação relativística encontrada por Schrödinger foi redescoberta em 1926, por Oskar B. Klein e Walter Gordon, tendo ficado conhecida por equação de Klein-Gordon. Ao contrário do que se imaginava esta equação não descreve partículas como o elétron, de spin 1/2, mas sim partícula de spin zero, como o méson π.

Dela resulta uma aparente contradição conceitual com a interpretação probabilística da mecânica quântica, proposta por Max Born, pois poderiam ocorrer probabilidades negativas.

Um procedimento para obtenção da equação não relativística de Schrödinger pode ser apresentado a partir da associação:

$$H \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\vec{p} \to i\hbar\vec{\nabla}$$

e da hipótese de que a relação entre o operador Hamiltoniano H e momento $\vec{p}$ para uma partícula livre de massa m seja dada pela expressão não relativística:

$$H = \frac{p^2}{2m}$$

Assim resulta:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi\left(\vec{r},t\right) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi\left(\vec{r},t\right)$$

De acordo com a expressão relativística de Einstein, a relação entre os operadores Hamiltoniano e momento para a partícula livre de massa m deveria ser dada por:

$$H = \sqrt{\vec{p}^2c^2 + m^2c^4}, \tag{2.44}$$

assim, usando (2.42), é imediato escrever uma equação que descreve o movimento de uma partícula livre relativística na Mecânica Quântica, logo:

$$\sqrt{-\hbar^2c^2\nabla^2 + m^2c^4}\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}. \tag{2.45}$$

Esta equação apresenta como problema o fato de possuir um operador raiz quadrada, um operador deste tipo não é uma transformação linear, o que implica na impossibilidade de termos autovalores correspondente a energia. Podemos resolver este problema aplicando-se o operador Hamiltoniano em ambos os lados da expressão acima, como

$\dfrac{dH}{dt} = 0$, obtemos:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(H\Psi) = \sqrt{-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4}\, H\Psi,$$
$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \left(-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4\right)\Psi, \tag{2.46}$$

ou ainda:

$$\left[\Box + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\Psi = 0, \tag{2.47}$$

onde $\Box = \partial^\mu \partial_\mu$ é o d'alambertiano.

Esta equação é conhecida como equação de Klein-Gordon. Como Ψ é uma grandeza escalar, é imediato observar a covariância da equação (2.47).

A equação de Klein-Gordon apresentava na época (1926) os seguintes problemas: (i) introduzindo-se a interação eletromagnética e aplicando-a ao átomo de hidrogênio, ela previa uma separação entre níveis de energia de estrutura fina, muito maior do que a observada experimentalmente. Conforme foi dito acima, este é um problema aparente. A equação de Klein-Gordon é apropriada para descrever partículas de spin zero. O elétron possui spin $\hbar/2$. Assim, a discrepância entre a teoria e experiência se devia, simplesmente, ao fato que a equação de Klein-Gordon estava sendo usada onde não existia validade; (ii) ao eliminarmos a raiz quadrada da equação (2.45), fizemos com que a equação de Klein-Gordon admitisse, também, soluções de energia negativa, pois partindo do Hamiltoniano:

$$H = -\sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4},$$

fazendo com que a equação chegasse igualmente à equação de Klein-Gordon. Realmente não há sentido relacionar a energia negativa à partícula livre. Porém a solução é exatamente a existência das antipartículas.

Este ponto é de grande importância para a teoria das antipartículas na Frente de Luz, e é por isso que vamos insistir na análise via teoria da relatividade especial.

A relação (2.44) é equivalente a:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\pm\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \tag{2.48}$$

A partir de (2.44), criou-se a definição de massa relativística, m_{rel}, para simplificar os cálculos,

$$m_{rel} = \frac{m_0}{\pm\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \gamma m_0. \tag{2.49}$$

onde $\gamma = \pm\sqrt{1-(v/c)^2}$ e então a equação (2.48) poderia ser escrita para corpos genericamente em movimento, como:

$$E = m_{rel}c^2. \tag{2.50}$$

A relação (2.43) vem escrita com um sinal $\pm$ antes da raiz. Foi assim que Dirac conectou as antipartículas da Teoria de Campos com a Relatividade Especial. Outro modo de analisar a questão é através do quadrado do intervalo invariante do espaço-tempo de Minkowski que é dada por:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \tag{2.51}$$

dividindo por c^2dt^2, obtemos o fator γ:

$$\begin{aligned} \frac{ds^2}{c^2dt^2} &= 1 - \frac{1}{c^2}\left(v_x^2 - v_y^2 - v_z^2\right) \\ &= 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\gamma^2} \\ \frac{ds}{dt} &= \pm\frac{c}{\gamma} \end{aligned} \tag{2.52}$$

usando este resultado em (2.49), permite reescrever a massa relativística:

$$m_{rel} = \frac{cm_0}{(\pm ds/dt)}.$$

Se tomarmos o sinal $+$, m_{rel} será também positiva e a energia $E = m_{rel}c^2$ será positiva. Consequentemente, a escolha do sinal negativo $-$ para o valor da massa relativística implica um valor negativo para a energia E. Vemos então que o sinal da massa relativística $-$ e consequente da energia $-$ está associado matematicamente aos valores $\pm ds/dt$ vistos em (2.52), isso é análogo aos diagramas de Feynman correspondente a propagação de partícula e antipartícula.

Podemos fazer uma análise semelhante na Frente de Luz para encontrar a condição que nos defina os estados de partícula e antipartícula. Usando as transformações de coordenadas do espaço de Minkowski para as coordenadas da Frente de Luz (2.30), sendo os momentos canonicamente conjugados das coordenadas $\left(x^+, x^-, x^\perp\right)$ dados por:

$$\begin{aligned} k^+ &= \frac{1}{\alpha}\left(k^0 + k^3\right), \\ k^- &= \frac{1}{\alpha}\left(k^0 - k^3\right), \\ \vec{k}^\perp &= \left(k^1, k^2\right). \end{aligned} \tag{2.53}$$

O método usual de encontrar a relação da energia nas coordenadas da Frente de Luz é calcular o produto escalar $k^\mu k_\mu = c^2 m_0^2$ do quadri-momento nessas coordenadas, com massa de repouso m_0. Portanto:

$$k^\mu k_\mu = \frac{E^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 = \alpha^2 k^+ k^- - \vec{k}_\perp^2 = c^2 m_0^2,$$

$$k^- = \frac{c^2 m_0^2 + \vec{k}_\perp^2}{\alpha^2 k^+}, \tag{2.54}$$

onde k^- é definido como a energia da partícula na Frente de Luz e as componentes $\left(k^+, \vec{k}^\perp\right)$ são os momentos na Frente de Luz.

Sabemos que a energia de uma partícula livre no espaço-tempo de Minkowski é dada por $k^0 = E = \pm c\sqrt{m_0^2 + \vec{k}^2}$, o que mostra uma dependência quadrática de k^0 com $\vec{k}$ em contraste com a dependência linear entre $(k^+)^{-1}$ e k^- nas coordenadas da Frente de Luz. Portanto, na energia total relativística temos os dois sinais, e na equação (2.54) o sinal de k^- está associado ao de k^+. Sendo que $k^+ \geq 0$ implica em $k^- \geq 0$, ou seja, na Frente de Luz a energia positiva é definida por $k^- > 0$ e a energia negativa por $k^- < 0$.

Vamos agora analisar com a ajuda do quadrado invariante do espaço-tempo na Frente de Luz se é possível encontrar uma relação que nos mostre se o sinal da energia na Frente de Luz está associado ao sinal do quadrado do intervalo invariante. Usando (2.30) para reescrever (2.51), teremos:

$$ds^2 = \left(\frac{dx^+ + dx^-}{\alpha}\right)^2 - dx^2 - dy^2 - \left(\frac{dx^+ - dx^-}{\alpha}\right)^2,$$

$$ds^2 = \alpha^2 dx^+ dx^- - d\vec{x}_\perp^2. \tag{2.55}$$

Não escolhemos, como usualmente, a coordenada x^+ como o "tempo" na Frente de Luz, mas usaremos o tempo próprio τ e a massa de repouso m_0, pois são invariantes por mudança de referencial inercial. Dessa forma:

$$\frac{ds^2}{d\tau^2} = \alpha^2 v^+ v^- - \vec{v}_\perp^2,$$

$$\frac{m_0^2 ds^2}{d\tau^2} = \alpha^2 k^+ k^- - \vec{k}_\perp^2,$$

$$\left(\frac{m_0 ds}{d\tau}\right)^2 = \alpha^2 k^+ k^- - \vec{k}_\perp^2, \tag{2.56}$$

onde usamos $v_\perp^{+,-} = \dfrac{dx_\perp^{+,-}}{d\tau}$ e $k_\perp^{+,-} = m_0 v_\perp^{+,-}$, e sendo $\dfrac{ds}{d\tau} = \pm c$, teremos:

$$c^2 m_0^2 = \alpha^2 k^+ k^- - \vec{k}_\perp^2,$$

$$k^{-} = \frac{c^2 m_0^2 + \vec{k}_\perp^2}{\alpha^2 k^+}, \tag{2.57}$$

Vemos em (2.56) que, na Frente de Luz, não podemos associar o sinal de energia ao quadrado do intervalo como anteriormente. A relação (2.57) é exatamente a que encontramos em (2.54). O sinal negativo para a energia – ou seja, a existência de antipartículas – é arbitrária, através da escolha do sinal de k^+. Além disso, nas coordenadas da Frente de Luz, como os sinais de k^- e de k^+ estão vinculados, não há a possibilidade do aparecimento simultâneo de partículas e antipartículas. Na Frente de Luz definisse propagação de partícula ou antipartícula conforme a escolha do sinal de k^+.

No próximo capítulo contruíremos a função de Green que representa a propagação de uma partícula e antipartícula evoluindo em um tempo x^+ definido na Frente de Luz.

Capítulo 3

Funções de Green Livres na Frente de Luz

Mostraremos inicialmente um resumo da importância da função de Green para a Mecânica Quântica. Em seguida transformamos o propagador quântico covariante no tempo da Frente de Luz e obtemos a função de Green para partículas escalares, sem interação, nestas coordenadas. Este operador propaga a função onda de $x^+ = 0$ até $x^+ > 0$. Ele corresponde à definição da operação de ordenação temporal na coordenada x^+. Fazemos o cálculo da função de Green na Frente de Luz para 2 bósons não interagentes se propagando para frente no tempo x^+. Mostramos, também, como escrever a função de Green na Frente de Luz partindo do propagador de Feynman covariante e finalmente fazemos a generalização para N bósons [4].

3.1 Função de Green e o propagador

Em mecânica quântica a função de onda define completamente o estado do sistema e satisfaz a equação de Schrödinger:

$$H\left|\Psi\right\rangle = i\frac{d}{dt}\left|\Psi\right\rangle, \tag{3.1}$$

onde H é a Hamiltoniana do sistema e $|\Psi\rangle$ é um vetor de estado. Em (3.1), estamos considerando $\hbar = 1$.

A função de onda , Ψ, evolui no tempo e sua evolução pode ser descrita pelo operador unitário $U\left(t - t'\right)$:

$$\left|\Psi\right\rangle = U\left(t - t'\right)\left|\Psi'\right\rangle. \tag{3.2}$$

O operador U é unitário pois a evolução dada pela equação (3.1) conserva a probabilidade

$$\frac{d}{dt}\langle\Psi\,|\Psi\rangle = 0. \tag{3.3}$$

Introduzindo a equação (3.2) na equação (3.1) temos:

$$HU\left(t-t'\right) = i\frac{d}{dt}U\left(t-t'\right), \tag{3.4}$$

onde $U(0) = 1$.

Através do operador evolução, podemos introduzir o propagador da equação de Schrödinger:

$$S\left(t-t'\right) = U\left(t-t'\right)\theta\left(t-t'\right), \tag{3.5}$$

onde $\theta(t) = 1$ para $t > 0$ e $\theta(t) = 0$ para $t < 0$.

Derivando a equação (3.5) em relação a t, temos:

$$\frac{d}{dt}S\left(t-t'\right) = \left(\frac{d}{dt}U\left(t-t'\right)\right)\theta\left(t-t'\right) + U\left(t-t'\right)\frac{d}{dt}\theta\left(t-t'\right). \tag{3.6}$$

Usando a equação (3.4), temos:

$$i\frac{d}{dt}S\left(t-t'\right) - HS\left(t-t'\right) = i\delta\left(t-t'\right), \tag{3.7}$$

onde usamos que $\frac{d}{dt}\theta(t) = \delta(t)$ e $U(0) = 1$.

O propagador associado à função de Green da equação de Schrödinger como:

$$G\left(t-t'\right) = -iS\left(t-t'\right). \tag{3.8}$$

A função de Green ou o propagador descreve completamente a evolução do sistema quântico. Neste caso estamos usando o propagador para "tempos futuros". Poderiamos igualmente definir o propagador para "trás" no tempo.

A propagação de um bóson livre de spin nulo no espaço quadridmensional é representada pelo propagador de Feynman covariante

$$S(x^\mu) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{ie^{-ik^\mu x_\mu}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}, \quad \text{com} \quad \mu = 0,1,2,3, \tag{3.9}$$

onde a coordenada x^0 representa o tempo e k^0 a energia. A equação (3.9) pode ser reescrita, em sua forma geral, por

$$S(x^0,x^1,x^2,x^3) = \int \frac{dk^0dk^1dk^2dk^3}{(2\pi)^4}\frac{ie^{-i\left(k^0x_0+k^jx_j\right)}}{\left[(k^0)^2 - (k^j)^2 - m^2 + i\varepsilon\right]}\ , \quad \text{com} \quad j = 1,2,3. \tag{3.10}$$

Iremos calcular esse propagador ((3.9) e (3.10)) na Frente de Luz, isto é, para o tempo x^+.

3.2 1-bóson

Fazemos a transformação do propagador de um bóson livre no tempo associado à Frente de Luz reescrevendo as coordenadas em termos da coordenada temporal x^+ e das coordenadas de posição (x^- e $\overrightarrow{x}_\perp$) [7]. Com isto os momentos são dados por k^-, k^+ e $\overrightarrow{k}_\perp$, e portanto, teremos

$$S(x^-, x^+, x^\perp) = \frac{1}{2}\int \frac{dk_1^- dk_1^+ d^2k_1^\perp}{(2\pi)} \frac{ie^{-i\left[\frac{k_1^- x^+ + k_1^+ x^-}{2} - k_1^\perp x^\perp\right]}}{k_1^+\left(k_1^- - \frac{k_{1\perp}^2 + m^2 - i\varepsilon}{k_1^+}\right)}. \tag{3.11}$$

Como nosso interesse é estudar a propagação apenas para o tempo x^+ na Frente de Luz, então simplesmente iremos resolver a equação

$$S(x^+) = \frac{1}{2}\int \frac{dk_1^-}{(2\pi)} \frac{ie^{\frac{-i}{2}k_1^- x^+}}{k_1^+\left(k_1^- - \frac{k_{1\perp}^2 + m^2 - i\varepsilon}{k_1^+}\right)}, \tag{3.12}$$

em que na mudança de coordenada para Frente de Luz estamos considerando a convenção Lepage-Brodsky, ou seja, $\alpha = 1$.

O diagrama que representa esse propagador é dado pela figura 3.1. O jacobiano da transformação k^0, $\overrightarrow{k} \rightarrow k^-, k^+$, $\overrightarrow{k}_\perp$ é igual a $\frac{1}{2}$ e k^+, $k_\perp$ são operadores de momento.

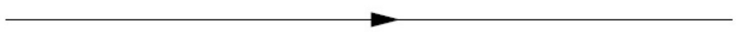


Figura 3.1: Diagrama para o propagador $S(x^\mu)$

Fonte: Autoria própria

Calculando a transformada de Fourier

$$\widetilde{S}(K^-) = \int dx^+ e^{\frac{i}{2}K^- x^+} S(x^+), \tag{3.13}$$

onde aplicamos

$$\delta\left(\frac{K^- - k_1^-}{2}\right) = \frac{1}{2\pi}\int dx^+ e^{\frac{i}{2}\left(K^- - k_1^-\right)x^+}, \tag{3.14}$$

juntamente com a propriedade do delta de Dirac

$$\delta\left(ax\right) = \frac{1}{a}\delta\left(x\right), \tag{3.15}$$

obtemos,

$$\widetilde{S}(K^-) = \frac{i}{k_1^+\left(K^- - \frac{k_{1\perp}^2 + m^2 - i\varepsilon}{k_1^+}\right)}, \tag{3.16}$$

que descreve a propagação de uma partícula para o futuro e de uma antipartícula para o passado. Isso pode ser observado em (3.12) pelo denominador que nos indica que para $x^+ > 0$ e $k^+ > 0$ temos a partícula se propagando para frente no tempo da Frente de Luz. Caso contrário, para $x^+ < 0$ e $k^+ < 0$ teremos a antipartícula propagando-se para o passado.

A função de Green na Frente de Luz $G(x^+)$ atuante no espaço de Fock é definida como a amplitude de probabilidade de transição do estado inicial no espaço de Fock $|i\rangle$ ao estado final $|f\rangle$. A sua transformada de Fourier é algumas vezes chamada de resolvente para uma dada Hamiltoniana, nesta dissertação iremos chamá-la, apenas, de transformada de Fourier para a função de Green ou mesmo função de Green.

No caso de um bóson livre, a função de Green, para a propagação de partícula é dada pelo operador:

$$G_0^{(1p)}(k^-) = \frac{\theta(k^+)}{k^- - k^-_{on} + i\varepsilon} \; ; \tag{3.17}$$

onde $k^-_{on} = \frac{k^2_\perp + m^2}{k^+}$ é a energia da partícula. Para propagação de antipartícula, temos

$$G_0^{(1a)}(k^-) = \frac{\theta(-k^+)}{k^- + k^-_{on} - i\varepsilon} \; . \tag{3.18}$$

$G_0^{(1p)}$ é a função de Green para partícula livre e $G_0^{(1a)}$ é a função de Green para antipartícula livre.

Vemos que a diferença entre a resolvente ou função de Green das equações (3.17) e (3.18) para o propagador na Frente de Luz está na ausência do número complexo i e do fator de espaço de fase k^+ que aparecem na equação (3.16).

3.3 2-bósons

Vamos calcular o propagador para duas partículas livres com $K^+ = k_1^+ + k_2^+ > 0$ de $x^+ = 0$ até $x^+ > 0$. O propagador de Feynman para esse caso será representado pela Figura 3.2.

Considerando a equação

$$S(x_1^\mu, x_2^\mu) = \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4k_2}{(2\pi)^4}\frac{ie^{-ik_1^\mu x_{1\mu}}}{k_1^2 - m^2 + i\varepsilon}\frac{ie^{-ik_2^\mu x_{2\mu}}}{k_2^2 - m^2 + i\varepsilon}, \quad \text{com} \quad \mu = 0,1,2,3, \tag{3.19}$$

e transformando-a no tempo da Frente de Luz, $x_1^+ = x_2^+ = x^+$, isto é, eliminando o tempo relativo entre os dois bósons, teremos

$$S(x^+) = \frac{-1}{2^2}\int \frac{dk_1^-}{(2\pi)}\frac{dk_2^-}{(2\pi)}\frac{e^{\frac{-i}{2}k_1^- x^+}}{k_1^+\left(k_1^- - \frac{k^2_{1\perp}+m^2-i\varepsilon}{k_1^+}\right)}\frac{e^{\frac{-i}{2}k_2^- x^+}}{k_2^+\left(k_2^- - \frac{k^2_{2\perp}+m^2-i\varepsilon}{k_2^+}\right)}. \tag{3.20}$$

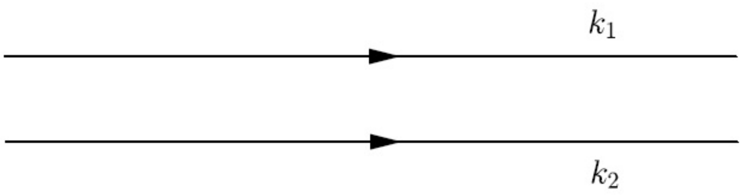


Figura 3.2: Propagação de dois bósons na Frente de Luz com momentos k_1 e k_2

Fonte: Autoria própria

Fazendo a transformada de Fourier em (3.20), teremos

$$\widetilde{S}(K^-) = \frac{-1}{2^2\,(2\pi)^2}\int \frac{dk_1^- dk_2^-}{k_1^+ k_2^+}\frac{2\,(2\pi)}{\left(k_1^- - \frac{k_{1\perp}^2+m^2-i\varepsilon}{k_1^+}\right)}\frac{\delta(K^- - k_1^- - k_2^-)}{\left(k_2^- - \frac{k_{2\perp}^2+m^2-i\varepsilon}{k_2^+}\right)}, \tag{3.21}$$

sendo que o $\delta(K^- - k_1^- - k_2^-)$ representa a conservação de K^-. Integrando em k_2^- obtemos

$$\widetilde{S}(K^-) = \frac{-1}{2\,(2\pi)}\int \frac{dk_1^-}{k_1^+ k_2^+}\frac{1}{\left(k_1^- - \frac{k_{1\perp}^2+m^2-i\varepsilon}{k_1^+}\right)}\frac{1}{\left(K^- - k_1^- - \frac{k_{2\perp}^2+m^2-i\varepsilon}{K^+-k_1^+}\right)},$$

onde $k_2^- = K^- - k_1^-$ e $k_2^+ = K^+ - k_1^+$. Calculando a integral utilizando o teorema de resíduos de Cauchy vemos, primeiramente, que na equação anterior temos dois pólos no plano complexo de k_1^-. O primeiro denominador tem um pólo quando a parte imaginária de k_1^- for negativo e o segundo para a parte imaginária de k_1^- for positivo, se k_1^+ e k_2^+ forem maiores que zero. Então, para a integral ser diferente de zero, k_2^+ tem que ser positivo no caso $K^+ > 0$. Assim, o resultado será

$$\widetilde{S}_{(2)}(K^-) = \frac{\theta(k_1^+)\theta(K^+ - k_1^+)}{2k_1^+\left(K^+ - k_1^+\right)}\frac{i}{\left(K^- - K^-_{(2)on} + i\varepsilon\right)}, \tag{3.22}$$

onde o subíndice (2) indica a propagação global do estado quântico de duas partículas com energia:

$$K^-_{(2)on} = \frac{k_{1\perp}^2 + m^2}{k_1^+} + \frac{k_{2\perp}^2 + m^2}{k_2^+}. \tag{3.23}$$

O operador $K^-_{(2)on}$ é a Hamiltoniana na Frente de Luz para o sistema de duas partículas livres de massa m. Para $x^+ < 0$, $\widetilde{S}_{(2)} = 0$ devido a escolha de $K^+ > 0$. Observe que $\widetilde{S}_{(2)}(K^-)$ é escrito na equação (3.22) na forma operatorial com respeito aos momentos k^+ e $\overrightarrow{k}_\perp$.

A função de Green de dois corpos está relacionada ao propagador (3.22) de duas partículas que se propagam no tempo x^+ na Frente de Luz para o futuro ($x^+ > 0$). Da equação (3.22) obtemos a função de Green de dois corpos livres que é dada por:

$$G_0^{(2)}(K^-) = \frac{\theta(k_1^+)\theta(K^+ - k_1^+)}{\left(K^- - K^-_{(2)on} + i\varepsilon\right)}, \tag{3.24}$$

A diferença entre a função de Green de dois corpos e a equação (3.22) está no fator do espaço de fase das partículas (1) e (2).

3.4 N-bósons

A generalização do propagador (3.22) no tempo x^+ que evolue simultâneamente N partículas é dado por:

$$\widetilde{S}_{(N)}(K^-) = \frac{1}{(2)^{N-1}} \left[\Pi_{j=1}^{N} \frac{\theta(k_j^+)\theta(K^+ - k_j^+)}{k_j^+}\right] \frac{i}{\left(K^- - K^-_{(j)on} + i\varepsilon\right)}, \tag{3.25}$$

onde $K^-_{(N)on}$ é a Hamiltoniana livre na Frente de Luz para um sistema de N-partículas, dada por:

$$K^-_{(N)on} = \sum_{j=1}^{N} \frac{k_{j\perp}^2 + m_j^2}{k_j^+}, \tag{3.26}$$

com $k_j^+ > 0$ e $K^+ = \sum_{j=1}^{N} k_j^+$.

A função de Green de muitos corpos não interagentes é dada por

$$G_0^{(N)}(K^-) = \left[\prod_{j=1}^{N} \theta(k_j^+)\theta(K^+ - k_j^+)\right] \frac{1}{\left(K^- - K^-_{(N)on} + i\varepsilon\right)}, \tag{3.27}$$

onde $K^-_{(N)on}$ é definido por (3.26).

Vamos construir a função de Green na Frente de Luz, para o sistema inicialmente composto de dois bósons livres que trocam bósons intermediários que estabelecem a interação entre o par. No capítulo seguinte vamos calcular a correção perturbativa para a função de Green na Frente de Luz devido a essa interação. Introduziremos também um conjunto de equações acopladas hierárquicas que tem como solução a função de Green não perturbativa de dois bósons. Esta formulação é útil para a aproximação tipo "escada", podendo eventualmente ser generalizada para incluir diagramas "cruzados" de auto-energia e outros. Este conjunto de equações representam na Frente de Luz exatamente o propagador covariante de dois bósons na aproximação "escada". Também, iremos discutir o truncamento no espaço de Fock dos estados intermediários.

Capítulo 4

Equações Hierárquicas

O nosso objetivo neste capítulo é estudar a função de Green de dois corpos na aproximação de "escada" para a dinâmica definida na Frente de Luz. O nosso interesse é definir na Frente de Luz, a interação entre dois corpos mediada pela troca de uma partícula e obter a correção à função de Green de dois corpos originada por esta interação, via um conjunto de equações hierárquicas [7, 8].

4.1 Equações hierárquicas

É conhecido que, a teoria de perturbação na Frente de Luz é equivalente à expansão em teoria de perturbação covariante. Assim, em princípio, é possível achar a representação exata da equação de Bethe-Salpeter para a função de Green na Frente de Luz. Para este propósito nós usaremos um modelo bosônico para o qual Lagrangeana de interação é definida por

$$\mathcal{L}_I = g\phi_1^\dagger \phi_1 \sigma + g\phi_2^\dagger \phi_2 \sigma, \tag{4.1}$$

onde os bósons ϕ_1 e ϕ_2 tem massas iguais a m e o bóson intermediário, σ, tem massa m_σ. A constante de acoplamento é g.

Em geral, a função de Green na Frente de Luz para um sistema de dois corpos poderia ser obtida da solução da equação covariante de Bethe-Salpeter que tem todos os diagramas irredutíveis de dois corpos no Kernel e correções de auto-energia no propagador intermediário dos bósons ϕ_1 e ϕ_2. Podemos obter facilmente a função de Green de dois bósons na Frente de Luz, sem incluir correções de auto-energia nos bósons intermediários, isto é, os "loop's" fechados para os bósons ϕ_1 e ϕ_2 e diagramas cruzados, como solução do seguinte conjunto de equações hierárquicas:

$$
\begin{aligned}
G^{(2)}(K^-) &= G_0^{(2)}(K^-) + G_0^{(2)}(K^-)\Sigma^{(3)}(K^-)G^{(2)}(K^-)\ , \\
G^{(3)}(K^-) &= G_0^{(3)}(K^-) + G_0^{(3)}(K^-)\Sigma^{(4)}(K^-)G^{(3)}(K^-)\ , \\
G^{(4)}(K^-) &= G_0^{(4)}(K^-) + G_0^{(4)}(K^-)\Sigma^{(5)}(K^-)G^{(4)}(K^-)\ , \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
G^{(N)}(K^-) &= G_0^{(N)}(K^-) + G_0^{(N)}(K^-)\Sigma^{(N+1)}(K^-)G^{(N)}(K^-)\ , \\
\vdots \quad & \quad \vdots
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

onde K^- é a energia total das partículas na Frente de Luz, $\Sigma^{(N+1)}(K^-) \equiv VG^{(N+1)}(K^-)V$ e V é o vértice da interação dado explicitamente pelos elementos da matriz do hamiltoniano de interação que cria ou destrói um quantum bosônico intermediário. Para o vértice V, temos

$$
\begin{aligned}
< qk_\sigma|V|k > &= 2\delta(q + k_\sigma - k)\frac{g}{\sqrt{q^+k_\sigma^+k^+}}\theta(k_\sigma^+) \\
< q|V|k_\sigma k > &= 2\delta(k + k_\sigma - q)\frac{g}{\sqrt{q^+k_\sigma^+k^+}}\theta(k_\sigma^+)\ ,
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

onde $k_\sigma^+ = k^+ - q^+$ e $\mathbf{k}_{\sigma\perp} = \mathbf{k}_\perp - \mathbf{q}_\perp$. Queremos ter uma correção para dois bósons da função de Green até quarta ordem na constante de acoplamento g, tendo oito no diagrama "escada", dos quais dois deles representam bósons interagentes, com momentos identificados por k_σ e $k_{\sigma'}$. Para os outros seis momentos, vamos identificar como k_i, onde $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

O conjunto de equações (4.2) inclue, em particular, a aproximação de "escada" para a equação de Bethe-Salpeter covariante. As equações hierárquicas (4.2), correspondem a um truncamento no espaço de Fock na Frente de Luz, tal que somente estados com duas partículas ϕ_1 e ϕ_2 sem restrição do número de bósons σ são permitidos nos estados intermediários. A propagação livre destes estados é representada pela função de Green $G_0^{(N)}(K^-)$, onde o número de bósons σ é $N-2$. As equações (4.2) não incluem a totalidade dos diagramas "escada" cruzados; por exemplo, a propagação intermediária na Frente de Luz de um estado de um bóson ϕ_1, dois bósons ϕ_2 e um antibóson ϕ_2 (estado de Fock de quatro corpos) não está incluído nas equações hierárquicas propostas. Para obtermos o propagador de dois corpos no tempo na Frente de Luz na aproximação "escada" nos restringiremos a hierarquia das equações (4.2).

4.2 Truncamento das equações hierárquicas: $O(g^2)$

Obtemos uma expansão sistemática por truncamento do espaço de Fock na Frente de Luz de N partículas no estado intermediário (bóson ϕ_1, bóson ϕ_2 e $N-2$ σ's) realizando a seguinte aproximação nas equações (4.2):

$$G^{(N)}(K^-) \rightarrow G_0^{(N)}(K^-) \; , \tag{4.4}$$

onde $G_0^{(N)}(K^-)$ são as funções de Green livres na Frente de Luz para N partículas e a partir desta aproximação resolvemos a hierarquia de equações acopladas.

Restringindo as propagações intermediárias a estados de no máximo três partículas, obtemos as seguintes equações, cuja solução não perturbativa é a função de Green de dois e três corpos:

$$G^{(2)}(K^-) = G_0^{(2)}(K^-) + G_0^{(2)}(K^-)\Sigma^{(3)}(K^-)G^{(2)}(K^-) \; , \tag{4.5}$$

$$G^{(3)}(K^-) = G_0^{(3)}(K^-) + G_0^{(3)}(K^-)\Sigma^{(4)}(K^-)G^{(3)}(K^-) \; , \tag{4.6}$$

onde $\Sigma^{(4)}(K^-) \equiv VG_0^{(4)}(K^-)V$.

O Kernel da equação (4.5) ainda contém uma soma infinita de termos, correspondente à propagação de três corpos na Frente de Luz, que são obtidos resolvendo-se a equação (4.6). Aproximando a equação (4.6) em ordem g^0, temos:

$$G^{(3)}(K^-) \cong G_0^{(3)}(K^-) \; ,$$

dessa forma, podemos obter uma equação não-perturbativa com o Kernel calculado na ordem g^2. Assim a equação (4.5) resulta em:

$$G_{g^2}^{(2)}(K^-) = G_0^{(2)}(K^-) + G_0^{(2)}(K^-)\Sigma^{(3)}(K^-)G_{g^2}^{(2)}(K^-) \; ,$$

iterando esta equação para $G^{(2)}(K^-)$ até segunda ordem, temos que:

$$G_{g^2}^{(2)}(K^-) = G_0^{(2)}(K^-) + G_0^{(2)}(K^-)\Sigma^{(3)}(K^-) \left\{ G_0^{(2)}(K^-) + G_0^{(2)}(K^-)\Sigma^{(3)}(K^-)G_{g^2}^{(2)}(K^-) \right\} \; , \tag{4.7}$$

em que $\Sigma^{(3)}(K^-) \equiv VG_0^{(3)}(K^-)V$.

Vamos agora fazer o produto $G_0^{(2)}(K^-)\Sigma^{(3)}(K^-)$ pelo primeiro termo da soma entre as chaves, então temos que:

$$\Delta G_{g^2}^{(2)}(K^-) = G_0^{(2)}(K^-)\Sigma^{(3)}(K^-)G_0^{(2)}(K^-) \; . \tag{4.8}$$

A equação (4.8) é a correção perturbativa em segunda ordem na constante de acoplamento da função de Green de dois corpos. Podemos expandir a equação (4.7) até a quarta ordem da constante de acoplamento, mas não obteremos o termo associado à propagação global de quatro corpos nas correções aos propagadores em g^4. A propagação global do estado intermediário de quatro corpos tem alguma importância quando comparamos os resultados numéricos para o estado ligado de dois bósons Φ_1 e Φ_2 obtidos da equação de Bethe-Salpeter quadridimensional ou covariante e sua projeção na Frente de Luz. Porém, em geral a equação de Bethe-Salpeter quadridimensional na aproximação de "escada" é representada na Frente de Luz pelo conjunto de equações acopladas hierárquicas dadas pela equações (4.2).

4.3 Truncamento das equações hierárquicas: $O(g^4)$

Para obtermos a função de Green de dois bósons corrigida perturbativamente até a quarta ordem na constante de acoplamento, ou seja, obter a correção $\Delta G^{(2)}_{g^4}(K^-)$, devemos fazer a aproximação

$$G^{(3)}(K^-) \cong G^{(3)}_0(K^-) + \Delta G^{(3)}_{g^2}(K^-) \ , \tag{4.9}$$

portanto para obter a aproximação de $G^{(2)}(K^-)$ em ordem g^4 teremos que usar primeiro a equação (4.9) na equação

$$\begin{aligned} G^{(2)}_{g^4}(K^-) &= G^{(2)}_0(K^-) + \\ &+ G^{(2)}_0(K^-) V \left(G^{(3)}_0(K^-) + \Delta G^{(3)}_{g^2}(K^-) \right) V G^{(2)}_{g^4}(K^-) \ , \end{aligned} \tag{4.10}$$

onde a aproximação $G^{(3)}(K^-)$ da equação (4.9) é solução perturbativa em ordem g^2 do conjunto de equações hierárquicas (4.2) com $G^{(4)}(K^-) \cong G^{(4)}_0(K^-)$, que podemos escrever como:

$$G^{(3)}(K^-) \cong G^{(3)}_0(K^-) + \Delta G^{(3)}_{g^2}(K^-) = G^{(3)}_0(K^-) + G^{(3)}_0(K^-)\Sigma^{(4)}(K^-)G^{(3)}_0(K^-) \ . \tag{4.11}$$

A equação (4.11) é necessária para reproduzirmos os resultados covariantes de $G^{(2)}(K^-)$ até ordem g^4, onde encontramos o efeito da propagação intermediária de estados de Fock de quatro corpos. A equação (4.10) iterada duas vezes é:

$$\begin{aligned} G^{(2)}_{g^4} &= G^{(2)}_0 + G^{(2)}_0 \Sigma^{(3)} G^{(2)}_0 + \\ &+ G^{(2)}_0 \Sigma^{(3)} G^{(2)}_0 \Sigma^{(3)} G^{(2)}_0 + \\ &+ G^{(2)}_0 \Sigma^{(3)} G^{(2)}_0 \Sigma^{(3)} G^{(2)}_0 \Sigma^{(3)} G^{(2)}_{g^4} \ , \end{aligned} \tag{4.12}$$

onde por simplicidade não indicamos a dependência em K^-, e lembramos que $G^{(3)}$ é obtido da aproximação dada na equação (4.11). A solução perturbativa da equação (4.12) até ordem g^4 pode ser facilmente obtida se desprezarmos o último termo que tem ordem mínima g^6 e aproximarmos os restantes até ordem g^4. Separando os termos perturbativos da equação (4.12) em ordem g^4, temos que

$$\Delta G^{(2)}_{g^4} = G^{(2)}_0 \Sigma^{(3)} G^{(2)}_0 \Sigma^{(3)} G^{(2)}_0 + G^{(2)}_0 \Sigma^{(3)} G^{(4)}_0 \Sigma^{(3)} G^{(2)}_0 \ , \tag{4.13}$$

em que será a correção até a quarta ordem na constante de acoplamento g. Desta forma concluímos que para reproduzirmos exatamente os resultados perturbativos obtidos da redução à Frente de Luz do propagador covariante de dois bósons até ordem g^{2n} na aproximação "escada", devemos construir o Kernel da equação para $G^{(2)}(K^-)$ até ordem g^{2n}.

No próximo capítulo, construímos a equação integral homogênea para o vértice do estado ligado na Frente de Luz, partindo da equação (4.10) com o Kernel aproximado em ordem g^4.

Capítulo 5

Solução Computacional para o Estado Ligado: Diagrama Escada

Agora construiremos a equação integral para o vértice do estado ligado de dois bósons interagentes na Frente de Luz, onde é necessário introduzir o conceito de "vértice" associado a uma função de onda de um estado ligado [4].

5.1 Equação de Bethe-Salpeter na Frente de Luz

A equação integral de Bethe-Salpeter na Frente de Luz pode ser vista de uma maneira equivalente como a equação de Schrödinger para representação de momentos na Mecânica Quântica. A vizualização dessa observação está em perceber que a equação diferencial de Schrödinger pode ser reescrita como uma equação integral de Fredholm, onde o seu kernel é um potencial. Esse fato é descrito no apêndice A.

Com isso, podemos introduzir, inicialmente, o conceito de "vértice" através da equação de Schrödinger para o estado ligado de dois corpos, que no centro de massa é dada por

$$\left(\frac{p^2}{2m} + V\right) |\Psi_B\rangle = -E_B \, |\Psi_B\rangle \, , \tag{5.1}$$

onde $\overrightarrow{p}$ é o momento relativo das duas partículas de mesma massa m, V é o potencial e $-E_B$ é a energia de ligação. Reescrevendo a equação(5.1), temos que

$$|\Psi_B\rangle = \frac{1}{\left(-E_B - \frac{p^2}{m}\right)} V \, |\Psi_B\rangle \, , \tag{5.2}$$

onde o vértice é dado por $V \, |\Psi_B\rangle = |\Gamma_B\rangle$.

Nosso interesse, é definir o vértice do estado ligado de dois bósons usando posteriormente as equações hierárquicas das funções de Green (4.2), da qual obtemos uma equação não-perturbativa para o propagador de dois bósons;

$$G^{(2)} = G_0^{(2)} + G_0^{(2)} \Sigma^{(3)} G^{(2)}, \tag{5.3}$$

que permite em princípio o aparecimento de estados ligados.

Próximo à região de energia do estado ligado a função de Green tem um pólo:

$$\lim_{K^- \to K_B^-} G^{(2)}(K^-) = \frac{|\psi_B\rangle \langle \psi_B|}{K^- - K_B^-}, \tag{5.4}$$

onde $|\psi_B\rangle$ é a função de onda do estado ligado.

Assim, introduzindo a equação (5.4) em (5.3) e efetuando o limite $K^- \to K_B^-$, temos

$$|\psi_B\rangle = G_0^{(2)}(K_B^-)\Sigma^{(3)}(K_B^-)|\psi_B\rangle, \tag{5.5}$$

com o Kernel definido pela hierarquia das equações (4.2) e $\Sigma^{(3)}(K_B^-) \equiv VG^{(3)}(K_B^-)V$. Isto pode ser também escrito como uma equação de autovalor de um operador de massa ao quadrado

$$\left[M_0^2 + K^+\Sigma^{(3)}(K_B^-)\right] |\psi_B\rangle = (M_2)^2 \, |\psi_B\rangle, \tag{5.6}$$

onde $(M_2)^2 = K^+K_B^- - K_\perp^2$, $M_0^2 = K^+K^-_{(2)on} - K_\perp^2$ e $K^-_{(2)on}$ é definido na equação (3.23).

A equação (5.5) é a equação homogênea de Bethe-Salpeter projetada na Frente de Luz, e o vértice é definido por

$$|\Gamma_B\rangle = \left(G_0^{(2)}(K_B^-)\right)^{-1} |\psi_B\rangle. \tag{5.7}$$

5.2 Aproximação de escada em $O(g^2)$

A obtenção da equação integral homogênea para o vértice até a ordem g^2, figura (5.1), é feita quando multiplicamos a equação (5.5), em ambos os membros, por $\left(G_0^{(2)}\right)^{-1}$ e usando a propriedade $G_0^{(2)}\left(G_0^{(2)}\right)^{-1} = 1$, temos:

$$|\Gamma_B\rangle = \Sigma^{(3)} G_0^{(2)} \, |\Gamma_B\rangle \,. \tag{5.8}$$

Na base de momentos cinemáticos, e definindo as frações de momentos $x = \frac{k^+}{K^+}$ e $y = \frac{q^+}{K^+}$, temos que

$$\Gamma_B(\overrightarrow{q}_\perp, y) = \int \frac{dx d^2k_\perp}{x(1-x)} \frac{K^{(3)}(\overrightarrow{q}_\perp, y; \overrightarrow{k}_\perp, x)}{M_B^2 - M_0^2} \Gamma_B(\overrightarrow{k}_\perp, x), \tag{5.9}$$

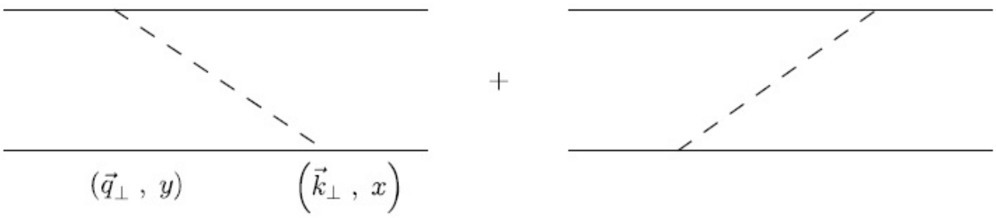


Figura 5.1: Troca de um bóson σ no Kernel da equação de Bethe-Salpeter na Frente de Luz

Fonte: Autoria própria

em que $|\Gamma_B\rangle$ e $\Gamma_B(\overrightarrow{q}_\perp, y)$ são relacionados por um fator de espaço de fase, tal que

$$\Gamma_B(\overrightarrow{q}_\perp, y) = \sqrt{q^+(K^+ - q^+)}\,\langle \overrightarrow{q}_\perp, q^+\ |\Gamma_B\rangle \tag{5.10}$$

e a massa livre do sistema de dois bósons, no centro de massa $\overrightarrow{K}_\perp = 0$, é dada por

$$M_0^2 = K^+ K^-_{(2)on} - K_\perp^2 = \frac{k_\perp^2 + m^2}{x(1-x)}, \tag{5.11}$$

e

$$\begin{aligned} K^{(3)}(\overrightarrow{q}_\perp, y; \overrightarrow{k}_\perp, x) \quad = \quad & \frac{g^2}{16\pi^3}\frac{\theta(x-y)}{(x-y)} \times \\ & \frac{1}{\left(M_B^2 - \frac{q_\perp^2+m^2}{y} - \frac{k_\perp^2+m^2}{1-x} - \frac{(q-k)_\perp^2+m_\sigma^2}{x-y}\right)} + \\ & + [k \leftrightarrow q]\,, \end{aligned} \tag{5.12}$$

sendo $M_B^2 = K_B^+ K_B^-$, no centro de massa onde $\overrightarrow{K}_\perp = 0$.

A equação (5.9) é a equação de Bethe-Salpeter na Frente de Luz na aproximação "escada" com a interação calculada em segunda ordem da constante de acoplamento, e também é a equação obtida por Weinberg [25].

5.3 Aproximação de escada em $O(g^4)$

Construímos a equação integral homogênea para o vértice do estado ligado na Frente de Luz, partindo da equação (4.10) que tem o Kernel aproximado em ordem g^4, cuja solução não-perturbativa resulta na função de Green de dois bósons:

$$G^{(2)}_{g^4}(K^-) = G^{(2)}_0(K^-) + G^{(2)}_0(K^-)\Sigma^{(3)}(K^-)G^{(2)}_{g^4}(K^-),$$

onde $\Sigma^{(3)}(K^-) \equiv VG^{(3)}(K^-)V$ e

$$\begin{aligned} G^{(3)}(K^-) &\cong G_0^{(3)}(K^-) + \Delta G_{g^2}^{(3)}(K^-) = \\ &= G_0^{(3)}(K^-) + G_0^{(3)}(K^-)\Sigma^{(4)}(K^-)G_0^{(3)}(K^-). \end{aligned}$$

Truncamos $G^{(3)}$ até a ordem g^2 e $G^{(4)}$ até g^0, incluindo, assim, as propagações intermediárias de três e quatro corpos no Kernel da equação integral para $G_{g^4}^{(2)}$.

A equação integral para o vértice do estado ligado de quarta ordem é construída de forma análoga ao realizado anteriormente (equação (5.8)), onde o vértice é dado agora por

$$|\Gamma_B\rangle = V\left(G_0^{(3)}(K^-) + \Delta G_{g^2}^{(3)}(K^-)\right) V G_0^{(2)} |\Gamma_B\rangle . \tag{5.13}$$

Definimos a partícula que "entra" nos diagramas das figuras (5.1) e (5.2) pela fração de momento $x = \frac{k^+}{K^+}$ e $\overrightarrow{k}_\perp$, a que "sai" por $y = \frac{q^+}{K^+}$ e $\overrightarrow{q}_\perp$ e a do "loop" que gera o estado intermediário de quatro corpos por $z = \frac{p^+}{K^+}$ e $\overrightarrow{p}_\perp$, como mostra a figura (5.2), então temos que:

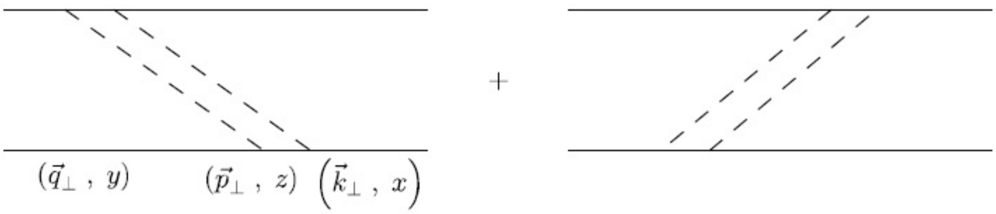


Figura 5.2: Troca simultânea de dois bósons no Kernel da equação de Bethe-Salpeter na Frente de Luz

Fonte: Autoria própria

$$\begin{aligned} \Gamma_B(\overrightarrow{q}_\perp, y) &= \int \frac{dx d^2 k_\perp}{x(1-x)} \times \\ & \frac{K^{(3)}(\overrightarrow{q}_\perp, y; \overrightarrow{k}_\perp, x) + K^{(4)}(\overrightarrow{q}_\perp, y; \overrightarrow{k}_\perp, x)}{M_B^2 - M_0^2} \Gamma_B(k_\perp, x), \end{aligned} \tag{5.14}$$

onde x, y e z são as frações dos momentos k^+, q^+ e p^+, respectivamente, e

$$\begin{aligned} K^{(4)}(\overrightarrow{q}_\perp, y; \overrightarrow{k}_\perp, x) &= \left(\frac{g^2}{16\pi^3}\right)^2 \int \frac{d^2p_\perp dz}{z\,(z-x)\,(y-z)\,(1-z)} \\ & \frac{\theta(y-z)\theta(z-x)}{\left(M_B^2 - \frac{k_\perp^2+m^2}{x} - \frac{p_\perp^2+m^2}{1-z} - \frac{(p-k)_\perp^2+m_\sigma^2}{z-x}\right)} \\ & \frac{1}{\left(M_B^2 - \frac{p_\perp^2+m^2}{z} - \frac{q_\perp^2+m^2}{1-y} - \frac{(q-p)_\perp^2+m_\sigma^2}{y-z}\right)} \\ & \frac{1}{\left(M_B^2 - \frac{k_\perp^2+m^2}{x} - \frac{q_\perp^2+m^2}{1-y} - \frac{(q-p)_\perp^2+m_\sigma^2}{y-z} - \frac{(p-k)_\perp^2+m_\sigma^2}{z-x}\right)} \\ & + [x \leftrightarrow y, k_\perp \leftrightarrow q_\perp]\,. \end{aligned} \tag{5.15}$$

O vértice $|\Gamma_B\rangle$ e $\Gamma_B(\overrightarrow{q}_\perp, y)$ estão relacionados da mesma forma apresentada na equação (5.10).

A equação (5.14) é a equação de Bethe-Salpeter na Frente de Luz com o Kernel em quarta ordem na constante de acoplamento na aproximação de "escada". É de se notar que conseguimos construir a equação de Bethe-Salpeter na aproximação "escada" a partir dos resolventes ou função de Green na Frente de Luz, e se for necessário ir até ordens mais altas em g é só adicionar termos que incluem a propagação de N corpos nas equações não-perturbativas hierárquicas (4.2).

Foram feitos cálculos numéricos para o estado fundamental [4, 10] que mostram que os efeitos do Kernel calculado em quarta ordem em g, apesar de pequenos, são necessários para melhor aproximar a solução da equação de Bethe-Salpeter covariante. Do ponto de vista prático, as ordens mais altas na aproximação "escada" para a constante de acoplamento g não devem contribuir efetivamente para aproximar os resultados da equação de Bethe-Salpeter quadridimensional na aproximação "escada". Embora, teoricamente é necessário somar todos os diagramas com estados intermediários de N corpos para que o propagador de dois bósons na Frente de Luz seja igual ao propagador covariante na aproximação "escada".

5.4 Resultados numéricos

Plotamos os valores do Kernel da equação de Bethe-Salpeter na Frente de Luz (5.14) para cada tipo de contribuição. Tais contribuições no estado intermediário são referidas como: Kernel de três corpos, quatro corpos, cruzado e antipartícula. Escolhemos $m = 1$

e para as coordenadas das frações de momentos, escolhemos os valores $x = 0.3$, $y = 0.8$ e $z = 0.6$. Os momentos k, p e q, foram calculados nas equações que representam os Kernels com os seguinte valores: $k = 1$, $p = 0.5$ e $q = 2$. Em todos os casos, a massa do bóson intermediário teve valor de $m_\sigma = 0.5$.

O Kernel referente ao estado de três corpos, equação (5.12), juntamente com a constante de acoplamento g como função da massa do estado ligado M_B para $m_\sigma = 0.5$ é mostrada na Figura 5.3.

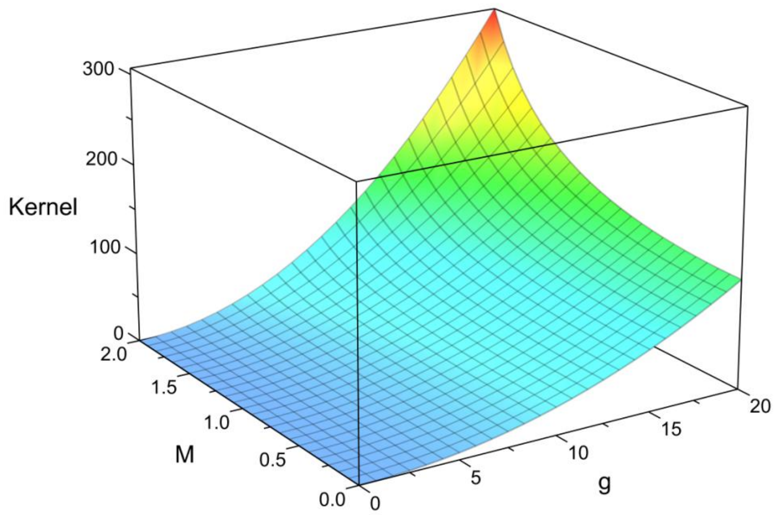


Figura 5.3: Kernel de três corpos

Fonte: Autoria própria

Observe que, fixando a constante de acoplamento e olhando a massa do estado ligado com até três partículas no estado intermediário pela equação do Kernel de três corpos (5.12), aparece uma diferença notável quando comparado à solução covariante no limite de ligação mais forte. Assim sendo, o efeito de quatro partículas no estado intermediário é importante. No limite do estado ligado mais fraco, a presença da componente do espaço de Fock de mais alta ordem não tem tanta importância para a constante de acoplamento em função da massa do estado ligado.

Na Figura 5.4, implementamos os mesmos valores fixados para o gráfico 5.3. O resultado do gráfico 5.4, apresenta que o valor do Kernel de quatro corpos, equação (5.15), contribui mais para a equação de Bethe-Salpeter (5.14) quando comparamos com o obtido no gráfico 5.3, ou seja, numa faixa de 5 a 10, com unidades apropriadas, para a constante de acoplamento g, e próximo do valor 2 para massa M_B do estado ligado, podemos perceber que o Kernel de quatro corpos “perturba” mais o sistema de interação das partículas bosônicas.

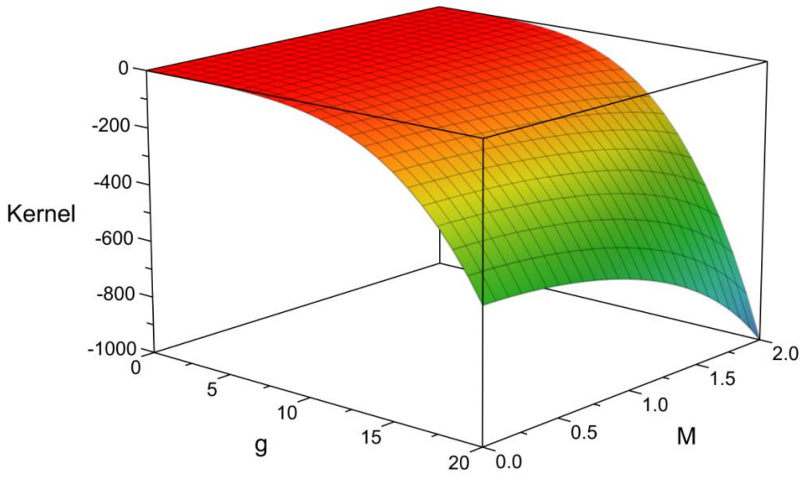


Figura 5.4: Kernel de quatro corpos

Fonte: Autoria própria

Isso pode ser melhor observado na Figura 5.5, quando implementamos a soma dos dois kernels (equação (5.12) com (5.15)) usando os mesmos valores citados anteriormente. Com o mesmo intervalo para a constante de acoplamento g, variando de 0 até 20, e o mesmo intervalo para a massa M_B, em que varia de 0 a 2 e usando uma massa do bóson intermediário igual a 0.5, de fato, podemos perceber, que quando comparamos os gráficos 5.4 e 5.5, o Kernel de quatro corpos possui uma melhor contribuição.

Comparamos graficamente a solução para o estado ligado fundamental de dois corpos na aproximação “escada” com a equação de Bethe-Salpeter covariante. Mostramos com os nossos resultados gráficos, que usando um Kernel com quatro partículas no estado intermediário e em ordem g^4, obtemos resultados que aproximam muito bem os cálculos covariantes [4]. Estes resultados indicam que no estado fundamental de sistemas fracamente ligados, a mistura de componentes de Fock é pequena de acordo com a “intuição” desenvolvida em sistema não-relativísticos.

Enfim, chamamos a atenção que para obtermos os resultados gráficos mostrados acima, usamos um pacote de cálculo do MATLAB, chamado MuPAD, onde toda codificação computacional apresentamos no apêndice B.

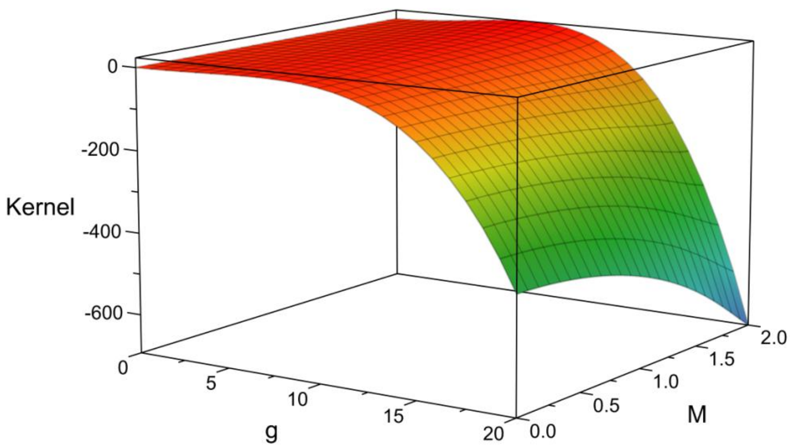


Figura 5.5: Kernel de três corpos somado com o Kernel de quatro corpos

Fonte: Autoria própria

Capítulo 6

Contribuição do Diagrama Escada Cruzado na Função de Green

6.1 Diagrama cruzado

A correção ao propagador de dois bósons originada pelo processo de troca de dois bósons intermediários σ "cruzados" é representado pelo diagrama de Feynman na Figura 6.1.

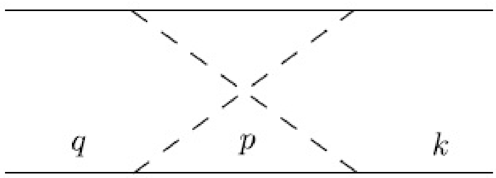


Figura 6.1: Troca de dois bósons σ "cruzados"

Fonte: Autoria própria

Explicitamente esta correção ao propagador é escrita em função dos propagadores de um bóson e é dado pela seguinte equação

$$\begin{aligned} \Delta_\times G(x^+) \;=\; & (ig)^4 \int d\overline{x}_1^+ d\overline{x}_2^+ d\overline{x}_3^+ d\overline{x}_4^+ G_3(x^+ - \overline{x}_2^+) \times \\ & G_\sigma(\overline{x}_2^+ - \overline{x}_3^+) G_2(\overline{x}_2^+ - \overline{x}_1^+) G_6(x^+ - \overline{x}_4^+) \times \\ & G_\sigma(\overline{x}_4^+ - \overline{x}_1^+) G_5(\overline{x}_4^+ - \overline{x}_3^+) \times \\ & G_1(\overline{x}_1^+) G_4(\overline{x}_3^+), \end{aligned} \tag{6.1}$$

onde $\Delta_\times G$ é a contribuição do diagrama escada cruzado.

Teremos, depois de efetuada a transformada de Fourier, o seguinte:

$$
\begin{aligned}
\Delta_{\times}\widetilde{G}(K^-) \;\; = \;\; & \frac{(ig)^4}{2^3\,(2\pi)^3}\int dk^- dp^- dq^- \frac{dp^+ d^2p_\perp}{k^+p^+(k-p)^+(p-q)^+(K-k-q+p)^+} \times \\
& \frac{1}{(K-q)^+\,(q-p)^+\,(k-p)^+} \times \\
& \frac{1}{\left(k^- - \frac{k_\perp^2+m^2-i\varepsilon}{k^+}\right)} \frac{1}{\left(p^- - \frac{k_\perp^2+m^2-i\varepsilon}{p^+}\right)} \times \\
& \frac{1}{\left(q^- - \frac{k_\perp^2+m^2-i\varepsilon}{q^+}\right)} \frac{1}{\left(K^- - k^- - \frac{(K-k)_\perp^2+m^2-i\varepsilon}{(K-k)^+}\right)} \\
& \frac{1}{\left(K^- - q^- - \frac{(K-q)_\perp^2+m^2-i\varepsilon}{(K-q)^+}\right)} \frac{1}{\left(k^- - p^- - \frac{(k-p)_\perp^2+m_\sigma^2-i\varepsilon}{(k-p)^+}\right)} \\
& \frac{1}{\left(K^- - k^- - q^- + p^- - \frac{(K-k-q+p)_\perp^2+m^2-i\varepsilon}{(K-k-q+p)^+}\right)} \\
& \frac{1}{\left(q^- - p^- - \frac{(q-p)_\perp^2+m_\sigma^2-i\varepsilon}{(q-p)^+}\right)},
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

Para $K^+ > 0$, as regiões de integração em p^+ que definem a posição dos pólos no plano complexo de p^- são:

a) $0 < q^+ < p^+ < k^+ < K^+$

b) $0 < k^+ < p^+ < q^+ < K^+$

c) $0 < p^+ < q^+ < k^+ < K^+$

d) $0 < p^+ < k^+ < q^+ < K^+$

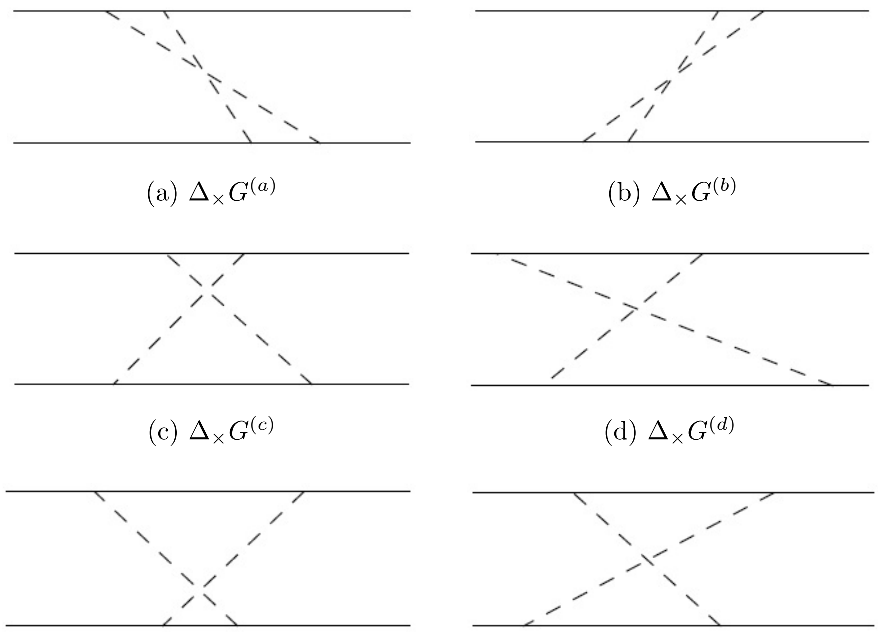
e) $0 < k^+ < q^+ < p^+ < K^+$

f) $0 < q^+ < k^+ < p^+ < K^+$

Nas regiões “c” e “d” usa-se o método de separação em frações parciais por duas vezes na integração em p^-; em “a”, “b”, “e” e “f” não é necessário, sendo que as regiões “e” e “f” têm resultado nulo para a integração em p^-. Os diagramas por região são mostrados na Figura 6.2.

Depois de efetuadas as integrações analíticas em k^-, p^- e q^- temos que

$$
\Delta_{\times}\widetilde{G}(K^-) = \Delta_{\times}\widetilde{G}^a(K^-) + \Delta_{\times}\widetilde{G}^b(K^-) + \Delta_{\times}\widetilde{G}^c(K^-) + \Delta_{\times}\widetilde{G}^d(K^-) \tag{6.3}
$$



(a) $\Delta_\times G^{(a)}$ (b) $\Delta_\times G^{(b)}$

(c) $\Delta_\times G^{(c)}$ (d) $\Delta_\times G^{(d)}$

(e) $\Delta_\times G^{(d)}$ (f) $\Delta_\times G^{(c)}$

Figura 6.2: Diagramas “escada-cruzados” ordenados no tempo x^+

Fonte: Autoria própria

onde

$$
\begin{aligned}
\Delta_\times \widetilde{G}^a(K^-) \;=\; (ig)^4 \int & \frac{dp^+ d^2p_\perp \theta(k^+ - p^+)\theta(p^+ - q^+)}{2k^+(K-k)^+\left(K^- - \frac{k_\perp^2 + m^2 - i\varepsilon}{k^+} - \frac{(K-k)_\perp^2 + m^2 - i\varepsilon}{(K-k)^+}\right)} \\
& \frac{1}{2p^+(k-p)^+(p-q)^+(K-k-q+p)^+} \times \\
& \frac{1}{\left(K^- - \frac{p_\perp^2 + m^2 - i\varepsilon}{p^+} - \frac{(K-k)_\perp^2 + m^2 - i\varepsilon}{(K-k)^+} - \frac{(k-p)_\perp^2 + m^2 - i\varepsilon}{(k-p)^+}\right)} \times \\
& \frac{1}{\left(K^- - \frac{(p-q)_\perp^2 + m_\sigma^2 - i\varepsilon}{(p-q)^+} - \frac{(k-p)_\perp^2 + m_\sigma^2 - i\varepsilon}{(k-p)^+} - \frac{(K-k)_\perp^2 + m^2 - i\varepsilon}{(K-k)^+} - \frac{q_\perp^2 + m^2 - i\varepsilon}{q^+}\right)} \times \\
& \frac{1}{\left(K^- - \frac{q_\perp^2 + m^2 - i\varepsilon}{q^+} - \frac{(k-p)_\perp^2 + m_\sigma^2 - i\varepsilon}{(k-p)^+} - \frac{(K-k-q+p)_\perp^2 + m^2 - i\varepsilon}{(K-k-q+p)^+}\right)} \\
& \frac{1}{2q^+(K-q)^+\left(K^- - \frac{q_\perp^2 + m^2 - i\varepsilon}{q^+} - \frac{(K-q)_\perp^2 + m^2 - i\varepsilon}{(K-q)^+}\right)},
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

e

$$
\Delta_\times \widetilde{G}^b(K^-) = \Delta_\times \widetilde{G}^a(K^-)[k \leftrightarrow q], \tag{6.5}
$$

representados nas Figuras 6.2a e 6.2b respectivamente.

As regiões "c" e "d" têm como contribuição para o propagador

$$\Delta_\times \widetilde{G}^c(K^-) = (ig)^4 \int \frac{dp^+ d^2p_\perp \theta(q^+ - p^+)\theta(k^+ - p^+)}{2k^+(K-k)^+\left(K^- - \frac{k_\perp^2+m^2-i\varepsilon}{k^+} - \frac{(K-k)_\perp^2+m^2-i\varepsilon}{(K-k)^+}\right)}$$
$$\frac{1}{2p^+(k-p)^+(p-q)^+(K-k-q+p)^+} \times$$
$$\frac{1}{\left(K^- - \frac{p_\perp^2+m^2-i\varepsilon}{p^+} - \frac{(q-p)_\perp^2+m_\sigma^2-i\varepsilon}{(q-p)^+} - \frac{(K-k-q+p)_\perp^2+m^2-i\varepsilon}{(K-k-q+p)^+} - \frac{(k-p)_\perp^2+m_\sigma^2-i\varepsilon}{(k-p)^+}\right)} \times$$
$$_\times\widetilde{G'}^c \frac{1}{2q^+(K-q)^+\left(K^- - \frac{q_\perp^2+m^2-i\varepsilon}{q^+} - \frac{(K-q)_\perp^2+m^2-i\varepsilon}{(K-q)^+}\right)}, \tag{6.6}$$

onde

$$_\times\widetilde{G'}^c = \frac{1}{\left(K^- - \frac{q_\perp^2+m^2-i\varepsilon}{q^+} - \frac{(k-p)_\perp^2+m_\sigma^2-i\varepsilon}{(k-p)^+} - \frac{(K-k-q+p)_\perp^2+m^2-i\varepsilon}{(K-k-q+p)^+}\right)} \times$$
$$\frac{1}{\left(K^- - \frac{k_\perp^2+m^2-i\varepsilon}{k^+} - \frac{(K-k-q+p)_\perp^2+m_\sigma^2-i\varepsilon}{(K-k-q+p)^+} - \frac{(q-p)_\perp^2+m^2-i\varepsilon}{(q-p)^+}\right)} \times$$
$$\frac{1}{\left(K^- - \frac{k_\perp^2+m^2-i\varepsilon}{k^+} - \frac{(q-p)_\perp^2+m_\sigma^2-i\varepsilon}{(q-p)^+} - \frac{(K-k-q+p)_\perp^2+m^2-i\varepsilon}{(K-k-q+p)^+}\right)} \times$$
$$\frac{1}{\left(K^- - \frac{p_\perp^2+m^2-i\varepsilon}{p^+} - \frac{(q-p)_\perp^2+m_\sigma^2-i\varepsilon}{(q-p)^+} - \frac{(K-q)_\perp^2+m^2-i\varepsilon}{(K-q)^+}\right)}. \tag{6.7}$$

A correção perturbativa ao propagador de dois bósons da equação (6.6) está representada pelos diagramas indicados na Figura 6.2c. A correção representada pelos diagramas da Figura 6.2d é dada por:

$$\Delta_\times \widetilde{G}^d(K^-) = \Delta_\times \widetilde{G}^c(K^-)\left[k \leftrightarrow K-k, p \leftrightarrow K-k-q+p, q \leftrightarrow K-q\right]. \tag{6.8}$$

A seguir iremos deduzir a contribuição de antipartícula ao diagrama "escada-cruzado". A contribuição da propagação de antipartícula acontece para $p^+ < 0$ e $K^+ - k^+ - q^+ + p^+ < 0$. Vamos analisar o primeiro caso, $p^+ < 0$.

A região de momento que está relacionada com a representação positiva " + " que permitem pólos posicionados em ambos os semi-planos complexos de p^-, e portanto resíduo não-nulo, é $k^+ < p^+ < 0$ e $|p^+| + k^+ + q^+ < K^+$. Assim, o resultado das integrais nos momentos, em que estão relacionados com a representação negativa " − ", para $0 < q^+ < K^+$ e $0 < k^+ < K^+$ que correspondem às únicas possibilidades que permitem resultados não-nulo das integrais em k^- e q^- para $k^+ < p^+ < 0$, é dado pelo diagrama representado na Figura 6.3 e o resultado é dado na equação (6.9):

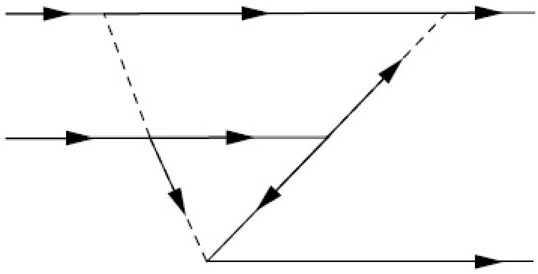


Figura 6.3: Contribuição do processo de criação de par ao diagrama “escada-cruzado”

Fonte: Autoria própria

$$
\begin{aligned}
\Delta_{\times}\widetilde{G}^{ant}(K^-) &= \frac{(ig)^4}{8}\int dp^+ d^2p_\perp \frac{\theta(k^+ + |p^+|)\theta(q^+ + |p^+|)}{k^+\,|p^+|\,q^+(|p|+k)^+(q+|p|)^+}\times \\
&\frac{\theta(K^+ - |p^+| - q^+ - k^+)}{(K-k)^+\,(K-q)^+\,(K-|p|-q-k)^+}\times \\
&\frac{1}{(K^- - K_0^-)}\frac{1}{(K^- - Q_0^-)}\frac{1}{(K^- - T^-)}\times \\
&\frac{1}{(K^- - J_a^-)}\frac{1}{(K^- - T'^-)}+ \\
+[k &\leftrightarrow q] + [k\to K-k, q\to K-q] + [k\to K-q, q\to K-k],
\end{aligned} \tag{6.9}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
T^- &= \frac{(p-q)_\perp^2 + m_\sigma^2}{q^+ + |p^+|} + \frac{(K+p-q-k)_\perp^2 + m^2}{K^+ - k^+ - q^+ - |p^+|} + \\
&+ \frac{k_\perp^2 + m^2}{k^+}, \\
J_a^- &= \frac{q_\perp^2 + m^2}{q^+} + \frac{(K-k-q+p)_\perp^2 + m^2}{K^+ - k^+ - q^+ - |p^+|} + \\
&+ \frac{p_\perp^2 + m^2}{|p^+|} + \frac{k_\perp^2 + m^2}{k^+}, \\
T'^- &= \frac{(q-p)_\perp^2 + m_\sigma^2}{q^+ + |p^+|} + \frac{(K-k-w+p)_\perp^2 + m^2}{K^+ - k^+ - q^+ - |p^+|} + \\
&+ \frac{q_\perp^2 + m^2}{q^+}.
\end{aligned} \tag{6.10}
$$

O propagador de quatro corpos, J_a^-, possui uma propagação para o passado da Frente de Luz de uma antipartícula com $p^+ < 0$. No instante $\overline{x}_2^+ > 0$ o par partícula-antipartícula é produzido pelo bóson σ, em seguida a antipartícula encontra uma partícula de momento $k^+ > 0$, ocorrendo a aniquilação e a produção de um bóson σ de momento $|p^+| + k^+ > 0$ que continua a se propagar para o futuro da Frente de Luz.

6.2 Contribuição do diagrama cruzado para as equações hierárquicas

As equações (6.3) e (6.9) do diagrama escada cruzado, podem contribuir para as equações hierárquicas do diagrama escada (4.2) na forma que sejam inclusas como correções [10]. Diante disso, temos:

$$\begin{aligned}
G^{(2)}(K^-) &= G_0^{(2)}(K^-) + G_0^{(2)}(K^-)\Sigma^{(3)}(K^-)G^{(2)}(K^-) \ , \\
G^{(3)}(K^-) &= G_0^{(3)}(K^-) + G_0^{(3)}(K^-)\Sigma^{(4)}(K^-)G^{(3)}(K^-) \ , \\
G^{(4)}(K^-) &= G_0^{(4)}(K^-) + \Delta_\times G^{(4)}(K^-) + G_0^{(4)}(K^-)\Sigma^{(5)}(K^-)G^{(4)}(K^-) \ , \\
&\vdots \qquad \vdots \\
G^{(N)}(K^-) &= G_0^{(N)}(K^-) + G_0^{(N)}(K^-)\Sigma^{(N+1)}(K^-)G^{(N)}(K^-) \ , \\
&\vdots \qquad \vdots
\end{aligned} \tag{6.11}$$

onde $\Sigma^{(N+1)}(K^-) \equiv VG^{(N+1)}(K^-)V$ e $\Delta_\times G^{(4)}(K^-) = {}_\times G^{(4)}(K^-) + {}_\times G^{(4)ant}(K^-)$ é a inclusão do diagrama "escada cruzado", com ${}_\times G^{(4)}(K^-)$ representando a função de Green para partícula e ${}_\times G^{(4)ant}(K^-)$ representando a função de Green para antipartícula, ambas no diagrama cruzado. V é o mesmo vértice da interação representado por (4.3).

O conjunto de equações (6.11) inclue, em particular, a aproximação de "escada" e "escada cruzado" para a correção da função de Green na Frente de Luz. As equações hierárquicas (6.11), correspondem a um truncamento no espaço de Fock na Frente de Luz, tal como as equações hierárquicas do diagrama escada (4.2).

De uma maneira semelhante à seção 4.3 do Capítulo 4, podemos obter a função de Green de dois bósons com correção perturbativa até a quarta ordem na constante de acoplamento g. Ou seja, encontrar $\Delta G_{g^4}^{(2)}(K^-)$, para o diagrama escada cruzado, é fazer a mesma aproximação mostrada em (4.9), isto é, $G^{(3)}(K^-) \cong G_0^{(3)}(K^-) + \Delta G_{g^2}^{(3)}(K^-)$. Logo, para obter a aproximação de $G^{(2)}(K^-)$ em ordem g^4 no diagrama escada cruzado, teremos, do mesmo modo da seção 4.3 do Capítulo 4, que usar a equação (4.9) na equação (4.10). Por outro lado, a aproximação $G^{(3)}(K^-)$ da equação (4.9) no diagrama escada cruzado será solução perturbativa em ordem g^2 do conjunto de equações hierárquicas (6.11). Como as equações hierárquicas (6.11) estão relacionadas com o diagrama "escada" e "escada cruzado", então temos a aproximação

$$G^{(4)}(K^-) \cong G_0^{(4)}(K^-) + \Delta_\times G_0^{(4)}(K^-), \tag{6.12}$$

em que $\Delta_{\times} G_0^{(4)}(K^-) = {}_{\times}G_0^{(4)}(K^-) + {}_{\times}G_0^{(4)ant}(K^-)$ com ${}_{\times}G_0^{(4)}(K^-)$ representando a função de Green para partículas livres e ${}_{\times}G_0^{(4)ant}(K^-)$ representando a função de Green para antipartículas livres.

Assim, podemos escrever $G^{(3)}(K^-)$ como:

$$
\begin{aligned}
G^{(3)}(K^-) &= G_0^{(3)}(K^-) + \\
&+ G_0^{(3)}(K^-) V \left[G_0^{(4)}(K^-) + {}_{\times}G_0^{(4)}(K^-) + {}_{\times}G_0^{(4)ant}(K^-) \right] V G_0^{(3)}(K^-).
\end{aligned} \tag{6.13}
$$

De maneira análoga ao diagrama escada (equação (4.11)) a equação (6.13) no diagrama escada cruzado, também será necessária para a reprodução dos resultados covariantes de $G^{(2)}(K^-)$ até ordem g^4, onde encontraremos o efeito da propagação intermediária de estados de Fock de quatro corpos. Sabemos que a equação (4.10), omitindo a dependência em K^-, iterada duas vezes resulta em:

$$
\begin{aligned}
G_{g^4}^{(2)} &= G_0^{(2)} + G_0^{(2)} \Sigma^{(3)} G_0^{(2)} + \\
&+ G_0^{(2)} \Sigma^{(3)} G_0^{(2)} \Sigma^{(3)} G_0^{(2)} + \\
&+ G_0^{(2)} \Sigma^{(3)} G_0^{(2)} \Sigma^{(3)} G_0^{(2)} \Sigma^{(3)} G_{g^4}^{(2)} \;,
\end{aligned} \tag{6.14}
$$

onde $\Sigma^{(3)} \equiv V G^{(3)} V$ e lembrando que agora $G^{(3)}$ é obtido da aproximação dada na equação (6.13), então a solução perturbativa da equação (6.14) até ordem g^4 será encontrada, também, desprezando o último termo com ordem mínima g^6 e aproximando os restantes até ordem g^4. Assim, separando os termos perturbativos da equação (6.14) em ordem g^4, temos que

$$
\begin{aligned}
\Delta G_{g^4}^{(2)} &= G_0^{(2)} \Sigma^{(3)} G_0^{(2)} \Sigma^{(3)} G_0^{(2)} + \\
&+ G_0^{(2)} \Sigma^{(3)} G_0^{(4)} \Sigma^{(3)} G_0^{(2)} + \\
&+ G_0^{(2)} \Sigma^{(3)} {}_{\times}G_0^{(4)} \Sigma^{(3)} G_0^{(2)} + \\
&+ G_0^{(2)} \Sigma^{(3)} {}_{\times}G_0^{(4)ant} \Sigma^{(3)} G_0^{(2)} \;,
\end{aligned} \tag{6.15}
$$

onde $\Sigma^{(3)} \equiv V G_0^{(3)} V$.

A equação (6.15) será a correção até a quarta ordem na constante de acoplamento. De modo semelhante à seção 4.3 do Capítulo 4, podemos concluir que para reproduzirmos exatamente os resultados perturbativos obtidos da redução à Frente de Luz do propagador covariante de dois bósons até ordem g^{2n} na aproximação “escada cruzado”, também devemos fazer a construção do Kernel da equação para $G^{(2)}(K^-)$ até ordem g^{2n}.

Capítulo 7

Solução Computacional para o Estado Ligado: Diagrama Cruzado

7.1 Construção da equação integral para o vértice no diagrama cruzado

A construção da equação integral para o vértice segue o mesmo procedimento feito para o diagrama escada, porém temos que adicionar na equação (5.13) a função de Green para o diagrama cruzado

$$
\begin{aligned}
|\Psi_B\rangle &= G_0^{(2)}(K_B^-)V\{G_0^{(3)}(K_B^-) + \\
&\quad G_0^{(3)}(K_B^-)V[G_0^{(4)}(K_B^-) + {}_\times G^{(4)}(K_B^-) + {}_\times G^{(4)ant}(K_B^-)]VG_0^{(3)}(K_B^-)\}V\,|\Psi_B\rangle
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

O vértice para o estado ligado satisfaz agora a seguinte equação integral homogênea

$$
\begin{aligned}
\Gamma_B(\overrightarrow{q}_\perp, y) &= \int \frac{dxd^2k_\perp}{x(1-x)} \frac{\Gamma_B(\overrightarrow{k}_\perp, x)}{M_B^2 - M_o^2} \times \\
&\quad \Big[K^{(3)}(q_\perp, y; \overrightarrow{k}_\perp, x) + K^{(4)}(\overrightarrow{q}_\perp, y; \overrightarrow{k}_\perp, x) + \\
&\quad {}_\times K^{(4)}(\overrightarrow{q}_\perp, y; \overrightarrow{k}_\perp, x) + {}_\times K^{(4)ant}(\overrightarrow{q}_\perp, y; \overrightarrow{k}_\perp, x)\Big],
\end{aligned}
\tag{7.2}
$$

onde ${}_\times K^{(4)}$ é o kernel de quatro corpos no diagrama cruzado dado por

$$
{}_\times K^{(4)} = \left(\frac{g^2}{16\pi^3}\right)^2 \int \frac{d^2p_\perp dz\theta(1-z)}{z\,(x-z)\,(1-z-x-y)} \left({}_\times K' + {}_\times K''\right), \tag{7.3}
$$

com

$$
\begin{aligned}
{}_{\times}K' \quad = \quad & \frac{\theta(z-y)\theta(x-z)}{(z-y)\left[M_B^2 - \frac{p_\perp^2+m^2-i\varepsilon}{z} - \frac{k_\perp^2+m^2-i\varepsilon}{1-x} - \frac{(k-p)_\perp^2+m_\sigma^2-i\varepsilon}{x-z}\right]} \times \\
& \frac{1}{M_B^2 - \frac{(p-q)_\perp^2+m_\sigma^2-i\varepsilon}{z-y} - \frac{(k-p)_\perp^2+m_\sigma^2-i\varepsilon}{x-z} - \frac{k_\perp^2+m^2-i\varepsilon}{1-x} - \frac{q_\perp^2+m^2-i\varepsilon}{y}} \times \\
& \frac{1}{M_B^2 - \frac{(k-p)_\perp^2+m_\sigma^2-i\varepsilon}{x-z} - \frac{(p-k-q)_\perp^2+m^2-i\varepsilon}{1-z-x-y} - \frac{q_\perp^2+m_\sigma^2-i\varepsilon}{y}} + \\
& [x \leftrightarrow y, k_\perp \leftrightarrow q_\perp] , \qquad (7.4)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
{}_{\times}K'' \quad = \quad & \frac{\theta(y-z)\theta(x-z)}{(y-z)} \times \\
& \frac{1}{M_B^2 - \frac{(k-p)_\perp^2+m_\sigma^2-i\varepsilon}{x-z} - \frac{(K-p-k-q)_\perp^2+m^2-i\varepsilon}{1-z-x-y} - \frac{p_\perp^2+m^2-i\varepsilon}{z} - \frac{(q-p)_\perp^2+m_\sigma^2-i\varepsilon}{y-z}} \times \\
& \frac{1}{M_B^2 - \frac{(q-p)_\perp^2+m_\sigma^2-i\varepsilon}{y-z} - \frac{(K-p-k-q)_\perp^2+m^2-i\varepsilon}{1-z-x-y} - \frac{k_\perp^2+m^2-i\varepsilon}{x}} \times \\
& \left\{ \frac{1}{M_B^2 - \frac{(k-p)_\perp^2+m_\sigma^2-i\varepsilon}{x-z} - \frac{(K-p-k-q)_\perp^2+m^2-i\varepsilon}{1-z-x-y} - \frac{q_\perp^2+m_\sigma^2-i\varepsilon}{y}} + \right. \\
& \left. \frac{1}{M_B^2 - \frac{(q-p)_\perp^2+m_\sigma^2-i\varepsilon}{y-z} - \frac{q_\perp^2+m^2-i\varepsilon}{1-y} - \frac{p_\perp^2+m^2-i\varepsilon}{z}} \right\} + \qquad (7.5) \\
& [x \leftrightarrow 1-x; z \leftrightarrow 1+z-x-y, p_\perp \leftrightarrow p_\perp \leftrightarrow (1+p-k-q)_\perp; y \leftrightarrow 1-y] ,
\end{aligned}
$$

em que $x \leftrightarrow y$ significa uma troca de variável, ou seja, onde tem x passa ser y e vice-versa na equação.

A contribuição do par partícula e antipartícula ao Kernel da equação (7.2) é dada por:

$$
\begin{aligned}
\Gamma_B(q_\perp, y) \quad = \quad & \int \frac{dxd^2k_\perp}{x(1-x)} \frac{\Gamma_B(k_\perp, x)}{M_B^2 - M_o^2} \left\{ K^{(3)}(q_\perp, y; k_\perp, x) + K^{(4)}(q_\perp, y; k_\perp, x) + \right. \\
& \left. + {}_{\times}K^{(4)}(q_\perp, y; k_\perp, x) + {}_{\times}K^{(4)ant}(q_\perp, y; k_\perp, x) \right\} , \qquad (7.6)
\end{aligned}
$$

onde o Kernel para antipartícula é dado por:

$$
\begin{aligned}
{}_{\times}K^{(4)ant} &= \left(\frac{g^2}{16\pi^3}\right)^2 \int \frac{d^2k_\perp dz\theta(1+z)\theta(-z)}{|z|\,(y+|z|)\,(1-|z|-x-y)\,(x+|z|)} \times \\
& \frac{\theta(y+z)\theta(x+z)}{M_B^2 - \frac{w_\perp^2+m^2-i\varepsilon}{y} - \frac{(K+k-p-w)_\perp^2+m^2-i\varepsilon}{1-|z|-x-y} + \frac{k_\perp^2+m^2-i\varepsilon}{|z|} - \frac{p_\perp^2+m_\sigma^2-i\varepsilon}{x}} \times \\
& \frac{1}{M_B^2 - \frac{(p-k)_\perp^2+m_\sigma^2-i\varepsilon}{x+|z|} - \frac{(K+k-p-w)_\perp^2+m^2-i\varepsilon}{1-|z|-x-y} - \frac{p_\perp^2+m_\sigma^2-i\varepsilon}{x}} \times \\
& \frac{1}{M_B^2 - \frac{(w-k)_\perp^2+m_\sigma^2-i\varepsilon}{y+|z|} - \frac{(K+k-p-w)_\perp^2+m^2-i\varepsilon}{1-|z|-x-y} - \frac{w_\perp^2+m_\sigma^2-i\varepsilon}{y}}. \qquad (7.7)
\end{aligned}
$$

A equação (7.2) é a equação de Bethe-Salpeter com o Kernel expandido até quarta ordem em g na Frente de Luz na aproximação de “escada cruzado”. Na próxima seção é feita uma análise gráfica sobre a contribuição efetiva do diagrama “escada-cruzado” na equação de Bethe-Salpeter na Frente de Luz [9, 10].

7.2 Resultados numéricos

Seguindo a mesma ideia da seção 5.4 do Capítulo 5, também investigamos numericamente as contribuições dos valores dos Kernels expandidos até a quarta ordem na constante de acoplamento g ao diagrama “escada cruzado”. Por outro lado, para analisarmos tais contibuições, foram estudados os comportamentos dos Kernels presentes na equação (7.2), na qual se refere a equação de Bethe-Salpeter na Frente de Luz na aproximação de “escada cruzado”.

Basicamente os valores atribuídos para o estudo dessas contribuições dos Kernels foram os mesmos aplicados em relação à análise no diagrama escada. Para verificarmos a contribuição do Kernel cruzado, equação (7.3) e Figura 7.1, tomamos os mesmos valores apresentados na seção 5.4 do Capítulo 5, exceto para y, em que foi atribuído valor de 0.3. Com isso, os valores da constante de acoplamento g continuam em $0 \leq g \leq 20$, obedecendo uma apropriada unidade, e para a massa do estado ligado M os valores escolhidos estavam em $0 \leq M \leq 2$, também de acordo com uma unidade relevante, para todos os casos. Já a Figura 7.2, mostra-se a contribuição do Kernel de antipartícula, equação (7.7), ao digrama escada cruzado, porém com valor atribuído para x de 0.7.

Com isso, podemos observar que, nos gráficos que representam os Kernels cruzado e antipartícula (Figuras: 7.1 e 7.2), exibem uma faixa, tanto para a contante de acoplamento quanto para a massa do estado ligado, próximas de zero, ou seja, suas contribuições permanecem quase que imperceptíveis para baixas massas e pequenos valores da constante de acoplamento.

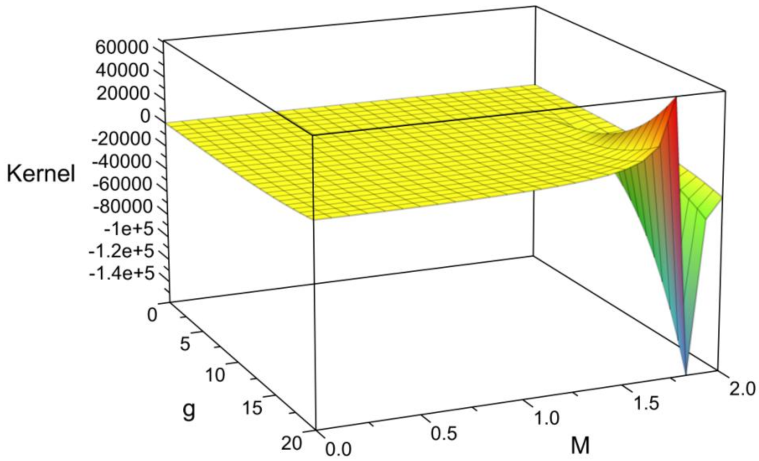


Figura 7.1: Kernel cruzado

Fonte: Autoria própria

No gráfico 7.1, no qual representa o Kernel cruzado (equação (7.3)) podemos perceber que somente vai haver alguma contribuição desse Kernel, quando os valores da massa do estado ligado estiverem maiores do que 1.5 e a constante de acoplamente estiver variando entre 15 e 20.

Porém, de uma maneira semelhante ao Kernel de três corpos, a contribuição do Kernel de antipartícula (equação (7.7)), representado pelo gráfico 7.2, ilustra que a sua "perturbação" no sistema começa quando a constante de acoplamento, g, admite valor maior do que 5 independentemente do valor da massa do estado ligado.

Assim, para ilustrarmos graficamente e mostrarmos que o Kernel cruzado é o que tem melhor contribuição quando a massa do estado ligado atinge valores maiores que 1.5, com unidade apropriada do sistema, temos, como resultados, dois gráficos que mostram tais contribuições: o primeiro, Figura 7.3, mostra uma soma parcial dos Kernels cruzado e antipartícula e, o segundo, Figura 7.4, mostra a soma total de todos os kernels, incluindo os kernels de três e quatro corpos apresentados no Capítulo 5. Nessas ilustrações, para o estado ligado no diagrama escada cruzado, também tomamos o valor da massa M em $0 \leq M \leq 2$ até a quarta ordem na constante de acoplamento g em $0 \leq g \leq 20$. De

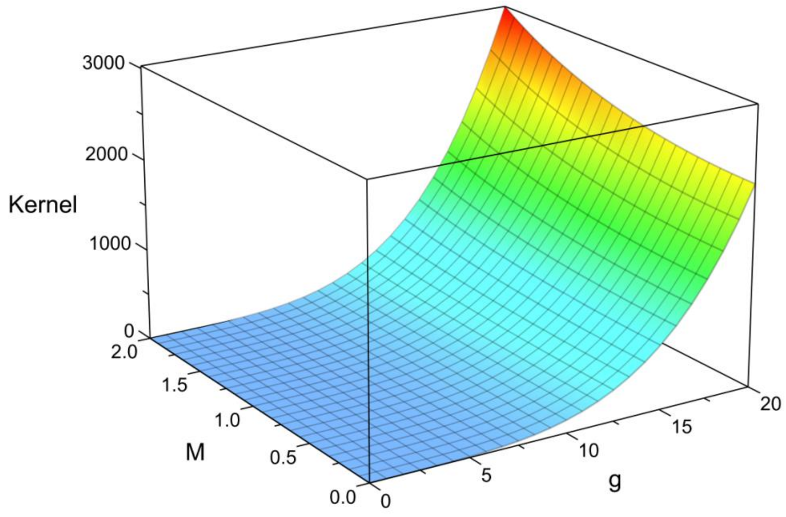


Figura 7.2: Kernel de antipartícula

Fonte: Autoria própria

fato, é perceptível que os gráficos 7.1, 7.3 e 7.4 são "parecidos". Isso ocorre, pois o Kernel cruzado possui uma melhor contribuição para o sistema de interação de partículas.

Ainda é válido ressaltar que, os gráficos mostrados neste Capítulo também foram adquiridos da mesma maneira que os gráficos apresentados na seção 5.4 do Capítulo 5, ou seja, usamos o MuPAD para a obtenção dessas figuras.

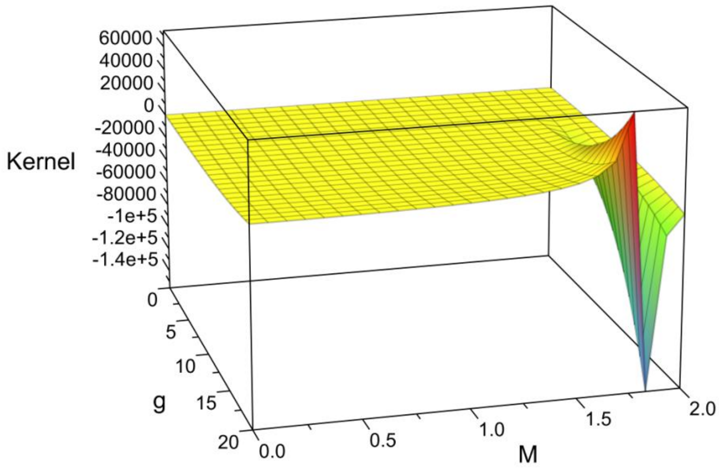


Figura 7.3: Kernel cruzado somado com o Kernel de antipartícula

Fonte: Autoria própria

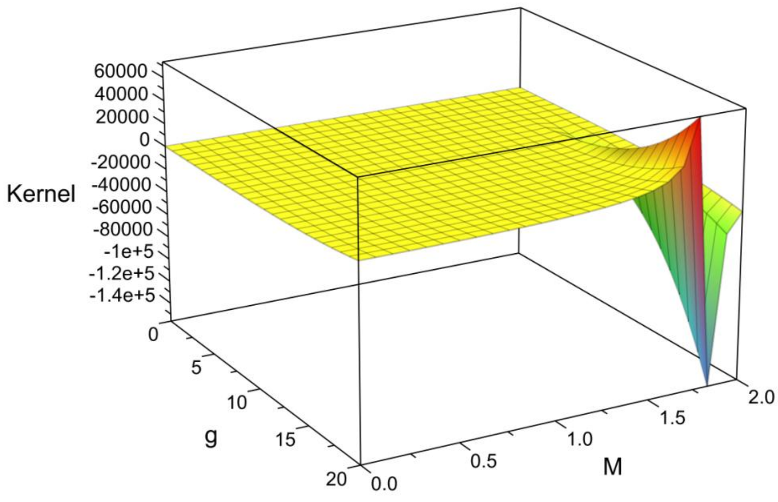


Figura 7.4: Soma de todos os Kernels: escada e escada cruzado

Fonte: Autoria própria

Capítulo 8

Considerações Finais

Inicialmente revisamos a definição do sistema de coordenadas da Frente de Luz e como é feita a realização da transformação de coordenadas do espaço de Minkowski para esse sistema. Além disso, representamos um quadrivetor na Frente de Luz e suas propriedades. Obtivemos, como consequência, a representação da partícula e antipartícula nessas novas coordenadas.

É conhecido que a função de Green é importante para alguns estudos dentro da Mecânica Quântica. Dessa forma, deduzimos o propagador quântico covariante no tempo e obtivemos a função de Green para partículas escalares, em todos os casos foi usado o sistema de coordenadas da Frente de Luz. Percebemos que este operador propaga a função onda de $x^+ = 0$ até $x^+ > 0$ que corresponde à definição da operação de ordenação temporal na coordenada x^+. Generalizamos a função de Green na Frente de Luz para 1, 2 e N bósons não interagentes se propagando para frente no tempo x^+ e usando o propagador de Feynman, mostramos como escrever a função de Green na Frente de Luz em qualquer ordem.

Construímos um conjunto de equações hierárquicas para a obter a correção à função de Green de dois bósons livres, com interação, na aproximação de "escada" e "escada cruzado" para a dinâmica definida na Frente de Luz. Assim, definimos a interação entre dois corpos mediada pela troca de uma ou mais partículas na Frente de Luz.

Introduzimos o conceito de "vértice" associado a uma função de onda de um estado ligado e assim obtemos a equação integral para o vértice do estado ligado de dois bósons interagentes na Frente de Luz, ou seja, a equação de Bethe-Salpeter na Frente de Luz. Analisamos alguns resultados gráficos, contruídos computacionalmente no MATLAB, para os valores dos Kernels, diagrama escada e escada cruzado, de três corpos, quatro corpos e com contribuição de antipartícula, com o objetivo de entender suas contribuições na equação de Bethe-Salpeter.

Os gráficos apresentados no Capítulo 5, mostram as contribuições dos Kernels nas interações no diagrama escada. Podemos observar na Figura 5.3 que a contribuição do Kernel de três corpos acontece em valor aproximado entre 50 e 100 quando a constante de acoplamento g varia em torno de 5 a 10, independentemente do valor da massa M do estado ligado. Por outro lado, o gráfico 5.4, no qual se refere à contribuição do Kernel de quatro corpos, mostra que existe uma contribuição próxima de zero quando a constante de acoplamento g assume valores entre 5 e 10 e também independe da massa.

No Capítulo 7, foram mostrados gráficos referentes as contribuições dos Kernels nas interações no diagrama escada cruzado. A Figura 7.1 apresenta que o Kernel cruzado assume valores positivos e negativos quando a massa do estado ligado M varia entre 1.5 a 2.0 não dependendo da constante de acoplamento g. Porém, observando a Figura 7.2, percebemos que a contribuição do Kernel de antipartícula na interação do diagrama escada cruzado age de forma semelhante à contribuição do Kernel de três corpos no diagrama escada, isto é, independentemente do valor da massa do estado ligado M, os valores do Kernel de antipartícula atua em torno de 500 a 1000 quando a constante de acoplamento varia de 5 a 10.

É interessante ressaltar que como a equação de Bethe-Salpeter não é resolvida analiticamente no espaço de Minkowski, então as contribuições dos Kernels apresentados nesta dissertação será de grande relevância para nos aproximarmos de uma solução da mesma, porém usando as coordenadas da Frente de Luz. Por outro lado, usar o formalismo matemático desse sistema de coordenadas gera um questionamento importante sobre a perda ou não de informação física, isto é, do ponto de vista matemático, a mudança de coordenada é bem fundamentada, mas em questão ao estudo experimental, ainda existem vários questionamentos sobre a Frente de Luz.

Toda essa técnica pode ser usada em cálculos de correntes bosônicas na Frente de Luz, trabalho recentemente publicado [26]-[29].

Apêndice A

Equação Integral de Schrödinger

A.1 Representação Momento em Mecânica Quântica

A equação de Schrödinger, na representação espaço, é definida por

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(\vec{r}) + V(\vec{r})\Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r}), \tag{A.1}$$

ou equivalentemente por

$$\left(-\Delta + a^2\right)\Psi(\vec{r}) = v(\vec{r})\Psi(\vec{r}), \tag{A.2}$$

onde,

$$a^2 = -\frac{2m}{\hbar^2}E\ ,\ v(\vec{r}) = -\frac{2m}{\hbar^2}V(\vec{r}). \tag{A.3}$$

De uma forma geral, a equação (A.2) pode ser reescrita como

$$\left(-\Delta + a^2\right)\Psi(\vec{r}) = \int v(\vec{r},\vec{r'})\Psi(\vec{r'})\ d\vec{r'}, \tag{A.4}$$

em que (A.2) se torna caso particular de (A.4) desde que seja definido

$$v(\vec{r},\vec{r'}) = v(\vec{r'})\delta(\vec{r}-\vec{r'}). \tag{A.5}$$

Aplicando a transformada de Fourier em (A.4), podemos obter

$$\int \left(-\Delta + a^2\right)\Psi(\vec{r})e^{-l\vec{k}\cdot\vec{r}}\ d^3\vec{r} = \iint v(\vec{r},\vec{r'})\Psi(\vec{r'})e^{-l\vec{k}\cdot\vec{r'}}\ d^3\vec{r'}d^3\vec{r}. \tag{A.6}$$

Considerando que

$$\Psi(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \Psi(\vec{r})e^{-l\vec{k}\cdot\vec{r}}\ d^3\vec{r}, \tag{A.7}$$

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \Psi(\vec{k})e^{-l\vec{k}\cdot\vec{r}}\ d^3\vec{k}, \tag{A.8}$$

onde $\vec{k} = \dfrac{\vec{p}}{\hbar}$, então (A.6) se tornará

$$(2\pi)^{3/2}\left(k^2 + a^2\right)\Psi(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint v(\vec{r}, \vec{r'})\Psi(\vec{k'})e^{-l\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \vec{k'}\cdot\vec{r'}\right)}\ d^3\vec{r'}\ d^3\vec{r}\ d^3\vec{k}. \tag{A.9}$$

Fazendo

$$f(\vec{k}, \vec{k'}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iint v(\vec{r}, \vec{r'})e^{-l\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \vec{k'}\cdot\vec{r'}\right)}\ d^3\vec{r'}\ d^3\vec{r}, \tag{A.10}$$

então (A.9) se tornará

$$\left(k^2 + a^2\right)\Psi(\vec{k}) = \int f(\vec{k}, \vec{k'})\Psi(\vec{k'})\ d^3\vec{k'}, \tag{A.11}$$

que é uma *equação de Fredholm de segunda espécie homogênea*, na qual $f(\vec{k}, \vec{k'})$ é o Kernel e o parâmetro a^2 corresponde ao autovalor. Essa equação é conhecida como a equação de Schrödinger na representação dos momentos.

Apêndice B

Códigos Computacionais MATLAB/MuPAD

O software MATLAB (MATrix LABoratory) se trata de um programa com linguagem interpretada com performance bastante elevada voltado especialmente para o cálculo numérico. Na realidade, o MATLAB é integrado com pacotes que realizam operações matemáticas nas mais diversas áreas, como por exemplo, análise numérica, cálculo com matrizes, processamento de sinais, construções de gráficos em ambiente de fácil utilização, etc. Tais ambientes definidos nesse software mostram os problemas e soluções matemáticos expressos na forma "puramente matemática", diferentemente da programação tradicional. De maneira resumida, MATLAB é um sistema basicamente interativo, onde sua informação é transmitida por uma matriz que não, necessariamente, precisa de dimensionamento.

Como as soluções dos problemas em MATLAB podem ser expressos de maneira semelhante como são escritas matematicamente, então um dos pacotes que realiza de maneira eficiente esse feito é o código MuPAD, em que é definido como um sistema algébrico computacional de manipulação de fórmulas matemáticas de maneira simbólica. O MuPAD foi incluído, no ano de 2008, na caixa de ferramentas de matemática simbólica conhecida por *Symbolic Math Toolbox* do MATLAB. Antes disso, o MuPAD era um software que fazia parte do mercado como um produto em seu próprio direito. Atualmente, ele continua fazendo parte do pacote Symbolic Math Toolbox e também pode ser usado como um programa que não necessita de uma outra linguagem para interpretá-lo, como é o caso do MATLAB.

Neste apêndice apresentamos os códigos computacionais elaborados para a realização dos resultados numéricos mostrados nos Capítulos 5 e 7 com o pacote MuPAD do software MATLAB.

B.1 Dados numéricos implementados no MuPAD

Para obtenção dos resultados gráficos mostrados nas figuras (5.3), (5.4), (5.5), (7.1), (7.2), (7.3) e (7.4), usamos os seguintes valores implementados no MuPAD/MATLAB:

```
k := 1:
p := .5:
q := 2:
x := .3:
y := .8:
z := .6:
m := 1:
ms := .5:
```

onde k, p e q são os momentos; x, y e z são as frações de momento; m é a massa da partícula interagente e ms é a massa do bóson intermediário. Para alguns códigos abaixo, existem valores que foram alterados para manter a uniformidade das contas.

Seguem os códigos para cada Kernel estudado.

B.2 Código: Kernel de três corpos

```
K3:=(g^2/((x-y))*((1/(M^2-(q^2+m^2)/y-
(k^2+m^2)/(1-x)-((q-k)^2+ms^2)/(x-y))))):
plot(K3,g=0..20,M=0..2, #3D,FillColorType =
Rainbow,AxesTitles = ["g", "M","Kernel"])
```

em que K3 representa o Kernel de três corpos; M a massa do estado ligado e g a constante de acoplamento.

B.3 Código: Kernel de quatro corpos

```
K4 := ((g^2)^2)*(1/(z*(z-x)*(y-z)*(1-z))*
1/(M^2-(k^2+m^2)/x-(p^2+m^2)/(1-z)-((p-k)^2+ms^2)/(z-x))*
1/(M^2-(p^2+m^2)/z-(q^2+m^2)/(1-y)-((q-p)^2+ms^2)/(y-z))*
```

```
1/(M^2-(k^2+m^2)/x-(q^2+m^2)/(1-y)-((q-p)^2+ms^2)/(y-z)-
(((p-k)^2+ms^2)/(z-x)))):
plot(K4,g=0..20,M=0..2,    #3D,FillColorType =
Rainbow,AxesTitles = ["g", "M","Kernel"])
```

onde K4 significa o Kernel de quatro corpos.

B.4 Código: Kernel de três corpos com o de quatro corpos

```
Ks1  := K3 + K4:
plot(Ks1,  g=0..20,M=0..2,#3D,FillColorType =
Rainbow,AxesTitles = ["g", "M","Kernel"])
```

Ks1 é o resultado da soma do Kernel de três corpos (K3) com o Kernel de quatro corpos (K4).

B.5 Código: Kernel cruzado

```
y  := .3:

T1  := 1/(z*(x-z)*abs((1-z-x-y))):
T2  := 1/((z-y)*(M^2-(p^2+m^2)/
z-(k^2+m^2)/(1-x)-((k-p)^2+ms^2)/(x-z))):
T3  := 1/(M^2-((p-q)^2+ms^2)/
(z-y)-((k-p)^2+ms^2)/(x-z)-(k^2+m^2)/(1-x)-(q^2+m^2)/y):
T4  := 1/(M^2-((k-p)^2+ms^2)/
(x-z)-((p-k-q)^2+m^2)/abs((1-z-x-y))-(q^2+ms^2)/y):

y  := .8:

T5  := 1/(y-z):
T6  := 1/(M^2-((k-p)^2+ms^2)/(x-z)-((1-p-k-q)^2+m^2)/
abs((1-z-x-y))-(p^2+m^2)/z-((q-p)^2+ms^2)/(y-z)):
T7  := 1/(M^2-((q-p)^2+ms^2)/(y-z)-((1-p-k-q)^2+m^2)/
abs((1-z-x-y))-((k^2+m^2)/x)):
T8  := 1/(M^2-((k-p)^2+ms^2)/(x-z)-((1-p-k-q)^2+m^2)/
```

```
abs((1-z-x-y))-((q^2+ms^2)/y)):
T9  := 1/(M^2-((q-p)^2+ms^2)/(y-z)-((q^2+m^2)/(1-y))-((p^2+m^2)/z)):
Kc  := g^4*T1*(T2*T3*T4+T5*T6*T7*(T8+T9)):
plot(Kc,g=0..20,M=0..2,   #3D,FillColorType =
Rainbow,AxesTitles = ["g", "M","Kernel"])
```

onde Kc representa o valor do Kernel cruzado e cada Ti, com i = 1,...,9, são as funções do Kernel particionadas para melhor funcionamento dos cálculos no MuPAD.

B.6 Código: Kernel antipartícula

```
x := .7:

T1  := 1/(-z*(y-z)*abs((1+z-x-y))*(x-z)):
T2  := 1/(M^2-((q^2+m^2)/y)-((k-p-q)^2+m^2)/
abs((1+z-x-y))+(k^2+m^2)/z-(p^2+ms^2)/x):
T3  := 1/(M^2-((p-k)^2+ms^2)/(x-z)-((k-p-q)^2+m^2)/
abs((1+z-x-y))-(p^2+ms^2)/x):
T4  := 1/(M^2-((q-k)^2+ms^2)/(y-z)-((k-p-q)^2+m^2)/
abs((1+z-x-y))-(q^2+ms^2)/y):
Ka  := g^4*T1*T2*T3*T4:
plot(Ka,g=0..20,M=0..2,   #3D,FillColorType =
Rainbow,AxesTitles = ["g", "M","Kernel"])
```

em que Ka representa o Kernel da antipartícula como resultado do produto de cada Ti, com i = 1,...,4, pela a constante de acoplamento g elevada à quarta potência.

B.7 Código: Kernel cruzado com o da antipartícula

```
Ks  := Kc + Ka:
plot(Ks, g=0..20,M=0..2,#3D,FillColorType =
Rainbow,AxesTitles = ["g", "M","Kernel"])
```

Ks é o resultado da soma do Kernel cruzado (Kc) com o Kernel da antipartícula (Ka).

B.8 Código: soma de todos os Kernels

```
Ks2 := Ks + Ks1:
plot(Ks2, g=0..20,M=0..2,#3D,FillColorType =
Rainbow,AxesTitles = ["g", "M","Kernel"])
```

Ks2 é o resultado da soma de Ks com Ks1, ou seja, Ks2 representa a soma de todos os valores dos Kernels estudados.

B.9 Descrição do sistema computacional

Nesta seção serão apresentadas subseções que descrevem o ambiente computacional no qual foram realizados todos os procedimentos resultantes nesta dissertação.

B.9.1 Sistema

Fabricante: Hewlett-Packard.

Modelo: HP G42 Notebook PC.

Processador: Intel(R) Core(TM) i3 CPU M370 @ 2.40GHz.

Memória instalada (RAM): 3,00 GB (utilizável: 2,86 GB).

Tipo de sistema: Sistema Operacional de 64 Bits.

Sistema operacional: Windows 7 Home Premium Copyright© 2009.

B.9.2 Computação algébrica e numérica

Software: Symbolic Math Toolbox - MuPAD version 5.9.0 (R2012b). 64-bit (win64) ©1997-2012;

MATLAB® R2012b (8.0.0.783). 64-bit (win64). August 22, 2012.

Anexo: artigo publicado

Few-Body Syst
DOI 10.1007/s00601-014-0918-z

**Alfredo Takashi Suzuki · Jorge Henrique Sales
Gislan S. Santos**

Zero Mode Effect Generalization for the Electromagnetic Current in the Light Front: Fermion Case

Received: 19 September 2014 / Accepted: 20 October 2014

Abstract We investigate the effect of the γ^+ term in the fermion propagator on the zero mode in a system composed of two free fermions propagating in a background field. For this purpose we use the technique of global propagators in the light front and current operator in order to obtain the electromagnetic current component J^-.

1 Introduction

In the traditional approach to restore covariance of the electromagnetic current in the light front [1] an "ad hoc" prescription of dislocating the pole is employed [2]. However, this procedure of "pole dislocation" has no physical grounds and the arrival at the correct result is just fortuitous. We demonstrate that the light front Fock space of positive quanta solutions is incomplete and that as a consequence the non triviality of the light front vacuum is a mandatory feature in the new scenario [3].

In an article Bakker et al. [4] studied how the behavior of the contour integration in the k^- complex plane could influence the results of integrations in the light front. Our work differs in the fact that we have no need to consider these "treacherous" arc contributions in order to recover covariance of the results from the light front calculations. In our work we show that these arc contributions are absent for we deal with "ladder" type diagrams and evaluating all the relevant ranges of integration for k^+ variables we get the correct terms equivalent to the results of computations obtained via covariant Minkowski calculations. This being our present case, it is well worth noting that no "treacherous" points have to be dealt with in our "ladder" diagram type calculations and also that our methodology does not involve any subtle or difficult points like in the case of those treacherous arc contributions, recognized as not only very difficult to handle but requiring careful consideration of the limiting procedure and thus of end-point singularities [3].

A. T. Suzuki (✉)
Instituto de Física Teórica - Univ. Estadual Paulista, Rua Dr. Bento Teobaldo Ferraz, 271,
São Paulo, SP 01140-070, Brazil
Tel.:+55-11-3393-7817
Fax: +55-11-3393-7899
E-mail: suzuki@ift.unesp.br

J. H. Sales · G. S. Santos
Universidade Estadual de Santa Cruz - PPGMC, km 16 Rodovia Jorge Amado, Ilhéus, BA 45662-000, Brazil
E-mail: jhosales@uesc.br

G. S. Santos
E-mail: gssantos@uesc.br

Published online: 01 November 2014

We show how the pair production is necessary to the complete calculation of the current's J^- component in the Drell–Yan's reference frame ($q^+ = 0$).

2 Propagator of Fermions in a Background Field

In a recent article [3] it has been considered, in the zeroth order of perturbative coupling, the calculation of the electromagnetic current in the light front coordinates for scalar bosons in the electromagnetic background field. We refer to the notation and conventions used there.

The propagator for a spin-$\frac{1}{2}$ particle is related to the scalar propagator through the following

$$S_{\mathrm{f}}(x^\mu) = \left(i\gamma^\mu \partial_\mu + m\right) S(x^\mu). \tag{1}$$

where

$$S(x^\mu) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik^\mu x_\mu}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}, \tag{2}$$

In the light front, we have

$$S(x^+) = \int \frac{dk_1^-}{(2\pi)} \frac{i e^{-ik_1^- x^+}}{2k_1^+ \left(k_1^- - \frac{\mathbf{k}_{1\perp}^2 + m^2 - i\varepsilon}{2k_1^+}\right)} \tag{3}$$

Using Eq. (2) in Eq. (1) and differentiating, we have:

$$S_{\mathrm{f}}(x^\mu) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ik^\mu x_\mu}, \tag{4}$$

where the Feynman's "slash" for any four-vector is defined as $\not{k} = k_\mu \gamma^\mu$.

If we project the integrand of Eq. (4) onto the light front coordinates we may write it (after appropriate Fourier transformation and henceforth omitting the subindex "f" for fermions) as

$$\widetilde{S}(k^-) = i \frac{\not{k}_{\mathrm{on}} + m}{2k^+ \left(k^- - k^-_{\mathrm{on}}\right)} + \frac{i\gamma^+}{2k^+} \equiv \widetilde{S}^{\mathrm{prop}}(k^-) + \frac{i\gamma^+}{2k^+}, \tag{5}$$

where $k^-_{\mathrm{on}} = \frac{(\mathbf{k}_\perp^2 + m^2)}{2k^+}$, and the propagating part is explicitly separated out into the term $\widetilde{S}^{\mathrm{prop}}(k^-)$ with $k^+ > 0$ as identified above, i.e.,

$$\widetilde{S}^{\mathrm{prop}}(k^-) = i \frac{\not{k}_{\mathrm{on}} + m}{2k^+ \left(k^- - k^-_{\mathrm{on}} + \frac{i\varepsilon}{2k^+}\right)}. \tag{6}$$

Thus, the propagator $\widetilde{S}(k^-)$ represents the covariant propagation and $\widetilde{S}^{\mathrm{prop}}(k^-)$ the propagation in the light front without the instantaneous term $\frac{\gamma^+}{2k^+}$. We also note that in the propagation in the light front time, only one state—with positive energy—propagates to the future, $x^+ > 0$.

The part of the interaction Lagrangian that contains the fermions-scalar vertex can be written as

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Interaction}} = -ieA^\mu \left(\psi_1 D_\mu \overline{\psi}_1 - \overline{\psi}_1 D_\mu \psi_1\right) = J_\mu A^\mu. \tag{7}$$

We can indicate the propagation of two fermions S_1 and S_2 that propagate from $x^+ = 0$ to $x^+ > 0$ interacting with an external electromagnetic field $A^\mu(x^+)$ at $\bar{x}_3^+$ and with the exchange of an intermediate σ boson between $\bar{x}_1^+$ and $\bar{x}_2^+$. The propagator $S_3(\bar{x}_1^+ - \bar{x}_3^+)$ which is the propagation of a fermion after the emission of σ boson at $\bar{x}_1^+$ later interacts with the external field at $\bar{x}_3^+$. The propagator S_5 is the fermion propagation after the interaction with the external field. The propagator S_4 is the fermion propagation after the absorption of the intermediate σ boson. Therefore the correction to the free propagator of two fermions in the light front with background field in the ladder diagram is:

$$S(x^+) = (-ie)\,(ig)^2 \int d\bar{x}_1^+ d\bar{x}_2^+ d\bar{x}_3^+ dq^- A^\mu(q^-) e^{-iq^-\bar{x}_3^+} S_1(\bar{x}_1^+) S_2(\bar{x}_2^+) \\ \times S_4(x^+ - \bar{x}_2^+) S_\sigma(\bar{x}_2^+ - \bar{x}_1^+) \left[S_3 \frac{\partial S_5}{\partial \bar{x}_3^\mu} - \frac{\partial S_3}{\partial \bar{x}_3^\mu} S_5 \right], \tag{8}$$

where $A^\mu(q^-)$ is the Fourier transform and μ indicates the components $-,\ +,\ \perp$. In Eq. (8) the presence of $S_\sigma(\bar{x}_2^+ - \bar{x}_1^+)$ indicates that there is a virtual σ boson that is emitted from fermion 1 at light-front time $\bar{x}_1^+$ and absorbed by fermion 2 at time $\bar{x}_2^+$. Thus, this equation represents the time-ordered vacuum expectation value of a system composed of two fermions exchanging an intermediate sigma boson and propagating in a background field, calculated up to the perturbative order $\mathcal{O}(g^2)$ in the coupling constant, which corresponds to the so-called "ladder" diagram approximation.

So, we observe that the operator component in the current $J^\mu,\ \mu = +, -, \perp$ is obtained from the operator $\mathcal{O}_\mu$ which corresponds to the components of the external electromagnetic field $A^\mu,\ \mu = -, +, \perp$ respectively such that

$$\mathcal{O}_\mu = (-ie)\,(ig)^2 \int d\bar{x}_1^+ d\bar{x}_2^+ d\bar{x}_3^+ e^{-iq^-\bar{x}_3^+} \\ \times S_1(\bar{x}_1^+) S_2(\bar{x}_2^+) S_4(x^+ - \bar{x}_2^+) \\ \times S_\sigma(\bar{x}_2^+ - \bar{x}_1^+) \left[S_3 \frac{\partial S_5}{\partial \bar{x}_3^\mu} - \frac{\partial S_3}{\partial \bar{x}_3^\mu} S_5 \right], \tag{9}$$

where the Greek index μ over the $\mathcal{O}_\mu$ reminds us which light-front components $+,\ -,$ or $\perp$ are we dealing with.

The final propagator can therefore be written as a function of only two momenta, and in this case we choose "spectator" particles with respect to the current, those labeled as 2 and 4:

$$\widetilde{S}(k_f^-) = -\frac{ie\,(ig)^2}{2^6(2\pi)^2} \int dq^-\ A^\mu(q^-) \\ \times \left\{ \int \frac{dk_2^- dk_4^- \left(k_f + k_i - 2k_4\right)_\mu}{(k_i - k_2)^+ k_2^+ (k_i - k_4)^+ k_4^+ \left(k_f - k_4\right)^+ (k_4 - k_2)^+} \right. \\ \times \frac{1}{\left[k_2^- - k_i^- + (k_i - k_2)_{\rm on} - \frac{i\epsilon}{2(k_i - k_2)^+}\right]\left[k_2^- - k_{2{\rm on}} + \frac{i\epsilon}{2k_2^+}\right]} \\ \times \frac{1}{\left[k_4^- - k_i^- + (k_i - k_4)_{\rm on} - \frac{i\epsilon}{2(k_i - k_4)^+}\right]\left[k_4^- - k_{4{\rm on}} + \frac{i\epsilon}{2k_4^+}\right]} \\ \left. \times \frac{1}{\left[k_2^- - k_4^- + (k_4 - k_2)_{\rm on} - \frac{i\epsilon}{2(k_4 - k_2)^+}\right]\left[k_4^- - k_f^- + (k_f - k_4)_{\rm on} - \frac{i\epsilon}{2(k_f - k_4)^+}\right]} \right\}, \tag{10}$$

where

$$k_{2{\rm on}} = \frac{\mathbf{k}_{2\perp}^2 + m^2}{2k_2^+}; \quad (k_i - k_2)_{\rm on} = \frac{(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_2)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_2^+)} \\ (k_i - k_4)_{\rm on} = \frac{(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_4^+)}; \quad k_{4{\rm on}} = \frac{\mathbf{k}_{4\perp}^2 + m^2}{2k_4^+} \\ (k_f - k_4)_{\rm on} = \frac{(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_4)_\perp^2 + m^2}{2(k_i^+ - k_4^+)}; \quad (k_4 - k_2)_{\rm on} = \frac{(\mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_2)_\perp^2 + m_\sigma^2}{2(k_4^+ - k_2^+)}. \tag{11}$$

We begin our discussion with an illustrative example, where the pair term appears. To this end we use the "Z-graph", that is momentum possibilities $0 < k_2^+ < k_i^+ < k_4^+ < k_f^+$. In this example we show that the current's J^- component does not have a contribution from the pair production in the Drell–Yan reference frame [5], that is, in the limit $q^+ = q^- = 0$.

We look after the components of the current operator J^μ, which as we referred before, will be obtained from the operator $\mathcal{O}_\mu$ which is represented by the square brackets in Eq. (9), so

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_\mu = -\frac{ie\,(ig)^2}{2^6(2\pi)^2}\int &\frac{dk_2^- dk_4^-\left(k_f+k_i-2k_4\right)_\mu}{(k_i-k_2)^+ k_2^+ (k_i-k_4)^+ k_4^+ \left(k_f-k_4\right)^+ (k_4-k_2)^+}\\ &\times\frac{1}{\left[k_2^- - k_i^- + (k_i-k_2)_{\text{on}} - \frac{i\epsilon}{2(k_i-k_2)^+}\right]\left[k_2^- - k_{2\text{on}} + \frac{i\epsilon}{2k_2^+}\right]}\\ &\times\frac{1}{\left[k_4^- - k_i^- + (k_i-k_4)_{\text{on}} - \frac{i\epsilon}{2(k_i-k_4)^+}\right]\left[k_4^- - k_{4\text{on}} + \frac{i\epsilon}{2k_4^+}\right]}\\ &\times\frac{1}{\left[k_2^- - k_4^- + (k_4-k_2)_{\text{on}} - \frac{i\epsilon}{2(k_4-k_2)^+}\right]\left[k_4^- - k_f^- + (k_f-k_4)_{\text{on}} - \frac{i\epsilon}{2(k_f-k_4)^+}\right]}.\end{aligned} \tag{12}$$

where $k_{i\mu}$ and $k_{f\mu}$ are the initial and final four-momentum of the system and m is the mass of the boson. The integration in Eq. (12), using the Cauchy integral formula over k_2^- and k_4^-, have ten nonvanishing contributions for the residue calculation, but for our example, we concentrate our attention in a specific region, that is, in the range of momenta satisfying $0 < k_2^+ < k_i^+ < k_4^+ < k_f^+$, which corresponds to the "Z-graph".

3 Zero Mode Contribution at $\mathcal{O}(g^2)$

To calculate the electromagnetic current generated by the diverse configurations we must have the matrix elements $J^{-,+,\perp} = \langle\Gamma\,|\mathcal{O}_{+,-,\perp}|\,\Gamma\rangle$, where Γ is the constant vertex and $\mathcal{O}_{+,-,\perp}$ are the current operator components, which we can obtain directly from the sum of the final results in each region. With our metric convention, we have respectively $\mathcal{O}_{+,-} = \mathcal{O}^{-,+}$ and $\mathcal{O}_\perp = -\mathcal{O}^\perp$. Introducing the unit resolution into the matrix element we have:

$$\begin{aligned}\left\langle\Gamma\left|\mathcal{O}^{-,+,\perp}\right|\Gamma\right\rangle &= \int dk_j^+ d^2\mathbf{k}_{j\perp}\left\langle\Gamma\left|k_j^+,\,\mathbf{k}_{j\perp}\right.\right\rangle\left\langle k_j^+,\mathbf{k}_{j\perp}\right|\mathcal{O}^{-,+,\perp}\\ &\quad\times\int dk_j'^+ d^2\mathbf{k}'_{j\perp}\left|k_j'^+,\,\mathbf{k}'_{j\perp}\right\rangle\left\langle k_j'^+,\,\mathbf{k}'_{j\perp}\right|\Gamma\,\rangle\\ &= \Gamma\int dk_j^+ d^2\mathbf{k}_{j\perp} dk_j'^+ d^2\mathbf{k}'_{j\perp}\left\langle k_j^+,\mathbf{k}_{j\perp}\left|\mathcal{O}^{-,+,\perp}\right|k_j'^+,\mathbf{k}'_{j\perp}\right\rangle\Gamma\\ &= \Gamma^2\int dk_j^+ d^2\mathbf{k}_{j\perp} dk_j'^+ d^2\mathbf{k}'_{j\perp}\delta\left(k_j^+ - k_j'^+ - q^+\right)\delta\left(\mathbf{k}_{j\perp} - \mathbf{k}'_{j\perp} - \mathbf{q}_\perp\right)\\ &\quad\times\left\langle k_j^+,\mathbf{k}_{j\perp}\left|\mathcal{O}^{-,+,\perp}\right|k_j'^+,\mathbf{k}'_{j,\perp}\right\rangle\\ &= \Gamma^2\int dk_2^+ d^2\mathbf{k}_{2\perp} dk_4^+ d^2\mathbf{k}_{4\perp}\mathcal{O}^{-,+,\perp},\end{aligned} \tag{13}$$

Thus, for example the electromagnetic current $J^{-,+,\perp}$, pertinent to the region with momenta range $0 < k_2^+ < k_i^+ < k_4^+ < k_f^+$ is obtained by substituting $\mathcal{O}^{-,+,\perp}$ given in Eq. (12).

Our next step is to perform the remaining momentum integration over k_2^+ and k_4^+ and take the limit $q^+ \to 0$. To calculate the momentum integrations we make two changes of variables that will facilitate our job of integrating them

$$x = \frac{k_i^+ - k_2^+}{q^+};\quad y = \frac{k_f^+ - k_4^+}{q^+}. \tag{14}$$

On the other hand, taking advantage of the momentum conservation relations, we get

$$\begin{aligned} k_1^+ &= xq^+; \quad k_3^+ = (y-1)\,q^+; \\ k_5^+ &= yq^+; \quad k_\sigma^+ = (x-y+1)\,q^+. \end{aligned} \tag{15}$$

Now it is just a matter of putting things together. For space constraints here we restrict ourselves to investigate the minus component of the current. Other components can be worked out in a similar manner. Thus, for

- **Current** J^-:

Substituting Eqs. (14) and (15) in Eq. (13) we get:

$$\begin{aligned} J^- &= \langle \Gamma \,| \mathcal{O}^- |\, \Gamma \rangle = \Gamma^2 \int dk_2^+ d^2\mathbf{k}_{2\perp} dk_4^+ d^2\mathbf{k}_{4\perp} \mathcal{O}^- \\ &= \Gamma^2 \int d^2\mathbf{k}_{2\perp} d^2\mathbf{k}_{4\perp} \left\{ \left(q^+\right)^2 \int dx dy \mathcal{O}^- \right\}, \end{aligned} \tag{16}$$

where the operator contribution $\mathcal{O}^-$ takes the following form

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^- = \frac{ie\,(ig)^2}{2^6} & \frac{\theta\left(k_i^+ - k_2^+\right)\theta\left(k_2^+\right)\theta\left(k_4^+ - k_i^+\right)\theta\left(k_4^+\right)\theta\left(k_f^+ - k_4^+\right)\theta\left(k_4^+ - k_2^+\right)}{xq^+\left(k_i^+ - xq^+\right)(y-1)\,q^+\left(k_f^+ - yq^+\right)yq^+\,(x-y+1)\,q^+} \\ &\times \frac{\left[k_f^- - k_i^- - \frac{(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_4)_\perp^2 + m^2}{yq^+}\right]}{\left[k_i^- - \frac{(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_2)_\perp^2 + m^2}{2xq^+} - \frac{\mathbf{k}_{2\perp}^2 + m^2}{2\left(k_i^+ - xq^+\right)}\right]} \frac{1}{\left[k_f^- - \frac{\mathbf{k}_{2\perp}^2 + m^2}{2\left(k_i^+ - xq^+\right)} - \frac{(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_4)_\perp^2 + m^2}{2yq^+} - \frac{(\mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_2)_\perp^2 + m_\sigma^2}{2(x-y+1)q^+}\right]} \\ &\times \frac{1}{\left[k_f^- - k_i^- + \frac{(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_4)_\perp^2 + m^2}{2(y-1)q^+} - \frac{(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_4)_\perp^2 + m^2}{2yq^+}\right]} \frac{1}{\left[k_f^- - \frac{\mathbf{k}_{4\perp}^2 + m^2}{2\left(k_f^+ - yq^+\right)} - \frac{(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_4)_\perp^2 + m^2}{2yq^+}\right]}, \end{aligned} \tag{17}$$

which can be written in a more convenient form, factoring out all the relevant factors of q^+ to make more evident how this particular operator component depends on q^+:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^- = \frac{ie\,(ig)^2}{2^6} & \left(\frac{1}{q^+}\right) \frac{\theta\left(k_i^+ - k_2^+\right)\theta\left(k_2^+\right)\theta\left(k_4^+ - k_i^+\right)\theta\left(k_4^+\right)\theta\left(k_f^+ - k_4^+\right)\theta\left(k_4^+ - k_2^+\right)}{x\left(k_i^+ - xq^+\right)(y-1)\left(k_f^+ - yq^+\right)y\,(x-y+1)} \\ &\times \frac{\left[\left(k_f^- - k_i^-\right)q^+ - \frac{(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_4)_\perp^2 + m^2}{y}\right]}{\left[k_i^- q^+ - \frac{(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_2)_\perp^2 + m^2}{2x} - \frac{\mathbf{k}_{2\perp}^2 + m^2}{2\left(k_i^+ - xq^+\right)}q^+\right]} \frac{1}{\left[k_f^- q^+ - \frac{\mathbf{k}_{2\perp}^2 + m^2}{2\left(k_i^+ - xq^+\right)}q^+ - \frac{(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_4)_\perp^2 + m^2}{2y} - \frac{(\mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_2)_\perp^2 + m_\sigma^2}{2(x-y+1)}\right]} \\ &\times \frac{1}{\left[\left(k_f^- - k_i^-\right)q^+ + \frac{(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_4)_\perp^2 + m^2}{2(y-1)} - \frac{(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_4)_\perp^2 + m^2}{2y}\right]\left[k_f^- q^+ - \frac{\mathbf{k}_{4\perp}^2 + m^2}{2\left(k_f^+ - yq^+\right)}q^+ - \frac{(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_4)_\perp^2 + m^2}{2y}\right]}. \end{aligned} \tag{18}$$

Having achieved this result we want to generalize to J^- for this specific example, counting the terms that bear q^+, that is, performing a power counting on the factors q^+ for a quick analysis of the result in the frame $q^+ \to 0$:

$$
\begin{aligned}
\text{Momentum integration} \int \mathrm{dk}_2^+ \mathrm{dk}_4^+ &\Rightarrow \left(q^+\right)^2 \int dxdy \\
\frac{1}{(k_i-k_2)^+ k_2^+ (k_i-k_4)^+ k_4^+ \left(k_f-k_4\right)^+ (k_4-k_2)^+} &\Rightarrow \frac{1}{\left(q^+\right)^4} \\
\text{Legs of the type } \frac{1}{\left[\mathrm{a}+\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{cq}^+}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{eq}^+}+\cdots\right]^4} &\Rightarrow \left(q^+\right)^4 \\
\text{Numerator of the type } (\mathrm{a}+\mathrm{k}_{2\mathrm{on}}) \text{ or } (\mathrm{a}+\mathrm{k}_{4\mathrm{on}}) &\Rightarrow \left(q^+\right)^0 = 1 \\
\text{Numerator of the type } \left(\mathrm{a}+\mathrm{k}_{\mathrm{jon}}\right) \text{ with } \mathrm{j} \neq 2 \text{ or } 4 &\Rightarrow \frac{1}{q^+}\,,
\end{aligned}
\tag{19}
$$

where a represents the momenta k_i, k_f, $k_f - k_i$, etc. and b, d, etc. are $k_{2\mathrm{on}}$, $k_{4\mathrm{on}}$ or $k_{j\mathrm{on}}$. We note that as we multiply all these factors together it will always remain at least $\left(q^+\right)^1$, which in the limit for $q^+ \to 0$, makes the current in all regions to vanish. What we conclude here is that the introduction of a virtual boson in comparison to the configuration considered in [3], does not alter the current because the factors in the second and third line of Eq. (19) cancel each other. The important factor is the photon vertex, since this increases the power in the numerator and only with correct factors of $\frac{1}{q^+}$ we can cancel the factor coming from the change of variables.

Now finally, if we have m external sources for n interacting bosons, we obtain

$$
\begin{aligned}
\text{Momentum integration} \int \prod_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}+1} \mathrm{dk}_{2\mathrm{j}}^+ &\Rightarrow \left(q^+\right)^{n+1} \int \prod_{j=1}^{n+1} dx_j \\
\frac{1}{\left(k_i^+ - k_2^+\right)\cdots\left(k_{2n+2}^+ - k_{2n}^+\right)\left(k_f^+ - k_{2n+2}^+\right)\left(k_f^+ - k_{2j+2}^+\right)} &\Rightarrow \frac{1}{\left(q^+\right)^{2n+m+2}} \\
\text{Legs of the type } \frac{1}{\left[\mathrm{a}+\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{cq}^+}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{eq}^+}+\cdots\right]} &\Rightarrow \left(q^+\right)^{2n+m+2} \\
\text{Numerator of the type } (\mathrm{a}+\mathrm{k}_{2\mathrm{on}}) \text{ or } (\mathrm{a}+\mathrm{k}_{4\mathrm{on}}) &\Rightarrow \left(q^+\right)^0 = 1 \\
\text{Numerator of the type } \left(\mathrm{a}+\mathrm{k}_{\mathrm{j_{on}}}\right) \text{ with } \mathrm{j} \neq 2, 4, \ldots, 2\mathrm{n}+2 &\Rightarrow \frac{1}{(q^+)^m}.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

In this manner it is only possible to observe the contributions of antiparticles when we put more energy in the system of two interacting bosons. We can check in the case shown previously: In second order of coupling constant for a virtual boson it results in no observation of antiparticle contributions for $q^+ \to 0$ in a background field. However in the expression Eq. (20) we have a case of two external sources ($m = 2$) and one interacting intermediate boson ($n = 1$) in which we obtain a cancelation of the factors $\frac{(q^+)^{n+1}}{(q^+)^m} = 1$. As a consequence, in this case we will have a nonvanishing contribution from the diagrams of antiparticles. Therefore, as we increase the number of photons (more energy input to the system) on the n bosons, we will encounter nonvanishing contributions from pair production diagrams in the limit $q^+ \to 0$.

We have demonstrated that the propagator of two fermions in a background field, has a non-vanishing contribution coming from the pair creation by the photon. In particular, in an example of bound state with constant vertex, we demonstrated that the J^- current component in the Breit's reference frame ($q^+ = 0$) has a non-zero contribution from the process of pair creation by the photon. This conclusion is reached as long as we first have q^+ different from zero, integrating in k^- and then taking the limit $q^+ \to 0$. The integration in k^- and the limit $q^+ \to 0$ does not commute in general.

4 Conclusion

We have demonstrated that the propagator of two fermions in a background field, has a non-vanishing contribution coming from the pair creation by the photon. In particular, in an example of bound state with constant vertex, we demonstrated that the J^- current component in the Breit's reference frame ($q^+ = 0$) has a non-zero contribution from the process of pair creation by the photon. This conclusion is reached as long as we first have q^+ different from zero, integrating in k^- and then taking the limit $q^+ \to 0$. The integration in k^- and the limit $q^+ \to 0$ does not commute in general.

Acknowledgments JHS thanks IFT for the hospitality and FAPESB Propp-00220.1300.1088 and NBCGIB for the financial support.

References

1. Dirac, P.A.M.: Forms of relativistic dynamics. Rev. Mod. Phys. **21**, 392–399 (1949)
2. de Melo, J.P.B., Sales, J.H.O., Frederico, T., Sauer, P.U.: Pairs in the light-front and covariance. Nucl. Phys. A **631**, 574c–579c (1998)
3. Suzuki, A.T., Sales, J.H.O., Soriano Carrillo, L.A.: Zero mode effect generalization for the electromagnetic current in the light front. Phys. Rev. **D88**, 025036-1–025036-17 (2013)
4. Bakker, B.L.G., DeWitt, M.A., Ji, C.-R., Mishchenko, Y.: Restoring the equivalence between the light-front and manifestly covariant formalisms. Phys. Rev. **D72**, 076005-1–076005-12 (2005)
5. Drell, S.D., Yan, Tung-Mow.: Connection of elastic electromagnetic nucleon form-factors at large Q^2 and deep inelastic structure functions near threshold. Phys. Rev. Lett. **24**, 181–185 (1970)

Referências Bibliográficas

[1] Bassalo, J.M.F.; Cattani, M.S.D. **Elementos de Física Matemática: Equações integrais e integrais de trajetória não relativísticas**. Vol. 3. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2012.

[2] Minkowski, H. **Das Relativitätsprinzip**. Annalen der Physik 352 (1907) 927.

[3] Dirac, P.M.A. **Forms of Relativistic Dynamics**. Rev. Mod. Phys. 21 (1949) 392.

[4] Sales, J.H.O.; Frederico, T.; Carlson, B.; Sauer, P. **Light-front Bethe-Salpeter equation**. Physical Review. C. Nuclear Physics, 61 (2000) 044003.

[5] Suzuki, A.T.; Sales, J.H.O. **Quantum Gauge Boson Propagators in the Light Front**. Modern Physics Letters A, 19 (2004) 2831.

[6] Suzuki, A.T.; Sales, J.H.O. **Light-front gauge propagator reexamined**. Nuclear Physics. A, 725 (2003) 139.

[7] Sales, J.H.O.; Suzuki, A.T. **Light Front Boson Model Propagation**. Communications in Theoretical Physics, 55 (2011) 1029.

[8] Sales, J.H.O.; Suzuki, A.T. **Light Front Fermion Model Propagation**. Communications in Theoretical Physics, 60 (2013) 55.

[9] Sales, J.H.O.; Suzuki, A.T. **Antiparticle Contribution in the Cross Ladder Diagram for Bethe-Salpeter Equation in the Light-Front**. International Journal of Theoretical Physics, 48 (2009) 3173.

[10] Sales, J.H.O.; Suzuki, A.T.; Santos, G.S.; Lima, C. A. **Cross-ladder diagrams via hierarchical equations in the light front**. Artigo aceito para publicação em Few-Body Systems, (2014).

[11] Bjorken, J.D. **Asymptotic Sum Rules at Infinite Momentum**. Physical Review, 179 (1969) 1547.

[12] Sales, J.H.O; Suzuki, A.T.; Santana, L.A.O; Santos, G.S. **Special Relativity on the Light-Front**. Artigo submetido no Journal of Mathematical Physics (2014).

[13] Sales, J.H.O.; Suzuki, A.T.; Zambrano, G.E.R. **Relativistic free-particle quantization on the light-front: New aspects**. AIP Conference Proceedings, 739 (2005) 705.

[14] Brodsky, S.J.; Pauli, H.C.; Pinsky, S.S. **Quantum Chromodynamics and Other Field Theories on the Light Cone**. Physics Reports, 301 (1998) 299.

[15] Kogut, J.B.; Soper, D.E. **Quantum Electrodynamics in the Infinite-Momentum Frame**. Physical Review, D1 (1970) 2901.

[16] Sales, J.H.O.; Frederico, T.; Carlson, B.; Sauer, P. **Renormalization of the ladder light-front Bethe-Salpeter equation in the Yukawa model**. Physical Review. C. Nuclear Physics, 63 (2001) 064003.

[17] Frederico, T.; Sales, J.H.O.; Carlson, B.V.; Sauer, P.U. **Light-front time picture of few-body systems**. Nuclear Physics. A, 737 (2004) 260.

[18] Suzuki, A.T.; Sales, J.H.O. **Surveillance on the Light-Front Gauge-Fixing Lagrangians**. Modern Physics Letters A, 19 (2004) 1925.

[19] Melo, J.P.B.C. de; Sales, J.H.O.; Frederico, T.; Sauer, P.U. **Pairs in the light-front and covariance**. Nuclear Physics. A, 631 (1998) 574.

[20] Sales, J.H.O.; Suzuki, A.T. **Why Pair Production Cures Covariance in the Light-Front?** International Journal of Theoretical Physics, 48 (2009) 2340.

[21] Sales, J.H.O.; Suzuki, A.T.; Carrillo, L.A.S. **Covariance for electromagnetic current for two bosons at higher order in the light front**. AIP Conference Proceedings, 1296 (2010) 386.

[22] Sales, J.H.O.; Suzuki, A.T. **Light-front zero-mode contribution to the Ward Identity**. Nuclear Physics. B, Proceedings Supplement, 199 (2010) 211.

[23] Sakurai, J.J.; Napolitano, J. **Mecânica Quântica Moderna**. 2 ed. Tradução Técnica: Sílvio Renato Dahmen. Porto Alegre: Bookman, 2013.

[24] Soriano, L.A.; Suzuki, A.T.; Sales, J.H.O. **The Lorentz Transformation on the Light Front, is it Possible?** XII Hadron Physics. 1520 (2013) 428.

[25] Weinberg, S. **Dynamics at Infinite Momentum**. Physical Review, 150 (1966) 1313.

[26] Suzuki, A.T.; Sales, J.H.O.; Santos, G.S. **Zero Mode Effects for the Electromagnetic Currents in the Light Front: Fermion Case**. Few-Body Systems, (2014) 1.

[27] Suzuki, A.T.; Sales, J.H.O.; Carrillo, L.A.S. **Zero mode effect generalization for the electromagnetic current in the light front**. Physical Review. D, Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology, 88 (2013) 025036.

[28] Suzuki, A.T.; Sales, J.H.O.; Soriano, L.A.; Bolzan, J.D. **Vacuum Polarization Tensor for QED in the Light Front Gauge**. Few-Body Systems, (2012) 20.

[29] Suzuki, A.T.; Carrillo, L.A.S.; Sales, J.H.O. **Do tadpoles vanish in the light-front?** Nuclear Physics. B, Proceedings Supplement, 199 (2010) 166.